Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (126), 2021

УДК 512.813

О сверхразрешимости конечномерных алгебр Ли

А.Ф. Васильев

Пусть L – алгебра Ли над полем P. Подалгебру H алгебры L назовём 1-субнормальной в L, если либо $H = L$, либо существует цепь подалгебр $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = L$ такая, что $\dim H_i - \dim H_{i-1} = 1$ для $i = 1,\ldots,n$. В статье получены новые признаки сверхразрешимости конечномерной алгебры L, обладающих заданной системой 1-субнормальных подалгебр.
Ключевые слова: конечномерная алгебра Ли, сверхразрешимая алгебра Ли, 1-субнормальная подалгебра максимальная подалгебра.

Let L be a Lie algebra over a field P. A subalgebra H of L is called 1-subnormal in L if either $H = L$, or there exists a chain of subalgebras $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = L$ such that $\dim H_i - \dim H_{i-1} = 1$ for $i = 1, \ldots, n$. In this paper we obtain new criteria for supersolvability of a finite-dimensional algebra L with a given system of 1-subnormal subalgebras.
Keywords: finite-dimensional Lie algebra, supersolvable Lie algebra, 1-subnormal subalgebra, maximal subalgebra.

Введение. В работе рассматриваются только конечномерные алгебры Ли над полем P. Одним из основных современных направлений теории конечных групп является изучение классов конечных групп, в частности, формаций. Важным понятием теории классов конечных групп является понятие насыщенной формации. Напомним, что класс **F** конечных групп называется насыщенным, если из $G/\Phi(G) \in \mathbf{F}$ следует, что $G \in \mathbf{F}$, где $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G. Насыщенные формации конечных групп в настоящее время активно применяются при решении различных задач как в самой теории групп, так за ее пределами.

Основы теории насыщенных формаций разрешимых алгебр Ли были заложены в работах Д.В. Барнса и Х.М. Гестайнеу-Хилза [1], Д.В. Барнса и М.Л. Ньювела [2]. Для разрешимой алгебры Ли L пересечение $\Phi(L)$ всех ее максимальных подалгебр является идеалом в L. В случае произвольной алгебры Ли L подалгебра $\Phi(L)$ необязательно является идеалом в L. Поэтому рассматривается наибольший идеал L, содержащийся в $\Phi(L)$, который называется идеалом Фраттини и обозначается $\varphi(L)$. Согласно [1]–[2] формация **F**, состоящая из алгебр Ли, называется насыщенной, если для любой алгебры Ли L из $L/\varphi(L) \in \mathbf{F}$ следует, что $L \in \mathbf{F}$. Примерами насыщенных формаций, состоящих из разрешимых алгебр Ли, являются формации всех нильпотентных, разрешимых и сверхразрешимых алгебр Ли [3]. Напомним, что алгебра Ли L называется сверхразрешимой, если в L имеется ряд идеалов, размерности всех факторов которого равны 1.

Одним из активно развиваемых современных направлений теории конечных групп является распознавание групп и их формаций по вложению заданных систем подгрупп, а также свойствам произведений групп. Хорошо известна теорема Бэра [4] о том, что *конечная группа, являющаяся произведением своих нормальных сверхразрешимых подгрупп, сверхразрешима тогда и только тогда, когда её коммутант нильпотентен*. Аналог этой теоремы для алгебр Ли, в том числе и бесконечномерных, был получен в [5]. В частности, из [5] следует

Теорема 1.1. *Пусть L – алгебра Ли над полем* P. *Если $L = A + B$, где A и B – сверхразрешимые идеалы в L и коммутант L^2 нильпотентен, то L сверхразрешима.*

Другим известным результатом теории групп является теорема Хупперта [4]: *конечная группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда индекс в G всякой максимальной подгруппы G является простым числом*. Аналог данной теоремы для алгебр Ли верен в разрешимом случае [3]:

Теорема 1.2. *Пусть L – разрешимая алгебра Ли над полем* P. *Тогда и только тогда L сверхразрешима, когда* $\dim L - \dim M = 1$ *для любой максимальной подалгебры M алгебры L.*

Пусть **P** – множество всех простых чисел. В [6] было введено понятие **P**-субнормальной подгруппы конечной группы G. Напомним, что подгруппа H конечной группы G называется **P**-субнормальной, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset \ldots \subset H_n = G$, где $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbf{P}$ для $i = 1,\ldots, n$.

В частности, в [6] было показано, что *если группа G является произведением своих* **P**-*субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B и коммутант G′ нильпотентен, то G сверхразрешима.*

Многие результаты о сверхразрешимых группах могут быть сформулированы на языке **P**-субнормальных подгрупп. Например, известная теорема Крамера [4, теорема 3.3] может быть сформулирована следующим образом: *разрешимая группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда всякая максимальная подгруппа G* **P**-*субнормальна в G или содержит подгруппу Фиттинга группы G.*

В данной работе мы (совместно с В.И. Мурашко) вводим следующее определение.

Определение 1.1. Пусть L – алгебра Ли над полем Р. Подалгебру H назовём 1-субнормальной если либо $H = L$, либо существует цепь подалгебр $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = L$ такая, что $\dim H_i - \dim H_{i-1} = 1$ для $i = 1,\ldots,n$.

Целью данной работы является получение аналогов, отмеченных выше результатов для алгебр Ли.

Основные результаты. Используются стандартные определения и обозначения, которые могут быть найдены в [7]. Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 2.1. *Пусть H – 1-субнормальная подалгебра алгебры Ли L над полем* Р. *Если I – идеал L, то $(H + I)/I$ – 1-субнормальная подалгебра L/I.*

Доказательство. Если $H + I = L$, то лемма верна. Предположим, что $H + I \neq L$. Пусть цепь подалгебр $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = L$ удовлетворяет $\dim H_i - \dim H_{i-1} = 1$ для $i = 1,\ldots, n$. Так как $H + I \neq L$, то существует $k \in \{1,\ldots, n\}$ такое, что $(H_k + I)/I \neq (H_{k-1} + I)/I$. Откуда $0 < \dim(H_k + I)/I - \dim(H_{k-1} + I)/I = \dim H_k/(H_k \cap I) - \dim H_{k-1}/(H_{k-1} \cap I) = \dim H_k - \dim(H_k \cap I) - (\dim H_{k-1} - \dim(H_{k-1} \cap I)) = 1 - (\dim(H_k \cap I) - \dim(H_{k-1} \cap I)) \leq 1$. Так как размерность – целое число, то $\dim(H_k + I)/I - \dim(H_{k-1} + I)/I = 1$. Убирая повторения из цепи $(H + I)/I = (H_0 + I)/I \subseteq (H_1 + I)/I \subseteq \ldots \subseteq (H_n + I)/I = L/I$ и повторяя предыдущие рассуждения, получим утверждение леммы.

Лемма 2.2. *Если H – субнормальная подалгебра разрешимой алгебры Ли L над полем* Р, *то H 1-субнормальна в L.*

Доказательство. Так как H – субнормальная подалгебра L, то существует такая цепь подалгебр $H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \ldots \triangleleft H_n = L$, что H_i/H_{i-1} – простая алгебра. Так как L разрешима, то H_i/H_{i-1} одномерна. Тогда по определению H 1-субнормальна в L. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть H – 1-субнормальная подалгебра алгебры Ли L над полем* Р. *Если I – идеал L, то $H \cap I$ – 1-субнормальная подалгебра I.*

Доказательство. Если $H \cap I = I$, то лемма верна. Предположим, что $H \cap I \neq I$. Пусть цепь подалгебр $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = L$ удовлетворяет $\dim H_i - \dim H_{i-1} = 1$ для $i = 1,\ldots, n$. Так как $H \cap I \neq L$, то существует $k \in \{1,\ldots, n\}$ такое, что $H_k \cap I \neq H_{k-1} \cap I$. Откуда $0 < \dim(H_k \cap I) - \dim(H_{k-1} \cap I) = (\dim(H_k \cap I) + \dim H_{k-1} - \dim(H_k \cap H_{k-1} \cap I)) - \dim H_{k-1} = \dim((H_k \cap I) + H_{k-1})) - \dim H_{k-1}$. Из $H_{k-1} \subseteq ((H_k \cap I) + H_{k-1}) \subseteq H_k$ и $\dim H_k - \dim H_{k-1} = 1$, следует $((H_k \cap I) + H_{k-1}) = H_k$. Значит, $\dim(H_k \cap I) - \dim(H_{k-1} \cap I) = 1$. Убирая повторения из цепи $(H \cap I) = (H_0 \cap I) \subseteq (H_1 \cap I) \subseteq \ldots \subseteq (H_n \cap I) = I$ и повторяя предыдущие рассуждения, получим искомое утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть L – алгебра Ли над полем* Р. *Если $L = A + B$, где A и B – 1-субнормальные сверхразрешимые подалгебры Ли и коммутант L^2 нильпотентен, то L – сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, и пусть алгебра L – контрпример наименьшей размерности.

1) $\Phi(L) = 0$. Предположим, что $\Phi(L) \neq 0$. Тогда

$$L/\Phi(L) = (A + \Phi(L))/\Phi(L) + (B + \Phi(L))/\Phi(L).$$

По лемме 2.1 подалгебры $(A + \Phi(L))/\Phi(L)$ и $(B + \Phi(L))/\Phi(L)$ 1-субнормальны в $L/\Phi(L)$. Так как $(L^2 + \Phi(L))/\Phi(L) \subseteq ((L + \Phi(L))/\Phi(L))^2$ и гомоморфным образом сверхразрешимой алгебры Ли является сверхразрешимая алгебра Ли, то подалгебры $(A + \Phi(L))/\Phi(L)$ и $(B + \Phi(L))/\Phi(L)$ сверхразрешимы. Так как $\dim L/\Phi(L) < \dim L$, по нашему предположению $L/\Phi(L)$ сверхразрешима. По [3] L является сверхразрешимой.

2) *В L имеется единственный минимальный идеал* $I = N(L)$. Предположим, что в L имеются два различных минимальных идеала I_1 и I_2. Доказывая по аналогии с 1), получаем, что L/I_i сверхразрешима для $i = 1, 2$. Так как класс всех сверхразрешимых алгебр образует формацию, то $L \cong L/(I_1 \cap I_2)$ является сверхразрешимой алгеброй Ли, что противоречит нашему утверждению. Поэтому в L имеется единственный минимальный идеал I. Так как коммутант L^2 нильпотентен, то L разрешима. Откуда следует, что идеал I абелев. Из $\Phi(L) = 0$ и теоремы 1.9.7 [7] следует, что $I = N(L)$, где $N(L)$ – нидь-радикал L. Так как всякая абелева алгебра Ли сверхразрешима, имеем $I = N(L) = L^2$.

3) $A + I \neq L \neq B + I$. Не теряя общности рассуждений, предположим, что $A + I = L$. Заметим, что $A \cap I$ является идеалом A. Так как идеал I абелев, $A \cap I$ является идеалом I. Из $A \neq L$ следует, что $A \cap I = 0$. Предположим, что A не является максимальной подалгеброй L. Тогда A содержится в максимальной подалгебре H алгебры L. Из $H + I = L$ по аналогии с предыдущим рассуждениями заключаем, что $H \cap I = 0$. Так как алгебра L конечномерна, получаем противоречие $H = A$. Значит, A – максимальная подалгебра алгебры L. Так как A 1-субнормальна, имеем $\dim L = \dim A + 1$. Это значит, что $\dim I = 1$. Отсюда и из сверхразрешимости A следует, что в L имеется ряд иделов, у которого факторы имеют размерность 1. По определению L сверхразрешима. Значит, $A + I \neq L$.

4) *Подалгебры $A + I$ и $B + I$ являются сверхразрешимыми идеалами L.* Так как $A + I$ – подалгебра в L, то $(A + I)^2 \subseteq L^2$ и, следовательно, подалгебра $(A + I)^2$ абелева. В частности, $(A + I)^2$ нильпотентна. Так как $A + I$ разрешима и I – идеал в $A + I$, то I – 1-субнормальная подалгебра в $A + I$ по лемме 2.2. Так как $I = L^2$, то $A + I$ – идеал L. Следовательно, A – 1-субнормальная подалгебра в $A + I$ лемме 2.3. Так как $\dim(A + I) < \dim L$, для $A + I$ теорема 2.1 верна. Значит, алгебра $A + I$ сверхразрешима.

5) *Заключительное противоречие*. Заметим, что алгебра L удовлетворяет условиям теоремы 1.1, а значит, сверхразрешима. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 2.1. *Пусть L – алгебра Ли над полем* P. *Если $L = A + B$, где A – нильпотентный идеал L, а B –* 1-*субнормальная сверхразрешимая подалгебра Ли, то L сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно. Пусть алгебра L – контрпример наименьшей размерности. По аналогии с шагами 1) и 2) предыдущей теоремы заключаем, что $\Phi(L) = 0$ и в L имеется единственный минимальный идеал I. Так как A – нильпотентный идеал L, то $I \subseteq A$. Откуда и из $\Phi(L) = 0$ заключаем, что $I = A$. Так как идеал I абелев, B – максимальная подалгебра L (см. шаг 3) предыдущей теоремы). Из 1-субнормальности B заключаем, что $\dim I = 1$. Так как $L/I \cong B$ – сверхразрешимая алгебра и $\dim I = 1$, алгебра L сверхразрешима. Получили противоречие.

Напомним, что группа $G = AB$ называется произведением взаимно sn-перестановочных подгрупп A и B, если A перестановочна со всякой субнормальной подгруппой подгруппы B, а B перестановочна со всякой субнормальной подгруппой подгруппы A [8]. Аналогичные ситуации могут быть рассмотрены и в случае алгебр Ли. Нам потребуется следующее предложение.

Предложение 2.1. *Пусть L – алгебра Ли над полем* P. *Если $L = A + B$, где A – разрешимая подалгебра L, а сумма подалгебры B и произвольной субнормальной подалгебры из A есть подалгебра L, то подалгебра B* 1-*субнормальна в L.*

Доказательство. Будем вести доказательство по $\dim L$. Если $\dim L \leq 1$, то предложение верно. Можно считать, что $\dim A > 1$ и $B \neq L$. Так как подалгебра A разрешима, то в A найдётся ряд подалгебр $0 = A_0 \lhd \ldots \lhd A_n = A$ такой, что алгебра A_i/A_{i-1} является простой, а значит, одномерной. Из $B \neq L$ следует, что найдётся такое $j \in \{1,\ldots,n\}$, что $(B + A_{j-1}) \neq (B + A_j)$. Выберем наибольшее j, для которого $(B + A_{j-1}) \neq (B + A_j) = L$. Заметим, что $(B + A_{j-1})$ – подалгебра согласно условию. По предположению индукции B 1-субнормальна в $B + A_{j-1}$. $0 < \dim(A_j + B) - \dim(A_{j-1} + B) = \dim A_j - \dim A_{j-1} - (\dim(A_j \cap B) - \dim(A_{j-1} \cap B)) \leq 1$. Откуда заключаем, что $1 = \dim(A_j + B) - \dim(A_{j-1} + B) = \dim L - \dim(A_{j-1} + B)$. Значит, B 1-субнормальна в L.

Следствие 2.2. *Пусть L – алгебра Ли над полем* P, *являющаяся суммой сверхразрешимых подалгебр A и B. Если сумма подалгебры A и произвольной субнормальной подалгебры из B есть подалгебра L, а сумма подалгебры B и произвольной субнормальной подалгебры из A есть подалгебра L и подалгебра L^2 нильпотентна, то L сверхразрешима.*

Доказательство. Следует из теоремы 2.1 и предложения 2.1.

Пример 2.1. Пусть L – трёхмерная алгебра Ли над полем из двух элементов и пусть a, b, c – её базис: $[a, c] = a$, $[b, c] = b$, $[a, b] = c$. Данная алгебра является простой. Пусть $A = \langle a, c\rangle$ и $B = \langle b, c\rangle$. Заметим, что A и B – сверхразрешимые 1-субнормальные подалгебры L и $L = A + B$. Но L не сверхразрешима. Значит, условие нильпотентности коммутанта в теореме 2.1 не может быть опущено. Более того, L является неразрешимой алгеброй Ли, представимой в виде суммы двух разрешимых 1-субнормальных подалгебр. Как показано в работе [6], конечная группа разрешима, если она представима в виде произведения своих **P**-субнормальных разрешимых подгрупп. Значит, аналог данного результата для алгебр Ли неверен.

Лемма 2.4. *Пусть I – минимальный идеал алгебры Ли L над полем* P. *Если* $\dim I = 1$, *то L^2 лежит в централизаторе I.*

Доказательство. Пусть a – элемент базиса I и $b, c \in L$. Тогда существуют $\alpha, \beta \in$ P такие, что $[a, b] = \alpha a$ и $[a, c] = \beta a$. Имеем $0 = [a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] = [a, [b, c]] + \alpha[c, a] - - \beta[b, a]] = [a, [b, c]]$. То есть $[b, c]$ принадлежит централизатору I. Ввиду произвольности выбора b и c получаем, что L^2 лежит в централизаторе I.

Теорема 2.2. *Пусть L – разрешимая алгебра Ли над полем* P. *Если всякая максимальная подалгебра M алгебры L или* 1*-субнормальна в L или содержит $N(L)$, то L сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть теорема неверна и алгебра Ли L является контрпримером наименьшей размерности. Если $\Phi(L) \neq 1$, то для алгебры $L/\Phi(L)$ условия теоремы выполнены согласно теореме 1.9.7 [7]. Значит, $L/\Phi(L)$ сверхразрешима. По [3] L сверхразрешима. Получили противоречие.

Значит, $\Phi(L) = 0$. Тогда $N(L)$ есть прямая сумма минимальных идеалов I_i. Так как $\Phi(L) = 0$, для любого I_i найдётся максимальная подалгебра M_i такая, что $L = M_i + I_i$ и $M_i \cap I_i = 0$. По предположению теоремы $\dim I_i = 1$. По лемме 2.4 L^2 лежит в централизаторе I_i. Значит, L^2 лежит в централизаторе $N(L)$. По [8] $L^2 \subseteq N(L)$. Значит, всякая максимальная подалгебра M, содержащая $N(L)$, является идеалом в L, а значит, 1-субнормальна в L. По [3] получаем, что L сверхразрешима. Данное противоречие и завершает доказательство теоремы.

Заключение. В работе [11] Д. Тауэрс показал, что существуют несверхразрешимые алгебры Ли L, у которых каждая максимальная подалгебра является 1-субнормальной в L.

Теорема 3.1 [11]. *Пусть L – алгебра Ли над полем P, причем, число элементов поля P не меньше* $\dim L$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) *Каждая максимальная подалгебра M* алгебры *G имеет коразмерность 1 в L.*

(ii) *$L/\gamma(L) = S \oplus R$, где $S = S_1 \oplus \cdot \cdot \oplus S_n$, и S_i является простым идеалом $L/\gamma(L)$ изоморфным $L_1(0)$ для каждого $1 \leq i \leq n$, или равным* 0, *и R является сверхразрешимым идеалом в $L/\gamma(L)$ (возможно, равным* 0*).*

Обозначим через U* (U#) класс всех алгебр Ли, у которых каждая (максимальная) подалгебра является 1-субнормальной в L.

Проблема 3.2. Описать свойства замыкания классов U* (U#) в смысле работы [12]. Найти аналоги теорем 2.1 и 2.2 для классов U* (U#).

Литература

1. Barnes, D. W. On the Theory of Soluble Lie Algebras / D. W. Barnes, H. M. Gastineau-Hills // Math. Z. – 1968. – V. 106. – P. 343–354.

2. Barnes, D. W. Some Theorems on Saturated Homomorphs of Soluble Lie Algebras / D. W. Barnes, M. L. Newell // Math. Z. – 1970. – V. 115. – P. 179–187.

3. Barnes, D. W. On the cogomology of soluble Lie algebras / D. W. Barnes // Math. Z. – 1967. – V. 101. – P. 343–349.

4. Between Nilpotent and Soluble / H. G. Bray [et al.] ; ed. M. Weinstein. – Passaic : Polygonal Publishing House, 1982. – 240 p.

5. Kashiwagi, Y. Supersoluble Lie algebras / Y. Kashiwagi // Hirosima Math. J. – 1984. – V. 14. – P. 575–595.

6. Васильев, А. Ф. О произведениях **P**-субнормальных подгрупп в конечных группах / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.

7. Бахтурин, Ю. А. Тождества в алгебрах Ли / Ю. А. Бахтурин. – М. : Наука, 1985. – 448 с.

8. Alejandre, M. On some permutable products of supersoluble groups / A. Alejandre, A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, M. Pedraza-Aguilera // Rev. Mat. Iberoamericana. – 2004. – V. 20. – P. 413–425.

9. Stewart, I. Bounds for the dimensions of certan Lie algebras / I. Stewart // J. London Math. Soc. – 1971. – V. 2, № 3. – P. 731–732.

10. Васильев, А. Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

11. Towers, D. Maximal subalgebras of Lie algebras containing Engel subalgebras / D. Towers // Journal of Pure and Applied Algebra. – 2012. – V. 216. – P. 688–693.

12. Gutierrez, I. S. Classes of algebras and closure operation / I. S. Gutierrez, A. Torresblanca-Badillo, D. A. Towers // Communications in Algebra. – 2020. – V. 49, № 6. – P. 1–15.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 20.04.2021