Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (126), 2021

УДК 517.538.5

Асимптотические свойства тригонометрических аппроксимаций Паде

А.П. Старовойтов[1], Е.П. Кечко[1], А.Ф. Касабуцкий[2]

Для тригонометрической аппроксимации Паде $\pi^t_{n,m}(x;h_\gamma)$ функции $h_\gamma=\sum_{k=0}^{\infty}(\sin kx+\cos kx)/(\gamma)_k$, где $(\gamma)_k=\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)$ найдена асимптотика убывания разности $h_\gamma(x)-\pi^t_{n,m}(x;h_\gamma)$ в случае, когда $0\le m\le m(n)$, $m(n)=o(n)$ и $n\to\infty$.

Ключевые слова: аппроксимации Паде, асимптотические равенства, наилучшие равномерные приближения, тригонометрические аппроксимации.

For trigonometric Padé approximation $\pi^t_{n,m}(x;h_\gamma)$ of the function $h_\gamma=\sum_{k=0}^{\infty}(\sin kx+\cos kx)/(\gamma)_k$, where $(\gamma)_k=\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)$ the asymptotic behavior of the decrease in the difference $h_\gamma(x)-\pi^t_{n,m}(x;h_\gamma)$ was found in case, when $0\le m\le m(n)$, $m(n)=o(n)$ and $n\to\infty$.

Keywords: Padé approximations, asymptotic equalities, best uniform approximation, trigonometric Padé approximations.

Введение. Пусть $f\in C_{2\pi}$, т. е. является вещественной непрерывной 2π-периодической функцией, представимой на прямой своим рядом Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{1}$$

где коэффициенты Фурье a_k и b_k – действительные числа.

Через $\mathcal{R}^t_{n,m}$ обозначим класс всех рациональных тригонометрических функций

$$r^t(x)=\frac{p^t_n(x)}{q^t_m(x)},$$

где $p^t_n(x)$, $q^t_m(x)$ – тригонометрические многочлены с действительными коэффициентами и $\deg p^t_n\le n$, $\deg q^t_m\le m$. Определим наилучшие равномерные рациональные тригонометрические приближения f в классе $\mathcal{R}^t_{n,m}$, полагая

$$R^t_{n,m}:=\inf\left\{\| f-r^t\| : r^t\in\mathcal{R}^t_{n,m}\right\},$$

а $\| g\|=\max_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|$.

Тригонометрической аппроксимацией Паде функции f, заданной рядом (1), назовем такую непрерывную на $\mathbb{R}$ рациональную дробь $\pi^t_{n,m}(x)$ из класса $\mathcal{R}^t_{n,m}$, которая представима своим рядом Фурье и имеет максимально возможный (по числу свободных параметров) порядок касания к ряду (1), т. е.

$$f(x)-\pi^t_{n,m}(x)=\sum_{k=n+m+1}^{\infty}(\tilde{a}_k\cos kx+\tilde{b}_k\sin kx),$$

где $\tilde{a}_k$, $\tilde{b}_k$ – действительные числа. Заметим, что в случае произвольного ряда Фурье (1) тригонометрические аппроксимации Паде могут не существовать (см. [1]).

Пусть параметр $\gamma\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_-=\{0,-1,-2,\ldots\}$. Рассмотрим семейство функций $\mathcal{H}^t=\{h_\gamma\}$, представимых в виде

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$h_\gamma(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin kx+\cos kx}{(\gamma)_k}.$$

В данной работе исследуется поведение тригонометрических аппроксимаций Паде функции h_γ. В частности, найдена асимптотика убывания разности $h_\gamma-\pi^t_{n,m}(x;h_\gamma)$, а также описаны асимптотики поведения величин $R^t_{n,m}(h_\gamma)$ при $n+m\to\infty$. При более ограничительных условиях аналогичные результаты ранее были получены в работе [2]. Предложенный нами метод доказательства существенно отличается от метода работы [2]. Заметим также, что близкие по содержанию результаты были получены в работах [3]–[5] для функций

$$G_\gamma=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos kx}{(\gamma)_k}\quad \text{и}\quad H_\gamma=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{(\gamma)_k}.$$

Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $h_\gamma\in\mathcal{H}^t$. Тогда для любых целых неотрицательных n и m тригонометрические аппроксимации Паде $\pi^t_{n,m}(z;h_\gamma)$ существуют и равномерно по всем $x\in\mathbb{R}$ и m, $n\ge m-1$, при $n\to\infty$*

$$h_\gamma-\pi^t_{n,m}(z;h_\gamma)=\frac{(-1)^m m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}\operatorname{Re}\left\{(1-i)e^{2mz/(n+m)}z^{n+m+1}(1+o(1))\right\}.$$

Доказательство. Рассмотрим алгебраические аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(z;F_\gamma)$ функций Миттаг-Леффлера

$$F_\gamma(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(\gamma)_k}.$$

В работе [6] доказано, что при $\gamma\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-$ для целых неотрицательных n и m аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(z;F_\gamma)$ существуют и являются рациональными дробями вида

$$\pi_{n,m}(z)=\pi_{n,m}(z;F_\gamma)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{n}p_kz^k}{\sum_{k=0}^{m}q_kz^k},$$

где $p_k,q_k\in\mathbb{R}$ и равномерно по всем $|z|\le 1$ и m, $n\ge m-1$ и при $n\to\infty$

$$F_\gamma(z)-\pi_{n,m}(z;F_\gamma)=\frac{(-1)^m m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}e^{2mz/(n+m)}z^{n+m+1}(1+o(1)).\tag{2}$$

Доказательство теоремы 1 опирается на следующую лемму (см. [7, с. 345]).

Лемма. *Пусть*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Положим $c_k=a_k-ib_k$ (i – мнимая единица), и рассмотрим функцию

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k.$$

Тогда при $z=e^{ix}$ функция $f(x)=\operatorname{Re}\{F(z)\}$, а

$$\operatorname{Re}\{\pi_{n,m}(z;F)\}=$$

$$=\frac{\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\left\{\operatorname{Re}(p_j\overline{q}_k)\cos(j-k)x-\operatorname{Im}(p_j\overline{q}_k)\sin(j-k)x\right\}}{\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\left\{\operatorname{Re}(q_j\overline{q}_k)\cos(j-k)x-\operatorname{Im}(q_j\overline{q}_k)\sin(j-k)x\right\}},$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

где числитель и знаменатель $\pi_{n,m}(z;F)$ *имеют вид*

$$P_n(z;F)=\sum_{j=0}^{n} p_j z^j,\ Q_m(z;F)=\sum_{j=0}^{m} q_j z^j.$$

Возьмем в лемме 1 в качестве $f(x)$ функцию $h_\gamma(x)$. Тогда при $z=e^{ix}$

$$h_\gamma(x)=\operatorname{Re}\left\{(1-i)F_\gamma(z)\right\},$$

а (3) примет вид

$$\operatorname{Re}\left\{\pi_{n,m}(z;(1-i)F_\gamma)\right\}=\frac{\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} p_j q_k[\cos(j-k)x+\sin(j-k)x]}{\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} q_j q_k \cos(j-k)x}. \tag{4}$$

Умножая правую и левую части (2) на $(1-i)$, а затем, выделяя из них действительные части, при $z=e^{ix}$ получим

$$h_\gamma(x)-\operatorname{Re}\left\{\pi_{n,m}(z;(1-i)F_\gamma)\right\}=\frac{(-1)^m m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}\operatorname{Re}\left\{(1-i)e^{2mz/(n+m)}z^{n+m+1}(1+o(1))\right\}.$$

Из представления (4) и последнего равенства следует, что

$$\pi^t_{n,m}(x;h_\gamma)=\operatorname{Re}\left\{\pi_{n,m}(z;(1-i)F_\gamma)\right\}.$$

Теорема 1 доказана.

Напомним, что бесконечно малые (б.м.) величины $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ называются эквивалентными ($\alpha_n\sim\beta_n$), если $\alpha_n/\beta_n\to 1$ при $n\to\infty$. Если существуют положительные постоянные A и B, для которых $A\alpha_n\le\beta_n\le B\alpha_n$, при $n=0,1,2,\ldots$, то говорят, что б.м. α_n и β_n имеют одинаковый порядок при $n\to\infty$ ($\alpha_n\asymp\beta_n$).

Теорема 2. *Пусть* $h_\gamma\in\mathcal{H}^t$. *Тогда если* $m(n)=o(n)$, *то равномерно по всем* m, $0\le m\le m(n)$, *при* $n\to\infty$

$$R^t_{n,m}(h_\gamma)\sim\|h_\gamma-\pi^t_{n,m}(\cdot;h_\gamma)\|\sim\frac{\sqrt{2}\,m!|(\gamma)_n|}{|(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}|}.$$

Равномерно по всем m, $n\ge m-1$ *и* $n\to\infty$

$$R^t_{n,m}(h_\gamma)\asymp\|h_\gamma-\pi^t_{n,m}(\cdot;h_\gamma)\|\asymp\frac{\sqrt{2}\,m!|(\gamma)_n|}{|(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}|}.$$

Доказательство. Предположим, что $m(n)=o(n)$ и $0\le m\le m(n)$. Тогда из теоремы 1 следует, что

$$h_\gamma-\pi^t_{n,m}(x;h_\gamma)=\frac{(-1)^m m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}\operatorname{Re}\left\{(1-i)e^{i(n+m+1)x}(1+o(1))\right\}. \tag{5}$$

Пусть

$$\varphi(x)=\frac{(-1)^m m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}(1-i)e^{i(n+m+1)x}.$$

В дальнейших рассуждениях будем учитывать, что $(1-i)e^{i(n+m+1)x}=\cos(n+m+1)x+$ $+\sin(n+m+1)x-i[\cos(n+m+1)x-\sin(n+m+1)x]$. Опираясь на (5) легко показать, что при достаточно больших n знак разности $h_\gamma(x)-\pi^t_{n,m}(x;h_\gamma)$ совпадает со знаком $\operatorname{Re}\varphi(x)$. Когда x пробегает весь промежуток $[0,2\pi)$, точка $(n+m+1)x$ пробегает весь полуинтервал $[0,2\pi(n+m+1))$. Поэтому существуют $2(n+m+1)$ таких действительных чисел x_j, $j=\overline{1,2(n+m+1)}$, что

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{2(n+m+1)} < 2\pi,$$

$$\varphi(x_j) = \frac{(-1)^{m+j-1}\sqrt{2}\, m!\, (\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}.$$

Следовательно, в точках x_j разность $h_\gamma(x_j) - \pi^t_{n,m}(x;h_\gamma)$ принимает значения с чередующимися знаками. В таком случае, согласно рациональному аналогу известной теоремы Валле Пуссена (см., например, [8]),

$$R^t_{n,m}(h_\gamma) \ge \min_{1\le j\le 2(n+m+1)} |\, h_\gamma(x_j) - \pi^t_{n,m}(x_j;h_\gamma)\,| \ge \frac{\sqrt{2}\, m!\,|\,(\gamma)_n\,|}{|\,(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}\,|}(1-|\,o(1)\,|).$$

С другой стороны

$$R^t_{n,m}(h_\gamma) \le \max_{x\in\mathbb{R}} |\, h_\gamma(x) - \pi^t_{n,m}(x;h_\gamma)\,| \le \frac{\sqrt{2}\, m!\,|\,(\gamma)_n\,|}{|\,(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}\,|}(1+|\,o(1)\,|).$$

Таким образом, первая часть теоремы 2 доказана. Вторая её часть доказывается аналогично.

Заключение. Теоремы 1 и 2 при более ограничительных условиях $m(n) = o(n^{2/3})$ ранее были доказаны в работе [2]. Метод работы [2] опирается на детерминантные представления числителя и знаменателя дроби Паде $\pi^t_{n,m}(x)$, которые были получены в [1], в то время как приведенные доказательства теорем 1 и 2 основаны на связи алгебраических и тригонометрических аппроксимаций Паде.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

Литература

1. Лабыч, Ю. А. Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье / Ю. А. Лабыч, А. П. Старовойтов // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 7. – С. 107–130.

2. Лабыч, Ю. А. Об асимптотике поведения тригонометрических аппроксимаций Паде одного класса функций / Ю. А. Лабыч, А. П. Старовойтов // Вестник ГрДУ імя Я.Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і ўпраўленне. Біялогія. – 2009. – № 1 (77). – С. 78–88.

3. Лабыч, Ю. А. О рациональной аппроксимации периодических функций / Ю. А. Лабыч // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2009. – № 3. – С. 77–86.

4. Лабыч, Ю. А. Приближение непрерывных функций рациональными дробями Паде-Чебышева / Ю. А. Лабыч, А. П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 69–78.

5. Старовойтов, А. П. Аппроксимации Паде специальных функций / А. П. Старовойтов, Н. А. Старовойтова, Н. В. Рябченко // Український математичний вісник. – 2012. – Т. 9, № 2. – С. 246–258.

6. Старовойтов, А. П. Аппроксимации Эрмита-Паде функций Миттаг-Леффлера / А. П. Старовойтов, Н. А. Старовойтова // Математический сборник. – 2007. – Т. 198, № 7. – С. 109–122.

7. Бейкер, Дж. мл. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М. : Мир, 1986. – 502 с.

8. Lorentz, G. G. Constructive Approximation, Advanced problems / G. G. Lorentz, M. v Golitschek, Y. Makovoz. – New York, Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1996. – 651 p.

[1]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

[2]Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Поступила в редакцию 14.04.2021

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ