ФИЗИКА

УДК 539.12

ВЫЧИСЛЕНИЕ СЕЧЕНИЯ КАСКАДНОЙ РЕАКЦИИ $2 \to 4$ МЕТОДОМ БАЗИСНЫХ СПИНОРОВ

В.В. Андреев

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

CALCULATION OF THE SECTION OF THE $2 \to 4$ CASCADE REACTION BY THE BASIS SPINOR METHOD

V.V. Andreev

Francisk Skorina Gomel State University

Рассмотрена общая методика вычисления каскадных процессов в рамках улучшенного приближения узких резонансов. Учтены возможные экспериментальные ограничения на углы вылета конечных и промежуточных частиц. Важной отличительной чертой методики является использование пуанкаре-инвариантных спиральностей для конечных частиц каскадной реакции и метода базисных спиноров. В итоге сечение каскадного процесса $ab \to cd \to 12+34$ имеет компактную форму.

Ключевые слова*: бинарная реакция, диаграмма Фейнмана, сечение, спиральность, парциальная ширина, распад.*

A general technique for calculating cascade processes in the framework of narrow resonances' improved approximation is considered. Possible experimental restrictions on the emission angles of final and intermediate particles were taken into account. An important distinguishing feature of the technique is the usage of the Poincaré-invariant helicities for the final particles of the cascade reaction, as well as the method of basis spinors. As a result, the section of the cascade process $ab \to cd \to 12+34$ has a compact form.

Keywords*: binary reaction, Feynman diagram, cross section, helicity, partial width, decay.*

Введение

Очень часто в ядерной физике и физике элементарных частиц встречается ситуация, когда в результате взаимодействия в конечном состоянии возникают нестабильные частицы, которые практически сразу распадаются. Такие реакции часто называют каскадными. Например, реакция образования пары $W^{\pm}$-бозонов в кварк-кварковых столкновениях

$$\mathrm{q}_i\overline{\mathrm{q}}_j \to \mathrm{W}^+\mathrm{W}^- \to \ell\overline{\nu}_{\ell}\overline{\ell}'\nu_{\ell'}$$

протекает в два этапа, поскольку рожденные W-бозоны являются нестабильными частицами и могут распадаться в пару лептонов (или кварков).

Для получения сечения каскадных реакций используют приближение узкой ширины для промежуточных нестабильных частиц. В этом случае необходимо вычислить сечения, которые требует расчета матричных элементов реакций $\mathrm{q}_i\overline{\mathrm{q}}_j \to \mathrm{W}^+\mathrm{W}^-$ и $\mathrm{W}^- \to \ell\nu_{\ell}$, $\mathrm{W}^+ \to \overline{\ell}'\nu_{\ell'}$. При этом все матричные элементы должны быть вычислены в одной системе отсчета, например в системе центра инерции $q\overline{q}$-пары.

Однако лоренц-инвариантные фазовые объемы намного проще интегрировать в системе покоя WW-бозонов. Следовательно, необходимо рассчитать матричный элемент распада движущего WW-бозона в терминах неинвариантных величин системы его покоя. Так, в работе [1] такая задача для безмассовых конечных фермионов решалась стандартным образом. Все структуры матричных элементов преобразовались с помощью преобразования Лоренца от движущейся системы к системе покоя. При этом квадратичные комбинации матричных элементов приобретали достаточно громоздкий вид.

В работе предлагается получать компактные выражения для сечений каскадных реакций, используя специальное представление матричных элементов, а также состояния с пуанкаре-инвариантными спиральностями, которые были введены в работах [2], [3]. Кроме этого, для того, чтобы учесть экспериментальные ограничения на кинематические переменные конечных частиц, образующихся в каскадных реакциях, в работе будет использовано улучшенное приближение узкой ширины (см., например, [1]).

1 Сечение каскадного процесса $ab \to cd \to 12+34$

Рассмотрим каскадную реакцию

$$ab \to cd \to 12+34\,, \qquad (1.1)$$

где частицы c и d являются нестабильными и распадаются по каналам: $c \to 12$ и $d \to 34$. Частицы a,b,c,d и $1,2,3,4$ характеризуются 4-импульсами p_a, p_b, p_c, p_d и k_1, k_2, k_3, k_4, а также спиральностями (проекциями спина) λ_a, λ_b, λ_c, λ_d и $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ соответственно.

© Андреев В.В., 2021

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Для описания такой реакции (1.1) удобно ввести следующие обозначения

$$k_{ij} = k_i + k_j,\ s = \left(p_a + p_b\right)^2,$$

$$s_{12} = \left(k_1 + k_2\right)^2,\ s_{34} = \left(k_3 + k_4\right)^2.$$

Матричный элемент реакции (1.1) допускает факторизацию в виде (см., например, [4])

$$\mathcal{M}^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_1,\lambda_2;\lambda_3,\lambda_4}(ab \to cd \to 1234) =$$

$$= \left(s_{12} - m_c^2 + \mathrm{i}\, m_c\Gamma_c\right)^{-1}\left(s_{34} - m_d^2 + \mathrm{i}_d\Gamma_d\right)^{-1} \times$$

$$\times \sum_{\lambda_d} \mathcal{M}^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}(ab \to cd)\mathcal{M}^{\lambda_c}_{\lambda_1,\lambda_2}(c \to 12)\mathcal{M}^{\lambda_d}_{\lambda_3,\lambda_4}(d \to 34),$$

где $\Gamma_{c,d}$ – полные ширины распадов нестабильных частиц c и d. В данном подходе нестабильные частицы трактуются так же, как виртуальные частицы, находящиеся вне массовой оболочки при $s \neq m^2 - \mathrm{i}\,\Gamma$.

Используя улучшенное приближение узкой ширины для промежуточных состояний c и d, получим сечение вида

$$\mathrm{d}\sigma\left(ab \to 12 + 34\right) = \\ = \mathrm{BR}\left(c \to 12\right)\mathrm{BR}\left(d \to 34\right) \times \tag{1.2}$$

$$\times \sum_{\lambda_c,\lambda_c'}\sum_{\lambda_d,\lambda_d'} T^{\lambda_c,\lambda_c'}_{\lambda_d,\lambda_d'}(ab \to cd)T_{\lambda_c,\lambda_c'}(c \to 12)T_{\lambda_d,\lambda_d'}(d \to 34),$$

где функции, связанные с рождением частиц c, d и распадами $c \to 12$, $d \to 34$, определены соотношениями:

$$T^{\lambda_c,\lambda_c'}_{\lambda_d,\lambda_d'}(ab \to cd) = \\ = \int \mathrm{dLips}\left(s; p_c, p_d\right) R^{\lambda_c,\lambda_c'}_{\lambda_d,\lambda_d'}(ab \to cd), \tag{1.3}$$

$$R^{\lambda_c,\lambda_c'}_{\lambda_d,\lambda_d'}(ab \to cd) = \\ = \frac{1}{\left(2S_a+1\right)\left(2S_b+1\right)}\frac{1}{4\sqrt{\left(p_a p_b\right)^2 - m_a^2 m_b^2}} \times \\ \times \sum_{\lambda_a,\lambda_b} \mathcal{M}^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}(ab \to cd)\mathcal{M}^{*\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c',\lambda_d'}(ab \to cd), \tag{1.4}$$

$$T_{\lambda_c,\lambda_c'}(c \to 12) = \\ = \int \mathrm{dLips}\left(m_c; k_1, k_2\right) R_{\lambda_c,\lambda_c'}(c \to 12), \tag{1.5}$$

$$R_{\lambda_c,\lambda_c'}(c \to 12) = \tag{1.6}$$

$$= \frac{1}{2m_c\Gamma(c \to 12)}\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\mathcal{M}^{\lambda_c}_{\lambda_1,\lambda_2}(c \to 12)\mathcal{M}^{*\lambda_c'}_{\lambda_1,\lambda_2}(c \to 12),$$

$$T_{\lambda_d,\lambda_d'}(d \to 34) = \\ = \int \mathrm{dLips}\left(m_d; k_3, k_4\right) R_{\lambda_d,\lambda_d'}(d \to 34), \tag{1.7}$$

$$R_{\lambda_d,\lambda_d'}(d \to 34) = \frac{1}{2m_d\Gamma(d \to 34)} \times \tag{1.8}$$

$$\times \sum_{\lambda_3,\lambda_4}\mathcal{M}^{\lambda_d}_{\lambda_3,\lambda_4}(d \to 34)\mathcal{M}^{*\lambda_d'}_{\lambda_3,\lambda_4}(d \to 34).$$

Функции $\mathrm{BR}\left(c \to 12\right) = \Gamma\left(c \to 12\right)/\Gamma_c$ и $\mathrm{BR}\left(d \to 34\right) = \Gamma\left(d \to 34\right)/\Gamma_d$ определяют относительные вероятности распадов (бренчинги) частиц c и d. Все 4-импульсы в (1.2) принадлежат массовой поверхности, т. е. $p_c^2 = (k_1 + k_2)^2 = m_c^2$, $p_d^2 = (k_3 + k_4)^2 = m_d^2$ и $k_i^2 = m_i^2$, $i = 1,\ldots,4$.

Функция dLips задает лоренц-инвариантный фазовый объем (см. [4], [5]), бесконечно малый элемент которого в фазовом пространстве n вторичных частиц записывают в виде

$$\mathrm{dLips}\left(P^2; k_1,\ldots,k_n\right) = \\ = \left(2\pi\right)^4 \delta^{(4)}\left(P - \left(k_1 + \ldots + k_n\right)\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3k_i}{\left(\left(2\pi\right)^3 2E_i\right)}.$$

Если в уравнении (1.2) интегрирование производится по всему фазовому объему для конечных частиц 1, 2 и 3, 4, то будут выполняться соотношения [4]:

$$\int R_{\lambda_c,\lambda_c'}(c \to 12)\mathrm{dLips}\left(M_c; k_1, k_2\right) = \delta_{\lambda_c,\lambda_c'}, \\ \int R_{\lambda_d,\lambda_d'}(d \to 34)\mathrm{dLips}\left(M_d; k_3, k_4\right) = \delta_{\lambda_d,\lambda_d'}. \tag{1.9}$$

Тогда сечение (1.2) трансформируется к виду, который получают в обычном приближении узкой ширины. Экспериментальные ограничения приводят к тому, что интегрирование происходит не во всем фазовом пространстве и поэтому уравнения (1.9) не выполняются.

Таким образом, для того чтобы вычислить сечение (1.2), необходимо произвести расчет матричных элементов процессов $ab \to cd$, $c \to 12$ и $d \to 34$ и их билинейных комбинаций с последующим интегрированием.

2 Методика вычисления каскадного процесса

Для того, чтобы получить компактную запись этого сечения, расчет ингредиентов сечения (1.1) проведем в системе центра инерции частиц a и b.

2.1 *Вычисление матричных элементов реакции* $ab \to cd$

На первом этапе в сечении (1.1) трансформируем величину (1.3) к удобному для интегрирования по фазовому пространству бинарной реакции $ab \to cd$ виду.

Применяя соотношение для лоренц-инвариантного фазового объема в системе центра инерции частиц ab

$$\mathrm{dLips}\left(s; p_c, p_d\right) = \\ = \frac{\lambda^{1/2}\left(M_{cd}^2, m_c^2, m_d^2\right)}{2\left(4\pi\right)^2 M_{cd}^2}\delta\left(\sqrt{s} - M_{cd}\right)\mathrm{d}M_{cd}\mathrm{d}\Omega,$$

$$M_{cd}^2 = (p_c + p_d)^2$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

получаем, что функция (1.3) преобразуется к виду

$$T^{\lambda_c,\lambda_c'}_{\lambda_d,\lambda_d'}(ab \to cd) = \\ = \frac{1}{(2S_a+1)(2S_b+1)} \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{\lambda^{1/2}\left(s,m_c^2,m_d^2\right)}{\lambda^{1/2}\left(s,m_a^2,m_b^2\right)} \times \\ \times \sum_{\lambda_a,\lambda_b} \int \sin\theta d\theta d\phi \mathcal{M}_{\lambda_a,\lambda_b;\lambda_c,\lambda_d}(ab \to cd) \times \\ \times \mathcal{M}^*_{\lambda_a,\lambda_b;\lambda_c',\lambda_d'}(ab \to cd), \tag{2.1}$$

где

$$\lambda(a,b,c) = (a-b-c)^2 - 4bc = \\ = \left(a - \left[\sqrt{b}+\sqrt{c}\right]^2\right)\left(a - \left[\sqrt{b}-\sqrt{c}\right]^2\right).$$

Далее матричные элементы диаграмм Фейнмана процесса $ab \to cd$ представим в виде

$$\mathrm{M}^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}(s,t) = \\ = F(s,t)\sum_{J=0}^{k} h^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}(J,s) D^{*J}_{\lambda_{ab},\lambda_{cd}}(\phi,\theta,-\phi), \tag{2.2}$$

где

$$\lambda_{ij} = \lambda_i - \lambda_j; \;\; k = \max\left(|\lambda_{ab}|,|\lambda_{cd}|\right); \\ s = (p_a+p_b)^2; \;\; t = (p_a-p_c)^2.$$

Фактор $F(s,t)$ является лоренц-инвариантным скалярным коэффициентом и содержит зависимость от угла рассеяния θ частицы c только в знаменателе, т. е.

$$F(s,t) = \frac{a(s)}{\cos\theta - y}. \tag{2.3}$$

Функции $a(s)$ и y зависят только от переменной s и масс частиц реакции $ab \to cd$. Матричный элемент $\mathcal{M}^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}$ в сечении (1.2) представляет собой сумму матричных элементов $\mathrm{M}^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}(s,t)$ (2.2).

Следовательно, билинейная комбинация

$$\mathcal{M}_{\lambda_a,\lambda_b;\lambda_c,\lambda_d}(ab \to cd)\mathcal{M}^*_{\lambda_a,\lambda_b;\lambda_c',\lambda_d'}(ab \to cd),$$

входящая в уравнение (2.1), будет представлять собой сумму слагаемых вида

$$\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j^* = F_i(s,t)F_j^*(s,t) \times \\ \times \sum_{J_i=0}^{k_i}\sum_{J_j=0}^{k_j} h^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}(J_i,s) h^{*\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c',\lambda_d'}(J_j,s) \times \\ \times \sum_{\ell=|J_i-J_j|}^{J_i+J_j} (-1)^{\lambda_{cd}-\lambda_{ab}} \left\{\begin{matrix} \lambda_{ab} & \lambda_{cd} & J_i \\ -\lambda_{ab} & -\lambda_{cd} & J_j \end{matrix}\middle| \ell \right\} \times \\ \times D^{\ell}_{0,\lambda_{cd}'-\lambda_{cd}}(\phi,\theta,-\phi), \tag{2.4}$$

где функция от произведения коэффициентов Клебша – Гордана $\mathbf{C}\left\{\begin{matrix} j_1 & j_2 & j \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2 \end{matrix}\right\}$ группы $\mathrm{SU}(2)$ определяется уравнением

$$\left\{\begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & j_1 \\ m_1 & m_2 & j_2 \end{matrix}\middle| j \right\} = \\ = \mathbf{C}\left\{\begin{matrix} j_1 & j_2 & j \\ \lambda_1 & m_1 & \lambda_1+m_1 \end{matrix}\right\}\mathbf{C}\left\{\begin{matrix} j_1 & j_2 & j \\ \lambda_2 & m_2 & \lambda_2+m_2 \end{matrix}\right\}. \tag{2.5}$$

Для сокращения записи введем частный вариант символа (2.5)

$$\left\{\begin{matrix} \lambda_1 & j_1 \\ \lambda_2 & j_2 \end{matrix}\middle| j \right\} \equiv \left\{\begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & j_1 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & j_2 \end{matrix}\middle| j \right\}.$$

Соотношение (2.4) позволяет провести интегрирование по угловым переменным θ и ϕ в уравнении (2.1). Как правило, экспериментальные ограничения (особенно при высоких энергиях) приводят к уменьшению области интегрирования для угла θ: $z_1 \le z = \cos\theta \le z_2$, $|z_{1,2}| < 1.$. При этом интервал для угла ϕ остается неизменным, т. е. $0 \le \phi \le 2\pi$.

В итоге уравнение (2.1) можно представить в виде, используя (2.2) и (2.4),

$$T^{\lambda_c,\lambda_c'}_{\lambda_d,\lambda_d'}(ab \to cd) = \\ = \frac{1}{(2S_a+1)(2S_b+1)} \frac{1}{32\pi s} \frac{\lambda^{1/2}\left(s,m_c^2,m_d^2\right)}{\lambda^{1/2}\left(s,m_a^2,m_b^2\right)} \delta_{\lambda_{cd}',\lambda_{cd}} \times \\ \times \sum_{\lambda_a,\lambda_b}\sum_{i,j} B_{ij}\left(\lambda_a,\lambda_b;\lambda_c,\lambda_d;\lambda_c',\lambda_d'\right), \tag{2.6}$$

где

$$B_{ij}\left(\lambda_a,\lambda_b;\lambda_c,\lambda_d;\lambda_c',\lambda_d'\right) = \\ = a_i(s)a_j^*(s)\sum_{J_i=0}^{k_i}\sum_{J_j=0}^{k_j} h^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}(J_i,s) \times \\ \times h^{*\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c',\lambda_d'}(J_j,s) \sum_{\ell=|J_i-J_j|}^{J_i+J_j} \left\{\begin{matrix} \lambda_{ab} & J_i \\ \lambda_{cd} & J_j \end{matrix}\middle| \ell \right\} \mathcal{I}_\ell\left(y_i,y_j;z_2,z_1\right). \tag{2.7}$$

Функция $\mathcal{I}_\ell\left(y_i,y_j;z_2,z_1\right)$ в (2.7) представляет интеграл с полиномом Лежандра 1-го рода $P_\ell(z)$ вида

$$\mathcal{I}_\ell\left(y_i,y_j;z_2,z_1\right) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{P_\ell(z)}{(z-y_i)(z-y_j)} dz, \tag{2.8}$$

которая может переходить и в следующие интегралы

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{P_\ell(z)}{(z-y_i)} dz, \;\; \int_{z_1}^{z_2} P_\ell(z) dz, \tag{2.9}$$

если скалярные факторы F в некоторых диаграммах Фейнмана не зависят от угла θ.

С помощью соотношения

$$\frac{P_n(x) - P_n(y)}{x-y} = \\ = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)P_k(x)\left(P_k(y)w_{n-1}(y) - P_n(y)w_{k-1}(y)\right), \\ n \ge 1,$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

где $w_n(y)$ [6, с.1033, формула 8.831]

$$w_n(y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)}P_k(y)P_{n-k}(y),\quad w_{-1}(y)=0$$

интегралы (2.8) и (2.9) могут быть вычислены аналитически для произвольного числа ℓ.

Для получения $\mathrm{M}_{\lambda_c,\lambda_d}^{\lambda_a,\lambda_b}(s,t)$ в виде (2.2) используем метод базисных спиноров [7]–[9], в котором такое представление для спиральных состояний частиц часто получается автоматически.

2.2 *Вычисление распадов* $c\to 12$ *и* $d\to 34$

Следующий этап расчета сечения каскадного процесса состоит в вычислении величин (1.5) и (1.7). Отличительным моментом, по сравнению со стандартными методиками, является то, что функции (1.5) и (1.7) должны быть вычислены в той же системе отсчета, что и (1.3). В нашем случае, это система центра инерции частиц *a* и *b*.

Однако, функции (1.5) и (1.7) намного проще вычислить в системе покоя частиц *c* и *d* соответственно. В работе [1] такой расчет предлагается сделать с помощью преобразования Лоренца, которое трансформирует матричные элементы из системы, где частица *c* движется с 4-импульсом

$$p_c=\left\{E_c,|\mathbf{p}_c|\sin\theta\cos\phi,|\mathbf{p}_c|\sin\theta\sin\phi,|\mathbf{p}_c|\cos\theta\right\}$$

в систему покоя частицы *c*, $\mathbf{p}_c=0$. Для этого требуется знание векторов поляризации и 4-импульсов частиц, участвующих в реакции.

При этом имеется важный технический момент. Поскольку существует определенный произвол в построениях 4-векторов реакции, возникает ситуация когда функции (1.5) и (1.7) зависят от угла ϕ. Это приводит к необходимости рассчитывать интегралы по переменной ϕ в (1.3) только после соответствующих расчетов функций (1.5) и (1.7) [1].

Для того чтобы упросить эту задачу, в работе предлагается использовать состояния с пуанкаре-инвариантными спиральностями для конечных частиц 1–4 [2], [3]. Проведем построение состояния частиц 1 и 2 с помощью аппарата группы Пуанкаре.

Построение вектора состояния двух частиц начинают в системе центра инерции

$$\mathbf{P}_{12}=\tilde{\mathbf{k}}_1+\tilde{\mathbf{k}}_2=0,$$

когда частица 1 движется вдоль оси *Z*, а частица 2 – против *Z*. Тогда вектор двухчастичной системы запишется в виде

$$\left|\tilde{\mathrm{k}}_1,0,0,\lambda_1\right\rangle\left|-\tilde{\mathrm{k}}_1,0,0,\lambda_2\right\rangle= \tag{2.10}$$
$$=\mathcal{U}\left[L_z\left(V_{k_1}\right)\right]\left|0,0,0,\lambda_1\right\rangle\mathcal{U}\left[L_{-z}\left(V_{k_2}\right)\right]\left|0,0,0,-\lambda_2\right\rangle,$$

где $L_{\pm z}\left(V_p\right)$ преобразования буста вдоль и против оси *Z* с 4-скоростью $V_p=p/m$.

Затем, применяя к состоянию (2.10) вращение $\mathcal{U}\left[R\left(\phi_1,\theta_1,-\phi_1\right)\right]$, получаем, что частица 1 движется в направлении, задаваемым углами θ_1,ϕ_1, а частица 2 движется в противоположном направлении:

$$\begin{aligned}&\left|\tilde{\mathbf{k}}_1,\lambda_1;\tilde{\mathbf{k}}_2,\lambda_2\right\rangle=\\&=\left|\tilde{\mathrm{k}}_1,\theta_1,\phi_1,\lambda_1\right\rangle\left|\tilde{\mathrm{k}}_2,\pi-\theta_1,\phi_1+\pi,\lambda_2\right\rangle\equiv\\&\equiv\left|\mathbf{P}_{12}=0,\tilde{\mathrm{k}},\theta_1,\phi_1,\lambda_1,\lambda_2\right\rangle=\\&=\mathcal{U}\left[R\left(\phi_1,\theta_1,-\phi_1\right)\right]\left|\tilde{\mathrm{k}}_1,0,0,\lambda_1\right\rangle\left|-\tilde{\mathrm{k}}_1,0,0,\lambda_2\right\rangle,\end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\tilde{\mathrm{k}}=\tilde{\mathrm{k}}_1=\tilde{\mathrm{k}}_2$ согласно определению системы центра инерции.

Для системы с $\mathbf{P}_{12}=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2\neq 0$ необходимо сделать преобразование вида

$$\mathcal{U}\left[R\left(\phi,\theta,-\phi\right)\right]\mathcal{U}\left[L_z\left(V_{P_{12}}\right)\right], \tag{2.12}$$

в котором углы ϕ,θ определяют ориентацию импульса $\mathbf{P}_{12}$.

В итоге имеем, что система двух частиц описывается векторами состояния

$$\begin{aligned}&\mathcal{U}\left[R\left(\phi,\theta,-\phi\right)\right]\mathcal{U}\left[L_z\left(V_{P_{12}}\right)\right]\left|\mathbf{P}_{12}=\right.\\&\left.=0,\tilde{\mathrm{k}},\theta,\phi,\lambda_1,\lambda_2\right\rangle=\\&=\left|\mathbf{P}_{12},\tilde{\mathrm{k}},\theta_1,\phi_1,\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2\right\rangle,\end{aligned} \tag{2.13}$$

где 4-импульсы определены следующим образом:

$$k_{1,2}=R\left(\phi,\theta,-\phi\right)L_z\left(V_{P_{12}}\right)\tilde{k}_{1,2},\ \ \mathbf{P}_{12}=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2.$$

Такое построение приводит к тому, что состояния частиц 1 и 2 не являются спиральными, поскольку закон преобразования требует появления вигнеровских вращений, связанных с преобразованием от системы центра инерции к движущейся системе. Спиновые состояния в (2.13) являются собственными значениями пуанкаре-инвариантных операторов спиральностей [3]:

$$\tilde{\lambda}_j=\frac{W_j^{\mu}P_{\mu}}{\sqrt{\left(k_jP_i\right)^2-m_j^2P_i^2}},\ \ j=(1,2).$$

Здесь W^{μ} – оператор спина Паули – Любанского

$$W_j^{\mu}=-\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\rho\tau\nu\mu}M^{\rho\tau}k_j^{\nu}\ .$$

В системе $\mathbf{P}=0$ все эти операторы совпадают с операторами спиральностей частиц реакции.

Вектор состояния $\left|\mathbf{p_c},J,\lambda_c\right\rangle$ для частицы *c* с спиральностью λ_c определяется формулой

$$\begin{aligned}&\left|\mathrm{p}_c,\theta,\phi,\lambda_c\right\rangle=\\&=\mathcal{U}\left[R\left(\phi,\theta,-\phi\right)\right]\mathcal{U}\left[L_z\left(V_{p_c}\right)\right]\left|0,0,0,\lambda_c\right\rangle,\end{aligned} \tag{2.14}$$

а для частицы *d* с спиральностью λ_d

$$\left|\mathrm{p}_d,\theta,\phi,\lambda_d\right\rangle=$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$= \mathcal{U}\left[R(\phi,\theta,-\phi)\right]\mathcal{U}\left[L_{-z}\left(V_{p_d}\right)\right]\left|0,0,0,-\lambda_d\right\rangle.$$

Матричные элементы с пуанкаре-инвариантными спиральностями будут отличаться от обычных спиральностей наличием *D*-матрицы вигнеровского вращения. Если частицы 1 и 2 не поляризованы, то модуль квадрата матричного элемента с пуанкаре-инвариантными спиральностями совпадет с модулем квадрата для обычных спиральностей вследствие унитарности *D*-матриц при суммировании по проекциям спина.

Тогда, используя (2.11), (2.12) и (2.14), можно показать, что *S*-матричного элемента распада $c \to 12$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned}&\left\langle \mathbf{p}_c, J, \lambda_c \middle| \mathcal{S} \middle| \mathbf{k}_1, \tilde{\lambda}_1; \mathbf{k}_2, \tilde{\lambda}_2 \right\rangle = \\ &= \left\langle \tilde{\mathbf{p}}_c = 0, J, \lambda_c \middle| \mathcal{S} \middle| \tilde{\mathbf{k}}_1, \lambda_1; \tilde{\mathbf{k}}_2, \lambda_2 \right\rangle\end{aligned} \qquad (2.15)$$

в силу релятивистской инвариантности $\mathcal{S}$-матрицы.

Поэтому, если сразу предположить, что возникшие в результате каскадных распадов частицы имеют пуанкаре-инвариантные спиральности, построенные по формулам (2.11) и (2.12), то, в силу (2.15), не требуется дополнительного пересчета матричных элементов от движущейся частицы *c* к системе ее покоя. Это делает расчеты с пуанкаре-инвариантными спиральностями намного проще, чем обычными. Аналогичная схема реализуется и для распада $d \to 34$.

Схема вычисления функций (1.5) и (1.7) аналогична расчету функции (1.3). В итоге получим

$$\begin{aligned}&T_{\lambda_c,\lambda_c'}(c \to 12) = \\ &= \frac{1}{32\pi m_c^3}\frac{\lambda^{1/2}\left(m_c^2, m_1^2, m_2^2\right)}{\Gamma(c \to 12)}\delta_{\lambda_c',\lambda_c} \times \\ &\times \sum_{\lambda_1,\lambda_2}\sum_{i,j} a_i(s) a_j^*(s) h^J_{\lambda_1,\lambda_2}(i) h^{*J}_{\lambda_1,\lambda_2}(j) \times \\ &\times \sum_{\ell=0}^{2J}\left\{\begin{matrix}\lambda_c & J \\ \lambda_{12} & J\end{matrix}\middle| \ell\right\} I_\ell\left(z_2, z_1\right),\end{aligned} \qquad (2.16)$$

где $s = m_c^2$ и

$$I_\ell\left(z_2, z_1\right) = F_\ell\left(z_2\right) - F_\ell\left(z_1\right), \qquad (2.17)$$

$$F_\ell(z) = \frac{P_{\ell+1}(z) - P_{\ell-1}(z)}{2\ell+1}, \;\; P_{-1}(z) = 1.$$

Для функции (1.7) получаем выражение, аналогичное (2.16). Как следует из уравнений (2.6) и (2.16), при условии отсутствия ограничения на углы ϕ, $\phi_{1,3}$ для функций (1.3), (1.5) и (1.7), сечение (1.2) упрощается

$$\begin{aligned}&d\sigma\left(ab \to 12 + 34\right) = \\ &= \mathrm{BR}\left(c \to 12\right)\mathrm{BR}\left(d \to 34\right) \times \\ &\times \sum_{\lambda_c,\lambda_d} \widetilde{T}^{\lambda_c}_{\lambda_d}(ab \to cd)\widetilde{T}_{\lambda_c}(c \to 12)\widetilde{T}_{\lambda_d}(d \to 34),\end{aligned} \qquad (2.18)$$

где $T^{\lambda_c,\lambda_c'}_{\lambda_d,\lambda_d'} = \delta_{\lambda_c,\lambda_c'}\delta_{\lambda_d,\lambda_d'}\widetilde{T}^{\lambda_c}_{\lambda_d}$ и

$$T_{\lambda_{c,d},\lambda_{c,d}'} = \delta_{\lambda_{c,d},\lambda_{c,d}'}\widetilde{T}_{\lambda_{c,d}}.$$

Таким образом, у нас имеются все необходимые компоненты для сечения (1.2) с учетом возможных кинематических экспериментальных ограничений. Расчет конкретного процесса будет приводить к различным наборам параметров $a(s)$, y_i и спиральных амплитуд h_i. Для получения $\mathrm{M}^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}(s,t)$ в виде (2.2) удобно использовать метод базисных спиноров [7]–[9], в котором такое представление для спиральных состояний частиц часто получается автоматически.

3 Каскадный процесс $e^-e^+ \to t\bar{t} \to W^-\bar{b}W^+b$

Рассмотрим, как работает предлагаемая методика на примере вычисления каскадного процесса

$$e^-e^+ \to t\bar{t} \to W^-\bar{b}W^+b \qquad (3.1)$$

в борновском приближении. В данном примере не рассматривается последующий распад W-бозонов.

На первом этапе рассчитаем матричные элементы диаграмм Фейнмана для бинарной реакции

$$\begin{aligned}&e^-\left(p_a, \lambda_a, m_e\right) e^+\left(p_b, \lambda_b, m_e\right) \to \\ &\to t\left(p_c, \lambda_c, m_t\right)\bar{t}\left(p_d, \lambda_d, m_t\right).\end{aligned} \qquad (3.2)$$

Амплитуда процесса (32) в борновском приближении представляет сумму двух матричных элементов процесса

$$\mathcal{M}^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d} = \mathrm{M}^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}(\gamma) + \mathrm{M}^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}\left(\mathrm{Z}^0\right),$$

где

$$\begin{aligned}&\mathrm{M}^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}(\gamma) = (-1)(4\pi\alpha / s) Q_e Q_t \bar{\upsilon}_{\lambda_b}\left(p_2\right) \times \\ &\times \gamma_\mu u_{\lambda_a}\left(p_1\right)\bar{u}_{\lambda_c}\left(k_1\right)\gamma^\mu \upsilon_{\lambda_d}\left(k_2\right),\end{aligned} \qquad (3.3)$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{M}^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}\left(\mathrm{Z}^0\right) = (-1)(4\pi\alpha / s)\chi_s(Z) \times \\ &\times \left(g^{\mu\nu} - P^\mu P^\nu / M_\mathrm{Z}^2\right)\bar{\upsilon}_{\lambda_b}\left(p_2\right)\gamma_\nu\left(g_V^i + g_A^i\gamma_5\right) \times \\ &\times u_{\lambda_a}\left(p_1\right)\bar{u}_{\lambda_c}\left(k_1\right)\gamma_\mu\left(g_V^t + g_A^t\gamma_5\right)\upsilon_{\lambda_d}\left(k_2\right).\end{aligned} \qquad (3.4)$$

В уравнениях (3.3) и (3.4): $\chi_s(Z) = \dfrac{s}{s - M_\mathrm{Z}^2}$; Q_f – заряд фермиона *f* в единицах $|e|$; α – постоянная тонкой структуры. Функции g_V^f, g_A^f являются константами связи массивных фермионов *f* с Z^0-бозоном.

Применяя метод базисных спиноров для вычисления борновской амплитуды с обменом Z^0-бозоном, получим, что

$$\begin{aligned}&\mathrm{M}^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}\left(\mathrm{Z}^0\right) = \\ &= (8\pi\alpha)\sum_{J=0}^{1} h^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}(J, \mathrm{Z}) D^{*J}_{\lambda_{ab},\lambda_{cd}}(\phi,\theta,-\phi),\end{aligned} \qquad (3.5)$$

где $\lambda_{ab} = (\lambda_a - \lambda_b)/2$, $\lambda_{cd} = (\lambda_c - \lambda_d)/2$ и

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$h^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}(0,\mathrm{Z}) = 2\lambda_c\lambda_a\delta_{\lambda_d,\lambda_c}\delta_{\lambda_b,\lambda_a}g^{\mathrm{t}}_A g^{\mathrm{e}}_A\frac{m_{\mathrm{t}}m_e}{M^2_{\mathrm{Z}}},$$

$$h^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}(1,\mathrm{Z}) = \chi_s(Z)\left(\tilde{g}^{\mathrm{t}}_{\lambda_c}\delta_{\lambda_d,-\lambda_c} + g^{\mathrm{t}}_V\delta_{\lambda_d,\lambda_c}\tilde{\eta}_{\mathrm{t}}\right)\times \quad (3.6)$$
$$\times\left(\tilde{g}^{\mathrm{e}}_{\lambda_a}\delta_{\lambda_b,-\lambda_a} + g^{\mathrm{e}}_V\delta_{\lambda_b,\lambda_a}\tilde{\eta}_e\right).$$

В уравнении (3.6) введены дополнительные функции, связанные с константами связи и массами частиц

$$\tilde{g}^i_\lambda = \left(g^i_V + \lambda\beta_i g^i_A\right),$$

$$\beta_i = \sqrt{1-4\frac{m_i^2}{s}},\ \ \tilde{\eta}_i = \sqrt{\frac{2}{s}}m_i,\ \ \lambda = \pm 1.$$

Матричный элемент, соответствующий диаграмме с обменом γ-квантом, получается с помощью замены вида $g^i_V \to Q_e Q_t, g^i_A \to 0$ и $\chi_s(Z)\to 1$ из матричного элемента (3.5) с обменом ZZ^0-бозоном. В итоге получим, что

$$\mathrm{M}^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}(\gamma) = 8\pi\alpha h^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}(1,\gamma)D^{*1}_{\lambda_{ab},\lambda_{cd}}(\phi,\theta,-\phi), \quad (3.7)$$

где спиральная амплитуда имеет вид

$$h^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}(1,\gamma) =$$
$$= Q_e Q_t\left(\delta_{\lambda_d,-\lambda_c} + \delta_{\lambda_d,\lambda_c}\tilde{\eta}_{\mathrm{t}}\right)\left(\delta_{\lambda_b,-\lambda_a} + \delta_{\lambda_b,\lambda_a}\tilde{\eta}_e\right).$$

Поскольку реакция (3.2) описывается только диаграммами Фейнмана *s*-канального типа, то зависимость от углов θ и ϕ присутствует в матричных элементах только в числителе. Отметим, что вычисления проведены без каких-либо допущений относительно масс фермионов реакции (3.2).

С учетом уравнений (2.1), (3.5) и (3.7) и комментария для формулы (2.18) получим, что

$$\widetilde{T}^{\lambda_c}_{\lambda_d}(ab\to cd) = \frac{\pi\alpha^2}{2s}\frac{\beta_{\mathrm{t}}}{\beta_{\mathrm{e}}}\sum_{\lambda_a,\lambda_b}\widetilde{B}^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}, \quad (3.8)$$

где

$$\widetilde{B}^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d} = \left|h_{0,\mathrm{Z}}\right|^2 +$$
$$+2\mathrm{Re}\left[\left(h_{1,\gamma}+h_{1,\mathrm{Z}}\right)h^*_{0,\mathrm{Z}}\right]I_1(z_2,z_1) + \quad (3.9)$$
$$+\left|h_{1,\gamma}+h_{1,\mathrm{Z}}\right|^2\sum_{\ell=0}^{2}\left\{\begin{matrix}\lambda_{ab} & 1\\ \lambda_{cd} & 1\end{matrix}\middle|\ell\right\}I_\ell(z_2,z_1).$$

В формуле (3.9) функция $I_\ell(z_2,z_1)$ определяется уравнением (2.17) и использована замена

$$h^{\lambda_a,\lambda_b}_{\lambda_c,\lambda_d}(n,i)\to h_{n,i}.$$

Следующий шаг состоит в вычислении функций (1.5) и (1.7) для распадов

$$\mathrm{t}(p_c,\lambda_c,m_{\mathrm{t}})\to$$
$$\to \mathrm{W}^+(k_1,\lambda_1,M_{\mathrm{W}}) + \mathrm{b}(k_2,\lambda_2,m_{\mathrm{b}}), \quad (3.10)$$

$$\overline{\mathrm{t}}(p_d,\lambda_d,m_{\mathrm{t}})\to$$
$$\to \mathrm{W}^-(k_3,\lambda_3,M_{\mathrm{W}}) + \overline{\mathrm{b}}(k_4,\lambda_4,m_{\mathrm{b}}). \quad (3.11)$$

Матричные элементы распадов (3.10) и (3.11) в борновском приближении имеют вид:

$$\mathcal{M}^{\lambda_c}_{\lambda_1,\lambda_2}\left(\mathrm{t}\to\mathrm{W}^+\mathrm{b}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi\alpha}}{\mathrm{s_W}}V^*_{\mathrm{tb}}\overline{u}_{\lambda_2}(k_2)\hat{\varepsilon}^*_{\lambda_1}(k_1)\omega_- u_{\lambda_c}(p_c), \quad (3.12)$$

$$\mathcal{M}^{\lambda_d}_{\lambda_3,\lambda_4}\left(\overline{\mathrm{t}}\to\mathrm{W}^-\overline{\mathrm{b}}\right) =$$
$$= -\frac{\sqrt{2\pi\alpha}}{\mathrm{s_W}}V_{\mathrm{tb}}\overline{\upsilon}_{\lambda_d}(p_d)\hat{\varepsilon}^*_{\lambda_3}(k_3)\omega_-\upsilon_{\lambda_4}(k_4), \quad (3.13)$$

где $\mathrm{s_W}$ – синус угла Вайнберга – Салама θ_{W}; V_{tb} – элемент матрицы Кабиббо – Кобаяси – Маскавы; $\omega_- = 1/2(1-\gamma_5)$ – проективная матрица; $\varepsilon_\lambda(k)$ – вектор поляризации W-бозона спиральности $\lambda = 0,\pm 1$.

Аналитические выражения для (3.12) и (3.13) принимают наиболее компактный вид, если использовать быстроты χ для W-бозона и b-кварка:

$$|\mathbf{k}| = M_{\mathrm{W}}\mathrm{h}\chi_W = m_{\mathrm{b}}\mathrm{sh}\chi_b,$$
$$E_W = M_{\mathrm{W}}\mathrm{ch}\chi_W,\ \ E_b = m_{\mathrm{b}}\mathrm{ch}\chi_b.$$

Используя метод базисных спиноров [7]–[9], получаем

$$\mathcal{M}^{\lambda_c}_{\lambda_1,\lambda_2}\left(\mathrm{t}\to\mathrm{W}^+\mathrm{b}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi\alpha}}{\mathrm{s_W}}\sqrt{m_{\mathrm{t}}m_{\mathrm{b}}}V^*_{\mathrm{tb}}h^{1/2}_{\lambda_1,\lambda_2}D^{*1/2}_{\lambda_c/2,\lambda_1-\lambda_2/2}(\phi_1,\theta_1,-\phi_1), \quad (3.14)$$

$$\mathcal{M}^{\lambda_d}_{\lambda_3,\lambda_4}\left(\overline{\mathrm{t}}\to\mathrm{W}^-\overline{\mathrm{b}}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi\alpha}}{\mathrm{s_W}}\sqrt{m_{\mathrm{t}}m_{\mathrm{b}}}V_{\mathrm{tb}}\overline{h}^{1/2}_{\lambda_3,\lambda_4}D^{*1/2}_{\lambda_d/2,\lambda_3-\lambda_4/2}(\phi_3,\theta_3,-\phi_3), \quad (3.15)$$

где

$$h^{1/2}_{\lambda_1,\lambda_2} = \exp\left(-\lambda_2\chi_b/2\right)\times$$
$$\times\left\{\sqrt{2}\delta_{\lambda_1^2,1}\delta_{\lambda_1,\lambda_2} - \lambda_2\exp\left(-\lambda_2\chi_W\right)\delta_{\lambda_1,0}\right\},$$
$$\overline{h}^{1/2}_{\lambda_3,\lambda_4} = -\exp\left(\lambda_4\chi_b/2\right)\times$$
$$\times\left\{\sqrt{2}\delta_{\lambda_3^2,1}\delta_{\lambda_3,\lambda_4} - \lambda_4\exp\left(\lambda_4\chi_W\right)\delta_{\lambda_3,0}\right\}.$$

Парциальная ширина распада $\Gamma\left(\mathrm{t}\to\mathrm{W}^+\mathrm{b}\right)$ с учетом (3.14) определяется

$$\Gamma\left(\mathrm{t}\to\mathrm{W}^+\mathrm{b}\right) =$$
$$= \frac{m_{\mathrm{b}}}{16m^2_{\mathrm{t}}}\frac{\alpha}{\mathrm{s^2_W}}\lambda^{1/2}\left(m^2_t,M^2_{\mathrm{W}},m^2_{\mathrm{b}}\right)\left|V_{\mathrm{tb}}\right|^2\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\left|h^{1/2}_{\lambda_1,\lambda_2}\right|^2. \quad (3.16)$$

Аналогичное (3.16) соотношение имеем и для $\Gamma\left(\overline{\mathrm{t}}\to\mathrm{W}^-\overline{\mathrm{b}}\right)$.

Тогда используя (3.16) и (2.16), получаем функции (1.5) и (1.7) для процесса (3.1) в виде

$$\widetilde{T}_{\lambda_c}\left(\mathrm{t}\to\mathrm{W}^+\mathrm{b}\right) = \left[\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\left|h^{1/2}_{\lambda_1,\lambda_2}\right|^2\right]^{-1}\times$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\times \sum_{\lambda_1,\lambda_2} \left| h^{1/2}_{\lambda_1,\lambda_2} \right|^2 \sum_{\ell=0}^{1} \left\{ \begin{array}{cc} \lambda_c & 1/2 \\ \lambda_{12} & 1/2 \end{array} \right| \ell \left. \vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \end{array}} \right\} I_\ell \left(z_2, z_1 \right), \quad (3.17)$$

$$\widetilde{T}_{\lambda_d} \left(\overline{\mathrm{t}} \to \mathrm{W}^- \overline{\mathrm{b}} \right) = \left[\sum_{\lambda_3,\lambda_4} \left| \overline{h}^{1/2}_{\lambda_3,\lambda_4} \right|^2 \right]^{-1} \times$$

$$\times \sum_{\lambda_3,\lambda_4} \left| \overline{h}^{1/2}_{\lambda_3,\lambda_4} \right|^2 \sum_{\ell=0}^{1} \left\{ \begin{array}{cc} \lambda_d & 1/2 \\ \lambda_{34} & 1/2 \end{array} \right| \ell \left. \vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \end{array}} \right\} I_\ell \left(z_2, z_1 \right). \quad (3.18)$$

Относительная вероятность распада $\mathrm{BR}\left(\mathrm{t} \to \mathrm{W}^+ \mathrm{b} \right)$ определяется экспериментально. Таким образом, в работе получены все необходимые компоненты (см. (3.3), (3.17) и (3.18)) для вычисления сечения (2.18) каскадного процесса (3.1) с учетом возможных ограничений на углы рассеяния частиц реакции.

Заключение

В работе рассмотрена общая методика вычисления каскадных процессов с использованием улучшенного приближения узких резонансов и с учетом возможных экспериментальных ограничений на углы вылета конечных и промежуточных частиц. Важной отличительной чертой методики является использование пуанкаре-инвариантных спиральностей для конечных частиц каскадной реакции. Это позволяет существенно упростить расчеты компонент, связанных с распадами, особенно для массивных частиц. Как уже отмечено, в этом случае не возникает необходимость в преобразовании матричных элементов из одной системы отчета в другую.

Эта методика основана на возможности разложения матричных элементов диаграмм Фейнмана по спиральным амплитудам вида (2.2). Использование авторского метода базисных спиноров позволяет получить такое разложение.

Конкретный пример применения данной методики показывает, что сечение каскадного процесса $ab \to cd \to 12 + 34$ имеет компактную форму.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dittmaier*, *S.* NLO QCD corrections to $\mathrm{pp} / \mathrm{p}\overline{\mathrm{p}} \to \mathrm{WW} + jet + \mathrm{X}$ including leptonic W-boson decays / S. Dittmaier, S. Kallweit, P. Uwer // Nucl. Phys. – 2010. – Vol. B826. – P. 18–70.

2. *Верле*, *Ю.* Релятивистская теория реакций / Ю. Верле. – Москва: Атомиздат, 1969. – 442 с.

3. *Новожилов*, *Ю.В.* Введение в теорию элементарных частиц / Ю.В. Новожилов. – Москва: Наука, 1972. – 472 с.

4. *Пилькун*, *Х.* Физика релятивистских частиц / Х. Пилькун. – Москва: Мир, 1983. – 542 с.

5. *Бюклинг*, *Е.* Кинематика элементарных частиц / Е. Бюклинг, К. Каянти. – Москва: Мир, 1975. – 344 с.

6. *Градштейн*, *И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – 4-е пер. изд. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963. – 1110 с.

7. *Andreev*, *V.V.* Analytic Calculation of Feynman Amplitudes / V.V. Andreev // Physics of Atomic Nuclei. – 2003. – Vol. 66, № 2. – P. 383–393.

8. *Andreev*, *V.V.* Scattering QCD amplitudes with massive fermions using recursive relations / V.V. Andreev // Nonlinear phenomena in complex systems. – 2009. – Vol. 12, № 4. – P. 338–342.

9. *Андреев*, *В.В.* Вычисление фейнмановских диаграмм техникой блоков / В.В. Андреев // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 7–12.

Поступила в редакцию 24.01.2021.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ