Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 5(8), Проблемы взаимодействия излучения с веществом, 2001

Статическая электрическая поляризуемость π^0-мезона в пуанкаре-ковариантной модели со скалярными кварками

В.В.Андреев, Н.В.Максименко

1. Введение

В последнее время в связи с появлением новых экспериментальных данных значительно повысился интрес к электромагнитым поляризуемостям релятивистских связанных систем. Появилось большое количество работ, посвященных изучению электромагнитных поляризуемостей ядер и адронов (см. обзор [1]). Одной из актуальных задач является изучение релятивистских вкладов в поляризуемости [2]-[4]. Ожидается, в частности, что такие вклады позволят устранить расхождения между расчетами поляризуемостей протона и нейтрона в нерелятивистской кварковой модели. Другим важным вопросом является изучение соотношения между статической и обобщенной электрической поляризуемостями. Такого рода исследования затруднены тем, что релятивистские уравнения движения для связанных систем (типа Солпитера, квазипотенциальные и др.) даже с простейшими потенциалами не имеют аналитических решений.

В работе предлагается методика получения оценки статической электрической поляризуемости с использованием теории возмущений и вариационного метода. На основе предлагаемой методики исследуется статическая электрическая поляризуемость π^0- мезона как связанной системы двух скалярных кварков. Для описания связанной системы мы используем пуанкаре-ковариантную модель на основе релятивистской гамильтоновой динамики (РГД). РГД является релятивистским обобщением обычной квантовой механики.

2. Описание связанной двухчастичной системы в РГД

Релятивистская гамильтонова динамика отличается от обычной нерелятивистской квантовой механики тем, что основным требованием для операторов полного набора состояний является то, чтобы генераторы, из которых строятся эти операторы, подчинялись алгебре группы Пуанкаре.

Кратко рассмотрим, как описывается связанная релятивистская система в РГД. Построение связанной системы начинают с построения системы невзаимодействующих частиц, а затем вводят взаимодействие $\hat{V}$ таким образом, чтобы выполнялось требование пуанкаре-инвариантности.

Для невзаимодейтсвующей системы двух частиц массами m_1,m_2 и соответственно 4-импульсами:

$$p_1 = (\vec{p}_1, \omega_{m_1}(\vec{p}_1))\,, p_2 = (\vec{p}_2, \omega_{m_2}(\vec{p}_2)) \tag{1}$$

введем полный импульс системы

$$P_{12} = p_1 + p_2, \tag{2}$$

и относительный импульс

$$\vec{k} = \vec{p}_1 + \frac{\vec{P}_{12}}{M_0}\left(\frac{\vec{P}_{12}\cdot\vec{p}_1}{\omega_{M_0}(\vec{P}_{12}) + M_0} + \omega_{m_1}(\vec{p}_1)\right), \tag{3}$$

где

$$M_0 \equiv M_0(k) = \omega_{m_1}(\vec{k}) + \omega_{m_2}(\vec{k}) \tag{4}$$

является эффективной массой свободной системы. В соотношениях (1)-(4) введено обозначение $\omega_m(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Следующим шагом в РГД является добавление взаимодействия $\hat{V}$ в оператор массы M_0 (4)

$$\hat{M} \equiv M_0 + \hat{V}. \tag{5}$$

Если оператор $\hat{V}$ удовлетворяет условиям

$$\hat{M} = \hat{M}^{\dagger},\ M > 0,\ [\vec{P}_{12}, \hat{V}]_- = [i\vec{\bigtriangledown}_{\vec{p}_{12}}, \hat{V}]_- = [\vec{J}, \hat{V}]_- = 0, \tag{6}$$

где $\vec{J}$ оператор углового момента связанной системы, то новый набор операторов удовлетворяет перестановочным соотношениям группы Пуанкаре, как и в случае свободной системы.

Задача на собственные значения для связанного состояния Ψ с полным импульсом $\vec{P}$, массой M_Ψ, спином J и проекцией спина μ может быть записана в виде [5]:

$$\hat{M} \mid \Psi_{\vec{P},J,\mu} >\equiv (M_0 + \hat{V}) \mid \Psi_{\vec{P},J,\mu} >= M_\Psi \mid \Psi_{\vec{P},J,\mu} > . \tag{7}$$

Волновая функция (ВФ) связанной системы в РГД удовлетворяет в общем случае интегро-дифференциальному уравнению (см.[5]):

$$\sum_{l',s'} \int < \vec{k}, l, s \parallel \hat{V} \parallel \vec{k}', l', s' > \Psi^{J\mu}_{l'\ s'}(k')\, d\vec{k}' = (M_\psi - M_0)\, \Psi^{J\mu}_{l\ s}(k)\,. \tag{8}$$

Если связанная система находится в однородном электростатическом поле напряженностью $\vec{E}$, то задача на собственные значения (7) модифицируется к виду:

$$\left(M_0 + \hat{V} - \left(\vec{D}\vec{E}\right)\right) \mid \Phi_{\vec{P},J,\mu} >= (M_\Psi + \Delta\varepsilon) \mid \Phi_{\vec{P},J,\mu} >, \tag{9}$$

где $-\left(\vec{D}\vec{E}\right)$ -электрическое дипольное взаимодействие с внешним полем $\vec{E}$, а $\Delta\varepsilon$-поправка к энергии основного состояния, описываемого волновой функцией $\Psi_{\vec{P},J,\mu}$.

3. Методика оценки электрической поляризуемости

В этой части изложим общую методику оценки статической электрической поляризуемости связанной системы. Рассмотрим уравнение

$$\left(\widehat{H}_0 + \Delta\widehat{H}\right)|\Phi\rangle = E\,|\Phi\rangle \quad , \tag{10}$$

где $\widehat{H}_0$ — оператор Гамильтона "невозмущенной"системы, а $\Delta\widehat{H}$ — некоторая малая добавка (оператор возмущения). Предполагаем, также что в отсутствие возмущений (10) имеет вид:

$$\widehat{H}_0\,|\Psi_N\rangle = \varepsilon_N\,|\Psi_N\rangle\,(N = 0, 1, 2, ...)\,. \tag{11}$$

Согласно стационарной теории возмущений значение добавочной энергии к энергии основного состояния ε_0 ищем в виде ряда:

$$E = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon^{(1)} + \Delta\varepsilon^{(2)} + \cdots\,. \tag{12}$$

Соответственно волновая функция также представляется в виде ряда по параметру малости, находящемся в $\Delta\widehat{H}$

$$|\Phi\rangle = |\Psi_0\rangle + |\Delta\Psi\rangle + \cdots . \tag{13}$$

В дальнейшем предположим, что $\Delta\varepsilon^{(1)} = 0$.

В случае, когда $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_{1\leq \ldots} \leq \varepsilon_N$, следуя методике, предложенной в [6] для расчета сил Ван-Дер-Ваальса между атомами водорода, получим нижнюю границу и верхнюю границы энергии взаимодействия

$$\frac{B}{\varepsilon_0 - \varepsilon_1} \leq \Delta\varepsilon^{(2)} \leq \frac{B}{\varepsilon_0 - A/B} \quad , \tag{14}$$

где

$$A = \langle\Psi_0|\, \Delta\widehat{H}\widehat{H}_0\Delta\widehat{H}\,|\Psi_0\rangle\,, \quad B = \langle\Psi_0|\, \Delta\widehat{H}^2\,|\Psi_0\rangle \quad . \tag{15}$$

Для связанных систем, находящихся в однородном стационарном поле напряженностью $\vec{E}$ имеем

$$\Delta\varepsilon^{(2)} \equiv -\alpha_0 \frac{1}{2\overrightarrow{E}^2}. \tag{16}$$

Тогда с учетом (14) определим, что статическая поляризуемость α_0 этой системы лежит пределах:

$$\frac{2B/\vec{E}^2}{A/B - \varepsilon_0} \leq \alpha_0 \leq \frac{2B/\vec{E}^2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}. \tag{17}$$

Сравнительный анализ для связанных систем, где известны аналитические выражения поляризуемости α_0, показывает, что интервал, полученный с помощью (17), соответствует относительной ошибке порядка 11–19%, что соотносится с современными экспериментальными ошибками поляризуемостей адронов.

4. Статическая электрической поляризуемость π^0-мезона

Применим предложенную методику для оценки электрической поляризуемости системы двух бесспиновых кварков (кварк-антикварк) с равными массами m и нулевым угловым моментом (аналог псевдоскалярного π^0-мезона) с Корнельским межкварковым потенциалом:

$$\widehat{V}_c = c + \sigma\,|\overrightarrow{r}| - \frac{4\alpha_s}{3\,|\overrightarrow{r}|}. \tag{18}$$

Уравнение (9) для связанного состояния в этом случае запишется в виде:

$$\left(2\sqrt{k^2+m^2} + \widehat{V}_c - \widehat{e_q}\left(\vec{r}\vec{E}\right)\right)|\Phi\rangle = E\,|\Phi\rangle\,, \tag{19}$$

где $\widehat{e_q}$-оператор электрического заряда кварка q.

Для приближенного решения уравнения без электрического поля используем вариационный принцип с пробными ВФ осцилляторного типа:

$$\Psi_0(\vec{k},\beta) \;=\; \frac{1}{\pi^{3/4}\beta^{3/2}}\exp\left(-\frac{\vec{k}^2}{2\beta^2}\right), \tag{20}$$

$$\Psi_1(\overrightarrow{k},\beta) \;=\; \frac{\sqrt{3/2}}{\pi^{3/4}\beta^{3/2}}\exp\left(-\frac{\vec{k}^2}{2\beta^2}\right)\left(1 - \frac{2\vec{k}^2}{3\beta^2}\right). \tag{21}$$

Параметр β определяется из условия минимизации $\varepsilon_0(\beta)$. С помощью (17) получим, что границы поляризуемости для π^0 с учетом изотопических свойств определяются соотношениями

$$\alpha_0^{up} = \frac{\sqrt{\pi}}{12\beta^3\left(2\sigma/\beta^2 - 8\alpha_s/3 - 6W^2\exp\left(W^2/2\right)K_1\left(W^2/2\right) + 6\sqrt{\pi}U\left(-1/2,-2,W^2\right)\right)}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \alpha_0^{down} &= \frac{\sqrt{\pi}}{12\beta^3\left(3\sigma/\beta^2 - 4\alpha_s/3 + W^2\exp\left(W^2/2\right)b(W) - 18\sqrt{\pi}U\left(-1/2,-2,W^2\right)\right)}, \quad (23)\\ b(W) &= \left[(2W^4+3)K_1\left(W^2/2\right) - 2\left(W^4 - 3W^2\right)K_2\left(W^2/2\right)\right]. \end{aligned}$$

Для численных оценок используем “стандартные” значения для параметров запирания σ и кулоновской части α_s:

$$\sigma = 0.18 \text{ ГэВ}^2, \quad \alpha_s = 0.121, \quad (24)$$

а также для массы u-кварка $m = 0.25$ ГэВ, при котором хорошо описываются в мгновенной форме РГД лептонные распады и среднеквадратичные радиусы псевдоскалярных мезонов (см.[7]). Из требования

$$min\ \varepsilon_0(\beta) = M_{\pi^0} = 0.13456 \text{ ГэВ} \quad (25)$$

получим, что

$$\beta = 0.3434 \text{ ГэВ}, \quad c = -1.3343 \text{ ГэВ}^2. \quad (26)$$

С учетом полученных значений параметров, входящих в определение статической электрической поляризуемости, мы имеем следующую численную оценку:

$$2.00 * 10^{-43}\text{Фм}^3 \le \alpha_0^{\pi^0} \le 3.03 * 10^{-43}\text{Фм}^3. \quad (27)$$

Данное значение является вполне разумным (см.,например, [2]). Отметим, что как и в нерелятивистском случае предложенный метод оценки значения статической электрической поляризуемости дает положительные значения для π^0-мезона.

Литература

[1] A.I. L'vov, *Theoretical aspects of the polarizability of the nucleon,* Int.Journ. Mod. Phys. V.A8, (1993) 5267–5302

[2] В.А. Петрунькин, *Электрическая и магнитная поляризуемости адронов,* ЭЧАЯ. Т.12 вып.3, (1981) 692–753

[3] Н.В.Максименко, С.Г.Шульга, *Эффект релятивистского “дрожания” кварков в электрической поляризуемости мезонов,* ЯФ.Т.56.вып.6, (1993) 201–210

[4] R.N.Lee, A.I.Milstein, M.Schumacher, *Relativistic corrections to the electromagnetic polarizabilities of compound systems,* Preprint Budker INP 99-76; hep-ph/0101240. 1–18

[5] B.D. Keister, W.N.Polyzou, *Relativistic Hamiltonian Dynamics*, Adv. Nucl.Phys. V.20 (1991) 225–483

[6] L.I.Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill book company. New-York-Toronto-London.1955.

[7] А.Ф. Крутов, *Электрослабые свойства легких мезонов,* ЯФ т. 60 N8 (1997) 1443–1450

Гомельский госуниверситет
им. Франциска Скорины
246699 Гомель, Беларусь

Поступило 18.04.2001