Проблемы физики, математики и техники, № 1 (2), 2010

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О π-РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С ЧАСТИЧНО ПЕРЕСТАНОВОЧНОЙ π-ХОЛЛОВОЙ ПОДГРУППОЙ

В.Н. Княгина

Гомельский инженерный институт
МЧС Республики Беларусь, Гомель

ON π-SOLVABILITY OF A FINITE GROUP WITH A PARTIALLY PERMUTABLE π-HALL SUBGROUP

V.N. Kniahina

Gomel Engineering Institute of the
Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Gomel

Устанавливаются признаки π-разрешимости конечной группы при условии, что ее π-холлова подгруппа перестановочна с некоторыми подгруппами всей группы. В частности, получена π-разрешимость таких групп в двух случаях: π-холлова подгруппа 2-нильпотентна; π-холлова подгруппа разрешима и $3 \notin \pi$. Кроме того, устанавливается разрешимость конечной группы в случае, если 2-нильпотентная π-холлова подгруппа группы имеет нечетный индекс.

***Ключевые слова**: конечная группа, полунормальная подгруппа, π-холлова подгруппа, π-разрешимая группа.*

We investigate a finite group such that its π-Hall subgroup is permutable with some subgroups of the group. For instance, we establish π-solvability of such groups in two cases: a π-Hall subgroup is 2-nilpotent; a π-Hall subgroup is solvable and $3 \notin \pi$. Besides, we establish solvability of a finite group in the case when a 2-nilpotent π-Hall subgroup of the group has odd index.

***Keywords**: finite group, seminormal subgroup, π-Hall subgroup, π-solvable group.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Напомним, что подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что G=AB и AB_1 – собственная подгруппа для каждой собственной подгруппы B_1 из B. В этой ситуации подгруппу B называют *супердобавлением* к подгруппе A в группе G. Очевидно, что подгруппа простого индекса всегда полунормальна. Квазинормальная подгруппа (т. е. подгруппа, перестановочная со всеми подгруппами группы) будет полунормальной. В простой группе $PSL(2,5)$ подгруппа A, изоморфная знакопеременной группе степени 4, которая является группой Шмидта, полунормальна, но A не квазинормальна и не субнормальна. Группы с полунормальными подгруппами Шмидта изучены в работе [1].

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве простых чисел обозначим через π'. Подгруппу, порядок которой делится только на простые числа из π, а ее индекс в группе – только на простые числа из π', называют π-холловой.

Полунормальные π-холловы подгруппы изучались в работе В.С. Монахова [2], где была установлена π-разрешимость группы с полунормальной π-холловой подгруппой A в двух случаях: A 2-нильпотентна; A разрешима и $3 \notin \pi$.

В 2003 г. А.Н. Скиба [3] ввел понятие X-перестановочности. Пусть X – непустое подмножество группы G. Погруппы A и B называются X-*перестановочными*, если существует элемент $x \in X$ такой, что $AB^x = B^x A$. Если X={1}, т. е. множество X состоит из одного единичного элемента 1 группы, то 1-перестановочные подгруппы – это в точности перестановочные подгруппы.

Подгруппа A группы G называется X-*полунормальной* в G, если существует такая подгруппа B в группе G, что G=AB и для каждой собственной подгруппы B_1 из B существует элемент $x \in X$ такой, что AB_1^x – собственная в G подгруппа. Ясно, что если $\varnothing \neq X \subseteq Y \subseteq G$, то каждая X-полунормальная подгруппа будет Y-полунормальной. В частности, полунормальная подгруппа всегда X-полунормальна для любой подгруппы X.

Основной результат

В настоящей работе развиваются результаты, полученные В.С. Монаховым [2] и устанавливаются новые признаки π-разрешимости группы G с $S_\pi(G)$-полунормальной π-холловой подгруппой. Здесь $S_\pi(G)$ – π-разрешимый радикал группы G, т. е. наибольшая нормальная π-разрешимая подгруппа группы G. Разрешимый радикал группы G обозначается через $S(G)$. Доказаны следующие теоремы.

***Теорема* 1.** *Пусть в группе G существует* $S_\pi(G)$ *-полунормальная* π*-холлова подгруппа A. Тогда G* π*-разрешима в каждом из следующих случаев:*

1) *A 2-нильпотентна;*

2) *A разрешима и* $3 \notin \pi$.

***Теорема* 2.** *Если в группе G существует 2-нильпотентная S(G)-полунормальная* π*-холлова подгруппа нечетного индекса, то G разрешима.*

Нам потребуются следующие вспомогательные результаты.

***Лемма* 1** ([1, лемма 2]).

1) *Если H – полунормальная подгруппа группы G и* $H \le X \le G$ *, то H полунормальна в X.*

2) *Если H – полунормальная подгруппа группы G и* $N \lhd G$ *, то HN/N полунормальна в G/N.*

3) *Если H – полунормальная подгруппа группы G и K – её супердобавление, то H перестановочна с подгруппой* L^g *для всех* $L \le K$ *и всех* $g \in G$ *. В частности, подгруппа* K^g *будет супердобавлением к подгруппе H для каждого* $g \in G$ *.*

***Лемма* 2** ([2, лемма 2]). *Если в группе G существует полунормальная* π*-холлова подгруппа H, то супердобавление к H в G является* π' *-холловой подгруппой группы G.*

***Лемма* 3** ([1, лемма 10]). *Если A – полунормальная подгруппа группы G, то подгруппа* A^G *разрешима в каждом из следующих случаев:*

1) *подгруппа A 2-нильпотентна;*

2) *подгруппа A разрешима и 3 не делит порядок A.*

Все утверждения следующей леммы непосредственно вытекают из определения X-перестановочности.

***Лемма* 4.** *Пусть A, B и X – подгруппы группы G, а N – нормальная в G подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если A X-перестановочна с B, то B X-перестановочна с A.*

2. *Если A X-перестановочна с B, то AN/N XN/N-перестановочна с BN/N.*

3. *Если A X-перестановочна с B и X – нормальная подгруппа группы G, то AX/X перестановочна с BX/X.*

***Лемма* 5** ([2, лемма 5]). *Если A – полунормальная подгруппа группы G и K – ее супердобавление, то подгруппа* $A^L \cap L^A$ *субнормальна в G для каждой подгруппы L из K.*

***Лемма* 6** ([4, следствие 7.7.1]). *Если X – субнормальная* π*-разрешимая подгруппа группы G, то* X^G π*-разрешима.*

Здесь $X^G = < X^g \mid g \in G >$ – подгруппа, порожденная всеми сопряженными с X подгруппами в группе G.

***Лемма* 7** ([5, теорема 2]). *Группа, являющаяся произведением 2-нильпотентной подгруппы и циклической подгруппы, непроста. Если циклический фактор имеет нечетный порядок, то группа разрешима.*

***Лемма* 8** ([6]). *Группа, являющаяся произведением разрешимых* $3'$ *-подгрупп, разрешима.*

Доказательство теоремы 1. Без ущерба для доказательства можно считать, что B является минимальной подгруппой, для которой $G=AB$. Предположим, что $N = S_\pi(G) \ne 1$ и проверим, что фактор-группа G/N с подгруппами AN/N и BN/N удовлетворяет условию теоремы. Ясно, что $AN/N \cdot BN/N=G/N$, AN/N – π-холлова подгруппа G/N, а BN/N – добавление к AN/N в фактор-группе G/N. Пусть X/N – произвольная подгруппа из BN/N. Тогда $X = (B \cap X)N$ по тождеству Дедекинда. По условию теоремы подгруппа A $S_\pi(G)$ -полунормальна в G, т. е. существует элемент $n \in N$ такой, что $A(B \cap X)^n = (B \cap X)^n A$. Теперь по п. 3 леммы 4 подгруппы AN/N и X/N перестановочны. Если A 2-нильпотентна, то фактор-группа $AN/N \simeq A/N \cap A$ также 2-нильпотентна. Если $3 \notin \pi$ и A разрешима, то $3 \notin \pi(AN/N)$ и AN/N разрешима. Теперь к фактор-группе G/N применима индукция, поэтому G/N π-разрешима. Отсюда следует, что G π-разрешима.

Пусть теперь $S_\pi(G) = 1$. В этом случае подгруппа A перестановочна с каждой подгруппой из B, т. е. A – полунормальная подгруппа группы G. В силу свойств леммы 1 условия теоремы наследуются всеми фактор-группами группы G и всеми подгруппами, содержащими подгруппу A. Так как B – минимальное добавление к A в G, то по лемме 2 B – π' -холлова подгруппа группы G. Кроме того, AB_1 – собственная подгруппа в G для любой собственной подгруппы B_1 из B. По лемме 1 подгруппа A полунормальна в AB_1 и $AB_1 \ne G$. Теперь по индукции подгруппа AB_1 π-разрешима. По лемме 5, учитывая, что B_1 – собственная подгруппа из минимального добавления B к подгруппе A в G, получаем, что пересечение $D = A^{B_1} \cap B_1^A$ является субнормальной подгруппой группы G. Так как $D \subseteq A^{B_1} \subseteq AB_1$, то подгруппа D π-разрешима. По лемме 6 подгруппа D^G является π-разрешимой нормальной подгрупой в G. Если $D \ne 1$, то и $D^G \ne 1$. По индукции фактор-группа G/D^G π-разрешима, теперь π-разрешима и группа G. Значит, следует считать, что $E = D \subseteq A^{B_1} \subseteq AB_1$. Учитывая, что подгруппы A^{B_1} и B_1^A нормальны в AB_1, получаем следующие включения

$$[A, B_1] \subseteq [A^{B_1}, B_1^A] \subseteq A^{B_1} \cap B_1^A = E.$$

Значит подгруппа A централизует каждую собственную подгруппу из B.

Если B содержит две различные максимальные подгруппы, то A централизует подгруппу B, поэтому A нормальна в G. В каждом из двух рассматриваемых случаев подгруппа A разрешима. Фактор-группа $G/A \simeq B$ – π' -группа, а значит π-разрешима. Теперь π-разрешимой становится и группа G.

Следовательно, в группе B только одна максимальная подгруппа, поэтому B – циклическая p-группа для некоторого простого p.

Если $|B|>p$, то максимальная подгруппа из B будет нееденичной нормальной подгруппой группы G, фактор-группа по которой π-разрешима по индукции. Значит, $|B|=p$. Ясно, что $p>3$. В этом случае группа G разрешима либо по лемме 7 либо по лемме 8.

***Следствие* 1.** *Если в группе G существует* $S_\pi(G)$ *-полунормальная π-холлова подгруппа A нечетного порядка, то G π-разрешима.*

***Следствие* 2.** *Если в группе G существует полунормальная π-холлова подгруппа нечетного порядка, то G π-разрешима.*

Если в теореме 1 положить $\pi=p$, где p некоторый простой делитель $|G|$, то получаем

***Следствие* 3.** Если в группе G силовская p-подгруппа A $S_p(G)$ -перестановочна с каждой собственной подгруппой из добавления к A в G, то группа G p-разрешима.

***Следствие* 4.** Если в группе G силовская p-подгруппа полунормальна, то G p-разрешима.

Доказательство теоремы 2. Применим индукцию по порядку группы G. Предположим, что $X = S(G) \neq 1$. Рассмотрим фактор-группу G/X. Ясно, что AX/X – 2-нильпотентная π-холлова подгруппа нечетного индекса в G/X и $G/X=(AX/X)(BX/X)$. Далее, повторяя рассуждения соответствующей части доказательства теоремы 1, приходим к выводу, что условия теоремы наследуются фактор-группой G/X. По индукции фактор-группа G/X разрешима, поэтому группа G разрешима.

Значит, можно считать, что $X=S(G)=1$. В этом случае подгруппа A перестановочна со всеми собственными подгруппами из B и A становится полунормальной подгруппой группы G. По лемме 3 нормальная оболочка A^G подгруппы A в группе G разрешима. Если $A^G = G$, то теорема верна. Значит, будем считать, что A^G – собственная в G подгруппа. Рассмотрим фактор-группу G/A^G. По лемме об индексах

$$|G:A| = |G:A^G|\,|A^G:A|.$$

По условию теоремы $|G:A|$ – нечетное число. Значит и индекс $|G:A^G|$ также нечетен, а фактор-группа G/A^G разрешима как подгруппа нечетного порядка. Теперь разрешима и группа G.

***Следствие* 5.** Если в группе G существует полунормальная 2-нильпотентная подгруппа нечетного индекса, то G разрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Княгина, В.Н.* Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.

2. *Монахов, В.С.* Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В.С. Монахов // Математические заметки. – 2006. – Т. 80, Вып. 4. – С. 573–581.

3. *Skiba, A.N.* *H*-permutable subgroups / A.N. Skiba // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2003. – № 4 (19). – С. 37–39.

4. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.

4. *Монахов, В.С.* Произведение разрешимой и циклической групп / В.С. Монахов // YI Всесоюзный симпозиум по теории групп: Сборник научных трудов под редакцией С.Н. Черникова / Киев: Навукова думка. – 1980. – С. 188–195.

5. *Сыскин, С.А.* Об одном вопросе Р.Бэра / С.А. Сыскин // Сибирский математический журнал. – 1979. – Т. 20, № 3. – С. 679–681.

Поступила в редакцию 10.03.10.