Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (126), 2021

Математика

УДК 512.542

О некоторых свойствах *A*-допустимых подгрупп конечных групп

Р.В. Бородич, М.В. Селькин, Е.Н. Бородич, Т.В. Бородич, А.В. Бузланов

В работе исследовано строение подгруппы, равной пересечению ядер максимальных A-допустимых подгрупп, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал, с ограничениями на индексы. Установлены свойства соответствующей обобщенной подгруппы Фраттини.
Ключевые слова: конечная группа, формация, $\mathfrak{F}$-корадикал.

The structure of the subgroup equal to the intersection of the kernels maximal A-admissible subgroups that do not contain an $\mathfrak{F}$-residual, with restrictions on the indices is studied. The properties of the corresponding generalized Frattini subgroup are established.
Keywords: finite group, formation, $\mathfrak{F}$-residual.

В данной работе изучается влияние свойств $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп заданного индекса на формационное строение конечных групп. Необходимые определения и обозначения можно найти в работах [1]–[3]. В дальнейшем π – некоторое множество простых чисел, все рассматриваемые классы групп содержат единичные группы.

В настоящее время развитие теории пересечений максимальных подгрупп связано с введением функторного метода [3], позволяющего строить новые обобщения подгруппы Фраттини и исследовать влияние свойств этих подгрупп на строение группы.

Данная работа посвящена продолжению исследований, опубликованных в работах [4]–[9].

Пусть P – множество всех простых чисел. Если $p \in P$ и $\pi \subseteq P$, то $\pi' = P \setminus \pi$; $p' = P \setminus \{p\}$. Подгруппа H группы G называется S_π-подгруппой, если $|G:H|$ не делится на числа из π.

Через $O_\pi(G)$ обозначают наибольшую нормальную π-подгруппу группы G.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Отображение f класса $\mathfrak{G}$ всех групп в множество классов групп называют экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

1) $f(G)$ – формация;

2) $f(G) \subseteq f(G^\phi) \cap f(Ker\phi)$ для любого гомоморфизма ϕ группы G;

3) $f(1) = \mathfrak{G}$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p-группах и $f(G) = \bigcap_{p\in\pi(G)} f(p)$ для любой группы G.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая формация, тогда максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{X}$-нормальной ($\mathfrak{X}$-абнормальной), если $G^{\mathfrak{X}}$ содержится (соответственно не содержится) в

M, где $G^{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{X}$-корадикал группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{X}$.

Класс групп $\mathfrak{F}^*$ называется подпрямым замыканием формаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$, если из $G \in \mathfrak{F}^*$ следует, что $G^{\mathfrak{F}^*} \subseteq G^{\mathfrak{H}} \cap G^{\mathfrak{F}}$.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (пересечение всех подгрупп из G сопряженных с подгруппой M).

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f: A \mapsto Aut(G)$, где $Aut(G)$ – автоморфное отображение группы G в себя. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Заметим, что максимальная A-допустимая подгруппа M либо целиком содержит $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, либо $MG^{\mathfrak{F}} = G$. Действительно. Так как произведение A-допустимых подгрупп A-допустимо и $G^{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A-допустимая, то $MG^{\mathfrak{F}} = M$ или $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Обозначим через $\Phi^{\mathfrak{F}}(G, A)$ пересечение всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал. Через $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\overline{\pi}}(G, A)$ ($\Phi^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G, A)$) пересечение всех тех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал, индекс каждой из которых не является (является) π-числом, где $\mathfrak{F}$ – формация. В случае отсутствия в группе G указанных подгрупп, полагаем указанные подгруппы равными группе G.

Лемма 1 [5]. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|) = 1$, θ – абнормально полный подгрупповой функтор, $K \subseteq N \lhd G$, $K \lhd G$, N – A-допустимая подгруппа группы G и $K \subseteq \Phi_{\theta}(G, A)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если N/K π-замкнута, то и N π-замкнута;

2) $O_{p'}(N/K) = O_{p'}(N)/K$.

Теорема 1. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|) = 1$, Γ – формация. Если в группе G существуют максимальные A-допустимые подгруппы, не содержащие Γ-корадикал, не принадлежащие Γ, то пересечение всех таких подгрупп совпадает с $\Phi^{\Gamma}_{\Theta}(G, A)$.*

Доказательство. Предположим, что пересечение $\overline{\Phi}^{\Gamma}(G, A)$ всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих Γ-корадикал, и не принадлежащих формации Γ, совпадает с подгруппой $\Phi(G, A)$. Так как

$$\Phi(G, A) \le \Phi^{\Gamma}(G, A) \le \overline{\Phi}^{\Gamma}(G, A),$$

то $\Phi^{\Gamma}(G, A) = \overline{\Phi}^{\Gamma}(G, A)$.

Пусть $\overline{\Phi}^{\Gamma}(G, A)$ не совпадает с подгруппой $\Phi(G, A)$. Тогда $G = M\overline{\Phi}^{\Gamma}(G, A)$, где M – некоторая максимальная A-допустимая подгруппа группы G. Если $M \in \Gamma$, то $G/\overline{\Phi}^{\Gamma}(G, A) \in \Gamma$. Отсюда $\overline{\Phi}^{\Gamma}(G, A)$ содержится в максимальных A-допустимых подгруппах, содержащих Γ-корадикал, что невозможно. Поэтому M не входит в Γ и является максимальной A-допустимой подгруппой, содержащей Γ-корадикал. Итак, всякая максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая $\overline{\Phi}^{\Gamma}(G, A)$, содержит Γ-корадикал. Следовательно, $\overline{\Phi}^{\Gamma}(G, A) \le \Phi^{\Gamma}(G, A)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\mathfrak{F}$ – формация. Если всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы G, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал, индекс которой в G есть π-число, принадлежит формации Γ, то выполняется одно из следующих условий:*

1) $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)$;

2) $G^\Gamma \subseteq \Phi_\pi^\Gamma(G,A)$;

3) $G^\Gamma / G^\Gamma \cap \Phi_\pi^\Gamma(G,A)$ – главный фактор группы G, $\pi(G^\Gamma) = \pi(G^\Gamma / G^\Gamma \cap \Phi^\Gamma(G,A))$, $\Phi_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A) = \Phi_\pi^\Gamma(G,A)$, причем $\Phi^\Gamma(G,A) = \Phi_{\underline{\pi}}^\Gamma(G,A)$, если $\Phi^\Gamma(G) \neq \Phi_\pi^\Gamma(G,A)$.

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Если в группе G отсутствуют максимальные A-допустимые подгруппы, не содержащие $\mathfrak{F}$-корадикал, индекс каждой из которых в G есть π-число, то $\Phi_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A) = G$ по определению. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_\pi^{\mathfrak{F}}(G,A)$, что противоречит предположению. Поэтому в дальнейшем считаем, что в группе G существует по крайней мере одна максимальная A-допустимая подгруппа M группы G, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал, индекс которой в G есть π-число. Значит, $G = MG^{\mathfrak{F}}$. По условию теоремы $M \in \Gamma$. Значит, $G / G^{\mathfrak{F}} \in \Gamma$. Следовательно, $G^\Gamma \subseteq G^{\mathfrak{F}}$.

Если в группе G отсутствуют максимальные A-допустимые подгруппы, не содержащие Γ-корадикал, индекс каждой из которых в G есть π-число, то $\Phi_\pi^\Gamma(G,A) = G$ и $G^\Gamma \subseteq \Phi_\pi^\Gamma(G,A)$, что противоречит предположению. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что в группе G существуют максимальные A-допустимые подгруппы, не содержащие Γ-корадикал, индекс каждой из которых в G есть π-число, т. е. $\Phi_\pi^\Gamma(G,A) \neq G$.

Если G^Γ – минимальная инвариантная в G подгруппа, то либо $G^\Gamma \cap \Phi_\pi^\Gamma(G,A) = 1$, либо $G^\Gamma \subseteq \Phi_\pi^\Gamma(G,A)$. Если $G^\Gamma \cap \Phi_\pi^\Gamma(G,A) = 1$, то, проследив дальнейшее доказательство, можно сделать вывод, что теорема справедлива. Принадлежность же подгруппы G^Γ пересечению $\Phi_\pi^\Gamma(G,A)$ противоречит тому, что в группе G существует максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая Γ-корадикал, индекс которой в G есть π-число.

Пусть G^Γ не является минимальной нормальной в G подгруппой. Рассмотрим участок главного ряда группы G:

$$1 = K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n = G^\Gamma.$$

Если K_t не содержится в $\Phi_\pi^\Gamma(G,A)$, где $1 \le t \le n$, то в группе G будет существовать такая максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая Γ-корадикал, индекс которой в G есть π-число, что $G = MK_t$. А так как $G^\Gamma \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, то по условию все такие максимальные A-допустимые подгруппы принадлежат Γ. Значит, $G / K_t \in \Gamma$. Отсюда $G^\Gamma = K_t$. А это противоречит выбору подгруппы K_t. Следовательно, $K_t \subseteq \Phi_\pi^\Gamma(G,A)$ и поэтому $G^\Gamma / G^\Gamma \cap \Phi_\pi^\Gamma(G,A)$ – главный фактор группы G.

Пусть $\Phi^\Gamma(G,A) = \Phi_\pi^\Gamma(G,A)$. Замечаем, что

$$\pi(G^\Gamma / G^\Gamma \cap \Phi_\pi^\Gamma(G,A)) \subseteq \pi(G^\Gamma).$$

Покажем теперь, что $\pi(G^\Gamma / G^\Gamma \cap \Phi^\Gamma(G,A)) \subseteq \pi(G^\Gamma)$. Предположим, что существует такое простое число p, делящее порядок G^Γ, которое не делит $|G^\Gamma / G^\Gamma \cap \Phi_\pi^\Gamma(G,A)|$. Известно, что $G^\Gamma \cap \Phi^\Gamma(G,A) \subseteq \Phi(G,A)$. Значит, $G^\Gamma \cap \Phi_\pi^\Gamma(G,A) \subseteq \Phi(G,A)$. В этом случае можно считать, что $G^\Gamma / G^\Gamma \cap \Phi_\pi^\Gamma(G,A)$ – p-замкнутая и p'-замкнутая подгруппа. По лемме 1 получаем, что $G^\Gamma = G_p^\Gamma \times G_{p'}^\Gamma$. Подгруппа $G_{p'}^\Gamma$ будет инвариантной в группе G. Ввиду выбора подгруппа G_p^{Γ} содержится в $\Phi_{\pi}^{\Gamma}(G,A)$. Но тогда $G_{p'}^{\Gamma}$ не содержится в $\Phi_{\pi}^{\Gamma}(G,A)$. Следовательно, в группе G найдется такая максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая Γ-корадикал, индекс которой в G есть π-число, что $G = MG_{p'}^{\Gamma}$. Но $G^{\Gamma} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, значит, $G = MG^{\mathfrak{F}}$. А по условию теоремы $M \in \Gamma$. Значит, $G^{\Gamma} = G_{p'}^{\Gamma}$, т. е. p не делит порядок G^{Γ}, что противоречит предположению.

Следовательно, не существует такого простого числа p, делящего $|G^{\Gamma}|$, которое не делило бы $G^{\Gamma}/G^{\Gamma} \cap \Phi_{\pi}^{\Gamma}(G,A)$. Потому

$$\pi(G^{\Gamma}) \subseteq \pi(G^{\Gamma}/G^{\Gamma} \cap \Phi_{\pi}^{\Gamma}(G,A)).$$

Учитывая, что $\Phi_{\pi}^{\Gamma}(G,A) = \Phi^{\Gamma}(G,A)$. Следовательно,

$$\pi(G^{\Gamma}) = \pi(G^{\Gamma}/G^{\Gamma} \cap \Phi^{\Gamma}(G,A)).$$

В дальнейшем можно предположить, что $\Phi^{\Gamma}(G,A) \subset \Phi_{\pi}^{\Gamma}(G,A)$. Поэтому в группе G найдется такая максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая Γ-корадикал, что $G = H\Phi_{\pi}^{\Gamma}(G,A)$.

Если $H \in \Gamma$, то $G^{\Gamma} \subseteq \Phi_{\pi}^{\Gamma}(G,A)$. А это противоречит тому, что в группе G существуют максимальные A-допустимые подгруппы, не содержащие Γ-корадикал. Значит, H не принадлежит Γ.

В группе G подгруппа $\Phi_{\overline{\pi}}^{\Gamma}(G) \neq G$, так как индекс максимальной A-допустимой подгруппы H в G, не содержащей Γ-корадикал, есть не π-число.

Так как $G^{\Gamma} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, то всякая максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая Γ-корадикал не содержит $\mathfrak{F}$-корадикал. Поэтому в группе G все максимальные A-допустимые подгруппы, не содержащие Γ-корадикал, индекс каждой из которых в G есть π-число, принадлежат Γ, и среди всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих Γ-корадикал, индекс каждой из которых в G есть не π-число, должны находиться все максимальные A-допустимые подгруппы, не содержащие Γ-корадикал, не принадлежащие Γ, т. е. $\Phi_{\overline{\pi}}^{\Gamma}(G,A) \subseteq \overline{\Phi}^{\Gamma}(G,A)$. Так как в группе существует максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая Γ-корадикал, не принадлежащая Γ, то по теореме 1 имеем, что $\Phi^{\Gamma}(G,A) = \overline{\Phi}^{\Gamma}(G,A)$. Итак, получим, что $\Phi_{\pi}^{\Gamma}(G,A) \subseteq \Phi^{\Gamma}(G,A)$. Следовательно,

$$G^{\Gamma} \cap \Phi_{\overline{\pi}}^{\Gamma}(G,A) \subseteq G^{\Gamma} \cap \Phi^{\Gamma}(G,A) \subseteq \Phi(G,A)$$

и $\Phi_{\overline{\pi}}^{\Gamma}(G,A) = \Phi^{\Gamma}(G,A)$.

Покажем теперь, что $\pi(G^{\Gamma}) = \pi(G^{\Gamma}/G^{\Gamma} \cap \Phi_{\overline{\pi}}^{\Gamma}(G,A))$. Предположим, что существует такое простое число p, которое делит порядок G^{Γ}, но не делит $|G^{\Gamma}/G^{\Gamma} \cap \Phi_{\overline{\pi}}^{\Gamma}(G,A)|$. Так как $G^{\Gamma} \cap \Phi_{\overline{\pi}}^{\Gamma}(G,A) \subseteq \Phi(G,A)$, то по лемме 1 получаем, что $G^{\Gamma} = G_p^{\Gamma} \times G_{p'}^{\Gamma}$. Ввиду выбора подгруппа G_p^{Γ} содержится в $\Phi_{\overline{\pi}}^{\Gamma}(G,A)$. Следовательно, $G_{p'}^{\Gamma} \subseteq \Phi_{\overline{\pi}}^{\Gamma}(G,A)$, ибо в противном случае $G^{\Gamma} \subseteq \Phi_{\overline{\pi}}^{\Gamma}(G,A)$, что противоречит существованию в группе G максимальной A-допустимой подгруппы, не содержащей Γ-корадикал, индекс которой в G не есть π-число. Замечаем, что $G_p^{\Gamma} \subseteq \Phi_{\overline{\pi}}^{\Gamma}(G,A) = \Phi^{\Gamma} \subset \Phi_{\pi}^{\Gamma}(G,A)$. Если бы $G_{p'}^{\Gamma} \subseteq \Phi_{\pi}^{\Gamma}(G,A)$, то $G^{\Gamma} \subseteq \Phi_{\pi}^{\Gamma}(G,A)$, а это противоречит существованию в группе G максимальной A-допустимой подгруппы, не содержащей Γ-корадикал, индекс которой в G есть π-число. Значит, $G_{p'}^{\Gamma}$ не из $\Phi_{\pi}^{\Gamma}(G,A)$. В группе G найдется такая максимальная A-допустимая подгруппа F, не содержащая Γ-корадикал, индекс которой в G есть π-число, что $G = FG_{p'}^{\Gamma}$. А по условию теоремы все такие максимальные A-допустимые подгруппы принадлежат Γ. Значит, $G^{\Gamma} \subseteq G_{p'}^{\Gamma}$, т. е. p не делит

$|G^{\Gamma}|$, что противоречит выбору p. Следовательно, $\pi(G^{\Gamma}) \subseteq \pi(G^{\Gamma} / G^{\Gamma} \cap \Phi_{\pi}^{\Gamma}(G, A))$. Очевидно, $\pi(G^{\Gamma} / G^{\Gamma} \cap \Phi_{\pi}^{\Gamma}(G, A) \subseteq \pi(G^{\Gamma})$. Поэтому $\pi(G^{\Gamma}) = \pi(G^{\Gamma} / G^{\Gamma} \cap \Phi_{\pi}^{\Gamma}(G, A))$. Так как $\Phi_{\pi}^{\Gamma}(G, A)) = \Phi^{\Gamma}(G, A))$, то $\pi(G^{\Gamma}) = \pi(G^{\Gamma} / G^{\Gamma} \cap \Phi^{\Gamma}(G, A))$.

Покажем теперь, что $\Phi_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)) = \Phi_{\pi}^{\Gamma}(G))$. Так как всякая максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая Γ-корадикал, не содержит $\mathfrak{F}$-корадикал, то $\Phi_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \subseteq \Phi_{\pi}^{\Gamma}(G, A)$. Предположим, что $\Phi_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \subset \Phi_{\pi}^{\Gamma}(G, A)$. Тогда в группе G найдется такая максимальная A-допустимая подгруппа L, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал, индекс которой в G есть π-число, что $G = L\Phi_{\pi}^{\Gamma}(G, A)$. Но по условию L принадлежит Г. Значит, $G / \Phi_{\pi}^{\Gamma}(G, A) \in \Gamma$, что противоречит существованию в группе G максимальных A-допустимых подгрупп, не содержащих Γ-корадикал, индекс каждой из которых в G есть π-число. Поэтому $\Phi_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) = \Phi_{\pi}^{\Gamma}(G, A)$. Теорема доказана.

Из данной теоремы в различных частных ситуациях следуют соответствующие результаты работ [10]–[13].

Теорема 3. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что* $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{F}^*$ *– подпрямое замыкание формаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$, являющееся локальной формацией. Если $G^{\mathfrak{F}^*}$ – π-разрешимая подгруппа и всякая максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая $\mathfrak{H}$-корадикал, индекс которой в G есть π-число, не содержит $\mathfrak{F}$-корадикал, то $G^{\mathfrak{F}^*}$ – π'-подгруппа.*

Доказательство. Пусть G – контрпример минимального порядка. Проверим выполнимость условия теоремы для фактор-группы G / K. Пусть M / K – максимальная A-допустимая подгруппа из G / K, не содержащая $\mathfrak{H}$-корадикал, индекс которой в G есть π-число. Тогда $|G : M|$ – π-число и M – максимальная A-допустимая подгруппа в G, не содержащая $\mathfrak{H}$-корадикал. По условию теоремы максимальная A-допустимая подгруппа M не содержит $\mathfrak{F}$-корадикал. Получаем, что M / K есть максимальная A-допустимая подгруппа в G / K, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал. Кроме того, $G^{\mathfrak{F}^*} K / K \simeq G^{\mathfrak{F}^*} / G^{\mathfrak{F}^*} \cap K$ – π-разрешимая подгруппа.

Пусть в группе G существует инвариантная π'-подгруппа $K \neq 1$. Тогда по предположению для фактор-группы G / K теорема выполняется. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}^*} K / K$ – π'-подгруппа. Но тогда и $G^{\mathfrak{F}^*}$ есть π'-подгруппа, что противоречит предположению. Значит, в дальнейшем предполагаем, что в группе G не существует инвариантных π'-подгрупп, отличных от единицы. Если $G^{\mathfrak{F}^*} = 1$, то эту подгруппу можно считать π'-подгруппой.

Пусть N – минимальная инвариантная подгруппа из $G^{\mathfrak{F}^*}$, отличная от единицы. Так как $G^{\mathfrak{F}^*}$ – π-разрешимая подгруппа, то N есть p-подгруппа, где $p \in G$.

Если N не содержится в $\Phi^{\mathfrak{F}^*}(G, A)$, то в группе G найдется такая максимальная A-допустимая подгруппа H, не содержащая $\mathfrak{F}^*$-корадикал, что $G = HN$. Так как $G^{\mathfrak{F}^*} \subseteq G^{\mathfrak{F}} \cap G^{\mathfrak{H}}$, то H одновременно не содержит $\mathfrak{H}$-корадикал и $\mathfrak{F}$-корадикал. Но $|G : H|$ – π-число, и по условию теоремы максимальная A-допустимая подгруппа H не должна содержать $\mathfrak{F}$-корадикал, а это значит, что $G^{\mathfrak{F}} = 1$. Но тогда $G^{\mathfrak{F}^*} \subseteq G^{\mathfrak{F}} = 1$, что противоречит предположению. Значит, $N \subseteq \Phi^{\mathfrak{F}^*}(G, A)$. По предположению $G^{\mathfrak{F}^*} / N$ есть π'-подгруппа. Кроме того, имеем, что

$$G^{\mathfrak{F}^*} / N \cap \Phi^{G^{\mathfrak{F}^*}}(G, A) \mapsto G^{\mathfrak{F}^*} / G^{\mathfrak{F}^*} \cap \Phi(G, A)$$

– π'-подгруппа. По лемме 1 $G^{\mathfrak{F}^*} = G_{\pi}^{\mathfrak{F}^*} \times G_{\pi'}^{\mathfrak{F}^*}$. Если $N \neq G^{\mathfrak{F}^*}$, то $G_{\pi'}^{\mathfrak{F}^*} \neq 1$, что противоречит предположению. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}^*} = N$. Но тогда $G^{\mathfrak{F}^*} \subseteq \Phi(G, A)$, а $\mathfrak{F}^*$ – локальная формация. Поэтому $G \in \mathfrak{F}^*$ и $G^{\mathfrak{F}^*} = 1$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A, *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, $\mathfrak{F}^*$ *– подпрямое замыкание формаций* $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$, *являющееся локальной формацией. Если* $G^{\mathfrak{F}^*}$ *–* π*-подгруппа и всякая максимальная* A*-допустимая подгруппа группы* G, *не содержащая* $\mathfrak{H}$*-корадикал, индекс которой в* G *есть* π*-число, содержит* $\mathfrak{F}$*-корадикал, то* $G \in G^{\mathfrak{F}^*}$.

Доказательство. Пусть G – контрпример минимального порядка. Если $G^{\mathfrak{F}^*} \subseteq \Phi(G, A)$, то $G \in \mathfrak{F}^*$, так как $\mathfrak{F}^*$ – локальная формация. Значит, в дальнейшем предполагаем, что $G^{\mathfrak{F}^*}$ не содержится в $\Phi(G, A)$. Тогда в группе G найдется такая максимальная A-допустимая подгруппа M, что $G = MG^{\mathfrak{F}^*}$. Но так как $\mathfrak{F}^*$ – подпрямое замыкание формаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}^*} \subseteq G^{\mathfrak{H}} \cap G^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, M не содержит и $\mathfrak{H}$-корадикал, и $\mathfrak{F}$-корадикал. Но $|G:M|$ – π-число. По условию теоремы A-допустимая подгруппа M должна содержать $\mathfrak{F}$-корадикал. А это возможно лишь в том случае, когда $G^{\mathfrak{F}} = 1$. Но тогда $G^{\mathfrak{F}^*} = 1$. Полученные противоречия доказывают теорему.

Если $\mathfrak{H}$ – формация p'-групп, $\mathfrak{F}$ – формация сверхразрешимых групп, тогда $\mathfrak{F}^*$ принадлежит формации P-сверхразрешимых групп. Если же $\mathfrak{H}$ – формация π'-групп, $\mathfrak{F}$ – формация нильпотентных подгрупп, то $\mathfrak{F}^*$ не входит в формацию π-разложимых групп. Поэтому из теоремы 4, в случае единичности группы операторов, следуют результаты работы [14].

Литература

1. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. :Наука, 1978. – 272 с.

2. Шеметков, Л. А. Конечные разрешимые группы / Л. А. Шеметков // Изв. АН СССР. Сер. Мат. – 1968. – Т. 32, № 3. – С. 577–589.

3. Селькин, М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М. В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 144 с.

4. Бородич, Е. Н. О пересечении $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных Θ-подгрупп / Е. Н. Бородич, Р. В. Бородич // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2007. – № 3. – С. 47–52.

5. Бородич, Р. В. О пересечении максимальных подгрупп конечных групп / Р. . Бородич // Укр. мат. журнал. – 2019. – Т. 71, № 11. – С. 1455–1465.

6. Borodich, R. V. A generalized Frattini subgroup / R. V. Borodich // Asian-European Journal of Mathematics. – 2020. – DOI: 10.1142 / S1793557121500261.

7. Бородич, Р. В. Об $\mathfrak{F}$-достижимых подгруппах в группах с операторами / Р. В. Бородич, Е. Н. Бородич, М. В. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 33–39.

8. Бородич, Е. Н. О пересечении подгрупп в группах с операторами / Е. Н. Бородич, Р. В. Бородич, М. В. Селькин // Вестник БГУ. Сер.1. – 2012. – № 1. – С. 54–62.

9. Бородич, Р.В. О пересечении абнормальных подгрупп, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал / Р. В. Бородич, М. В. Селькин // Известия. – 2019. – № 6 (117). – С. 117–125.

10. Белоногов, В. А. Конечные группы с единственным классом максимальных неинвариантных подгрупп / В. А. Белоногов // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1969. – № 3. – С. 114–117.

11. Русаков, С. А. О группах с максимальными подгруппами данного вида / С. А. Русаков // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1968. – № 1. – С. 49–53.

12. Шлык, В. В. О влиянии формационных свойств максимальных подгрупп на строение конечной разрешимой группы / В. В. Шлык // ДАН БССР. – 1973. – Т. 17, № 2. – С. 109–112.

13. Rose, J. S. The influence on a finite group of its proper abnormal structure / J. S. Rose. – J. London Math. Soc. – 1965. – V. 40. – P. 348–361.

14. Сучков, В. К. О максимальных π-критических подгруппах конечной группы / В. К. Сучков // Изв. вузов. Сер. Математика. – 1968. – № 1. – С. 98–107.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 07.04.2021