Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 5(8), Проблемы взаимодействия излучения с веществом, 2001

Разложение по плоским волнам и интегральные преобразования между $\vec{x}$- и $\vec{r}$- представлениями

В.Н.Капшай
Кафедра теоретической физики,
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
ул. Советская 104, 246019, Гомель Беларусь
Тел: 57-82-53; email: kvn@gsu.unibel.by

Интегральные уравнения для волновой функции (ВФ) связанной системы двух (не)релятивистских частиц в импульсном представлении могут быть записаны в виде

$$G_0^{-1}(E,\vec{p})\Psi(\vec{p}) = -(2\pi)^{-3}\int V(\vec{p},\vec{k},E)\Psi(\vec{k})d\vec{k}. \tag{1}$$

При этом в нерелятивистсткой квантовой механике потенциал $V(\vec{p},\vec{k},E)$ обычно зависит только от евклидовой разности двух векторов: $V(\vec{p},\vec{k},E) = V(\vec{p}-\vec{k})$. В этом случае для перехода в $\vec{x}$- представление (координатное) применяется разложение всех величин по нерелятивистским плоским волнам $\exp(i\vec{p}\vec{x})$, соответствующее интегральное преобразование (ИП) ВФ есть ИП Фурье:

$$\Psi(\vec{x}) = (2\pi)^{-3}\int \exp(i\vec{p}\vec{x})\Psi(\vec{p})d\vec{p}, \tag{2}$$

$$\Psi(\vec{p}) = \int \exp(-i\vec{p}\vec{x})\Psi(\vec{x})d\vec{x}. \tag{3}$$

Уравнение (1) нерелятивистской теории принимает в $\vec{x}$- представлении вид дифференциального уравнения с локальным потенциалом $V(\vec{x})$.

Разложение по плоским волнам $\exp(i\vec{p}\vec{x})$ в уравнении (1) можно осуществлять и в релятивистской теории, например, в ковариантном одновременном подходе [1], однако в этом случае уравнение в $\vec{x}$- представлении будет интегро-дифференциальным [2], [3], а потенциал $V(\vec{x},\vec{y})$- нелокальным.

Другое разложение всех величин теории — по релятивистским плоским волнам [4]

$$\xi(\vec{r},\vec{p}) = ((\omega_p - \vec{n}\vec{p})/m)^{-1-imr}, \qquad \omega_p = \sqrt{\vec{p}^2+m^2} \tag{4}$$

— применяется для релятивистских уравнений квазипотенциальной теории [5], например, для ВФ имеем следующее ИП Шапиро:

$$\Psi(\vec{r}) = (2\pi)^{-3}\int \xi(\vec{r},\vec{p})\Psi(\vec{p})md\vec{p}/\omega_p, \tag{5}$$

$$\Psi(\vec{p}) = \int \xi^*(\vec{r},\vec{p})\Psi(\vec{r})d\vec{r}. \tag{6}$$

В этом случае уравнение в $\vec{r}$- представлении (релятивистском конфигурационном) имеет простой вид, когда потенциал $V(\vec{p},\vec{k},E)$ зависит только от разности векторов $\vec{p}(-)\vec{k}$ в пространстве Лобачевского, тогда оно является дифференциально-разностным.

Ввиду полноты и ортонормированности релятивистских плоских волн (4) разложение по ним в принципе можно осуществлять и в нерелятивистской теории.

Переходы в $\vec{x}$- представление и в $\vec{r}$- представление осуществляются из импульсного. Можно, однако, связать ВФ в $\vec{x}$- и $\vec{r}$- представлениях непосредственно:

$$\Psi(\vec{r}) = \int M(\vec{r}, \vec{x})\Psi(\vec{x})d\vec{x}, \tag{7}$$

$$\Psi(\vec{x}) = \int N(\vec{x}, \vec{r})\Psi(\vec{r})d\vec{r}. \tag{8}$$

Ядра этих ИП определяются так:

$$M(\vec{r}, \vec{x}) = (2\pi)^{-3} \int \xi(\vec{r}, \vec{p}) \exp(-i\vec{p}\vec{x})md\vec{p}/\omega_p, \tag{9}$$

$$N(\vec{x}, \vec{p}) = (2\pi)^{-3} \int \exp(i\vec{p}\vec{x})d\vec{p}\xi^*(\vec{r}, \vec{p}). \tag{10}$$

Осуществим парциальное разложение всех функций теории, например, для нерелятивистских и релятивистских плоских волн имеем ($\sum\limits_{l,m} = \sum\limits_{l=0}^{\infty}\sum\limits_{m=-l}^{l}$)

$$\exp(i\vec{p}\vec{x}) = \sum_{l,m} 4\pi i^l j_l(px) Y_{lm}(\vec{n}_x) Y^*_{lm}(\vec{n}_p), \tag{11}$$

$$\xi(\vec{r}, \vec{k}) = \sum_{l,m} 4\pi i^l p_l(r, \chi_k) Y_{lm}(\vec{n}_r) Y^*_{lm}(\vec{n}_k), \tag{12}$$

где $j_l(px)$- сферические функции Бесселя,

$$p_l(r, \chi_k) = (-i)^l \sqrt{\frac{\pi}{2 \operatorname{sh} \chi_k}} \frac{\Gamma(irm + l + 1)}{\Gamma(irm + 1)} P^{-l-1/2}_{irm-1/2}(\operatorname{ch} \chi_k) \tag{13}$$

а P^{ν}_{μ}- функции Лежандра 1 рода.
Аналогично для ядер M и N получаем

$$M(\vec{r}, \vec{x}) = \sum_{l,m} M_l(r, x) Y_{lm}(\vec{n}_r) Y^*_{lm}(\vec{n}_x), \tag{14}$$

$$N(\vec{x}, \vec{r}) = \sum_{l,m} N_l(x, r) Y_{lm}(\vec{n}_x) Y^*_{lm}(\vec{n}_r). \tag{15}$$

Парциальные компоненты ядер M и N могут быть найдены как

$$M_l(r, x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} p_l(r, \chi_k) j_l(kx) mk^2 dk/\omega_k, \tag{16}$$

$$N_l(x, r) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} j_l(kx) p^*_l(r, \chi_k) k^2 dk. \tag{17}$$

Вычисление этих интегралов дает следующий явный вид парциальных ядер M_l и N_l:

$$M_l(r,x) = \frac{(-i)^l}{2^l}\frac{m^2}{x}\frac{\Gamma(irm+l+1)}{\Gamma(irm+1)}\frac{K_{irm}(mx)}{\Gamma(1+\frac{l}{2}+\frac{irm}{2})\Gamma(1+\frac{l}{2}-\frac{irm}{2})}, \tag{18}$$

$$N_l(x,r) = \frac{i^l}{2^l}\frac{2m}{x^2}\frac{\Gamma(-irm+l+1)}{\Gamma(-irm+1)}\frac{K_{irm}(mx)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{l}{2}+\frac{irm}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{l}{2}-\frac{irm}{2})}. \tag{19}$$

Здесь $K_{irm}(x)$- функции Макдональда.

Таким образом, ИП для парциальных ВФ в $\vec{x}$- и $\vec{r}$- представлениях

$$\Psi_l(r) = \int M_l(r,x)\Psi_l(x)x^2dx, \tag{20}$$

$$\Psi_l(x) = \int N_l(x,r)\Psi_l(r)r^2dr \tag{21}$$

являются обобщениями ИП Конторовича-Лебедева (прямого и обратного), а в простейшем частном случае $l=0$ совпадают с результатом, полученным в [3].

Парциальные ядра M_l и N_l имеют следующие свертки:

$$\int M_l(r,x)N_l(x,r')x^2dx = \frac{1}{rr'}\delta(r-r'), \tag{22}$$

$$\int N_l(x,r)M_l(r,x')r^2dr = \frac{1}{xx'}\delta(x-x'). \tag{23}$$

Приведем также связь нелокальных в общем случае потенциалов в $\vec{x}$- и $\vec{r}$- представлениях:

$$V(\vec{r},\vec{r}',E) = \int M(\vec{r},\vec{x})V(\vec{x},\vec{y},E)M^*(\vec{r}',\vec{y})d\vec{x}d\vec{y}, \tag{24}$$

$$V(\vec{x},\vec{y},E) = \int N(\vec{x},\vec{r})V(\vec{r},\vec{r}',E)N^*(\vec{y},\vec{r}')d\vec{r}d\vec{r}'. \tag{25}$$

Для парциальных нелокальных потенциалов ИП имеют вид

$$V_l(r,r',E) = \int_0^\infty\int_0^\infty M_l(r,x)V_l(x,y,E)M_l^*(r',y)x^2dxy^2dy, \tag{26}$$

$$V_l(x,y,E) = \int_0^\infty\int_0^\infty N_l(x,r)V_l(r,r',E)N_l^*(y,r')r^2drr'^2dr'. \tag{27}$$

Из формул (24)-(27) следует, что локальному в $\vec{x}$-($\vec{r}$-) представлении потенциалу $V(\vec{x},\vec{y},E) = V(\vec{x},E)\delta(\vec{x}-\vec{y})$ $(V(\vec{r},\vec{r}',E) = V(r,E)\delta(\vec{r}-\vec{r}'))$ соответствует нелокальный потенциал в $\vec{r}$-($\vec{x}$-) представлении.

Abstract. Two methods of expansion of a quantum system wave function giving in momentum representation on plane waves are considered:

a) the expansion on nonrelativistic plane waves $exp(i\vec{p}\vec{x})$,

b) the expansion on relativistic plane waves $\xi(\vec{r},\vec{p}) = ((p_0-\vec{p}\vec{n})/m)^{-1-imr}$.

Formulas connecting wave functions in $\overrightarrow{x}-$ and $\overrightarrow{r}-$ representations are discussed.

The partial expansion of all magnitudes of the approach is made. As a result an explicit form of direct and inverse integral transformations for partial wave functions is found. The kernels of these transformations are expressed in terms of McDonald functions and Γ - functions.

It is shown, that the obtained integral transformations are some generalizations of direct and inverse Kontorovich-Lebedev transformations.

Литература

[1] Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. *Quasi-Optical Approach in Quantum Field Theory,* Nuovo Cimento, **29** (1963), 380–399.

[2] Хрусталев О.А. *Квазипотенциальное уравнение в $\vec{x}$-пространстве,* Препринт ИФВЭ 69–24, 1969.

[3] Архипов А.А., Саврин В.И. *Об одном методе решения квазипотенциального уравнения,* ТМФ, Т53, №3 (1982), 342–357.

[4] Шапиро И.С. *Разложение волновой функции по неприводимым представлениям группы Лоренца,* ДАН СССР, **106** (1956), 647.

[5] Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. *Quasipotential Approach and the Expansion in Relativistic Spherical Functions,* Nuovo Cimento, **55A** (1968), 233–257.

Гомельский госуниверситет
им. Франциска Скорины
246699 Гомель, Беларусь

Поступило 15.06.2001