Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 5(8), Проблемы взаимодействия излучения с веществом, 2001

Сведение уравнений Максвелла для радиально-одноосных неоднородных сред к двум независимым скалярным уравнениям

В.А.Карпенко, В.Н.Могилевич

Институт прикладной оптики НАН Беларуси

Сведение (редукция) уравнений электродинамики к скалярным уравнениям существенно упрощает решение задач о дифракции и распространении волн [1, 2]. Математическая формулировка задачи о редукции и некоторые ее решения в форме, не связанной с выбором ортогональной системы координат, представлены в [3].

В настоящей работе рассмотрена среда без дисперсии, характеризуемая тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей, имеющими инвариантную форму

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) r^{-2} \underline{r} \cdot \underline{r}, \quad \mu = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) r^{-2} \underline{r} \cdot \underline{r}, \tag{1}$$

где $\underline{r}$−радиус-вектор точки наблюдения, $\underline{r} \cdot \underline{r}$−диада двух векторов, $r = |\underline{r}|$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(r)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\underline{r})$ и $\mu_1 = \mu_1(r)$, $\mu_2 = \mu_2(\underline{r})$−собственные значения тензоров ε и μ, являющиеся произвольными функциями своих аргументов. Известно, что в среде без дисперсии уравнения Максвелла

$$\begin{gathered} \mathrm{rot}\underline{E} = -\mu \nabla_t \underline{H}, \quad (\underline{\nabla}\, \mu\, \underline{H}) = 0, \\ \mathrm{rot}\underline{H} = \varepsilon \nabla_t \mathrm{\underline{E}}, \quad (\underline{\nabla}\, \varepsilon\, \underline{E}) = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

описывают два типа волн. Покажем, что один из типов волн (полей) в среде (1) выражается через псевдоскалярную функцию координат и времени φ посредством соотношений

$$\underline{E}_1 = \nabla_t \mathrm{rot}\underline{r}\, \varphi, \quad \underline{H}_1 = -\mu^{-1} \mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\underline{r}\, \varphi. \tag{3}$$

Здесь и в (2) ∇_t−частная производная по времени. Напряженности электрического $\underline{E}_1$ и магнитного $\underline{H}_1$ полей (3) удовлетворяют первому, второму и четвертому уравнениям из (2) при произвольном φ. Из третьего уравнения следует скалярное уравнение относительно φ, его вывод представлен ниже.

Предварительно введем в рассмотрение антисимметричный тензор $\underline{r}^{\times}$, дуальный вектору $\underline{r}$ [4], и вектор-оператор, коммутирующий с произвольной функцией аргумента $r = |\underline{r}|$:

$$\mathrm{rot}\, \underline{r} = -\underline{r}^{\times} \underline{\nabla} = \underline{\nabla}\, \underline{r}^{\times} = -\underline{r}\, \mathrm{rot}, \tag{4}$$

где $\underline{\nabla}$−оператор градиента. С помощью (4) правая часть третьего уравнения из системы (2) с учетом (1) и (3) легко преобразуется к виду

$$\varepsilon \nabla_t \underline{E}_1 = \mathrm{rot}\, \underline{r}\, \varepsilon_1 \nabla_t^2 \varphi, \tag{5}$$

поскольку $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(r)$. В соответствии с формулировкой задачи о редукции [3] третье векторное уравнение из (2) может быть сведено к одному скалярному уравнению лишь при условии, что его левая часть представима следующим образом:

$$\mathrm{rot}\, \underline{H}_1 = \mathrm{rot}\, \underline{r}\, \rho \varphi, \tag{6}$$

где ρ—скалярный дифференциальный оператор. Тогда уравнение относительно φ будет однородным:

$$(\rho - \varepsilon_1 \nabla_t^2)\varphi = 0, \tag{7}$$

поскольку источники поля в (2) отсутствуют. Задача заключается в преобразовании выражения

$$\mathrm{rot}\underline{H}_1 = -\mathrm{rot}\left[\mu_1^{-1} + (\mu_2^{-1} - \mu_1^{-1})r^{-2}\underline{r}\cdot\underline{r}\right]\mathrm{rot\,rot}\underline{r}\,\varphi, \tag{8}$$

в квадратных скобках которого выписан в явном виде тензор μ^{-1}. Очевидно, что

$$-\mathrm{rot}(\mu_2^{-1} - \mu_1^{-1})r^{-2}\underline{r}\cdot\underline{r}\,\mathrm{rot\,rot}\underline{r}\,\varphi = -\mathrm{rot}\,\underline{r}\,\left[(\mu_2^{-1} - \mu_1^{-1})r^{-2}(\underline{r}\,\mathrm{rot\,rot}\underline{r})\right]\varphi. \tag{9}$$

В правой части (9) величина $(\underline{r}\,\mathrm{rot\,rot}\underline{r})$ есть скалярный дифференциальный оператор. Поэтому остается преобразовать вектор

$$-\mathrm{rot}\mu_1^{-1}\mathrm{rot\,rot}\underline{r}\,\varphi \tag{10}$$

к виду правой части равенства (6). Для этого воспользуемся единичным тензором $r^{-2}(\underline{r}\cdot\underline{r} - \underline{r}^\times\underline{r}^\times)$, с помощью которого и операторных равенств (4) вектор (10) представим таким образом:

$$-\mathrm{rot}\mu_1^{-1}\mathrm{rot\,rot}\underline{r}\,\varphi = -\mathrm{rot}\mu_1^{-1}r^{-2}(\underline{r}\cdot\underline{r} - \underline{r}^\times\underline{r}^\times)\mathrm{rot\,rot}\underline{r}\,\varphi =$$
$$= -\mathrm{rot}\underline{r}(\underline{\nabla}\,\mu_1^{-1}r^{-2}\underline{r}^\times\underline{r}^\times\underline{\nabla})\varphi + \mathrm{rot}\mu_1^{-1}r^{-2}\underline{r}^\times\underline{r}^\times(\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla} - \triangle)\underline{r}\varphi,$$

где $(\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla} - \triangle) = \mathrm{rot\,rot}$, $\triangle = (\underline{\nabla}\,\underline{\nabla})$—оператор Лапласа. Преобразуя последний член в полученном выражении, необходимо кроме (4) учесть, что

$$\triangle\,\underline{r}\varphi = \underline{r}\triangle\varphi + 2\underline{\nabla}\varphi,\ \ \underline{r}^\times\underline{r}^\times = \underline{r}\cdot\underline{r} - r^2,\ \ \mathrm{rot}\underline{\nabla}\varphi = 0,$$

а также операторные равенства

$$r^{-2}(\underline{r}\,\underline{\nabla}) = r(\underline{\nabla}\,\underline{r})r^{-3},\ \ (\underline{\nabla}\,\underline{r}) - 2 = (\underline{r}\,\underline{\nabla}) + 1 = r^{-1}(\underline{r}\,\underline{\nabla})r.$$

Тогда получаем

$$-\mathrm{rot}\mu_1^{-1}\mathrm{rot\,rot}\underline{r}\,\varphi = \mathrm{rot}\underline{r}\,r(\underline{\nabla}r^{-2}\mu_1^{-1}\underline{\nabla})r\,\varphi.$$

Теперь, принимая во внимание (9), уравнение (7) можно записать в явном виде:

$$\left[r(\underline{\nabla}r^{-2}\mu_1^{-1}\underline{\nabla})r - (\mu_2^{-1} - \mu_1^{-1})r^{-2}(\underline{r}\,\mathrm{rot\,rot}\underline{r}) - \varepsilon_1\nabla_t^2\right]\varphi = 0. \tag{11}$$

Таким образом, соотношения (3), (11) описывают один из двух возможных типов решений системы (2) для среды (1).

Подобное описание второго типа решений можно получить, используя симметрию уравнений (2) относительно замен: $\underline{E} \rightleftharpoons H$, $\varepsilon \rightleftharpoons -\mu$. Такой же симметрией обладают решения системы уравнений (2). Поэтому, производя в (3) и (11) следующие замены: $\underline{E}_1 \to \underline{H}_2$, $\underline{H}_1 \to \underline{E}_2$, $-\mu^{-1} \to \varepsilon^{-1}$, $\varphi \to \psi$, $-\mu_i^{-1} \to \varepsilon_i^{-1}$ $(i = 1, 2)$, $\varepsilon_1 \to -\mu_1$, получим

$$\underline{E}_2 = \varepsilon^{-1}\mathrm{rot\,rot}\underline{r}\psi,\ \ \underline{H}_2 = \nabla_t\mathrm{rot}\underline{r}\,\psi, \tag{12}$$

$$\left[r(\underline{\nabla}r^{-2}\varepsilon_1^{-1}\underline{\nabla})r - (\varepsilon_2^{-1} - \varepsilon_1^{-1})r^{-2}(\underline{r}\mathrm{rot\,rot}\underline{r}) - \mu_1\nabla_t^2\right]\psi = 0. \tag{13}$$

Очевидно, что выражения полей (12) удовлетворяют системе (2), если скалярная функция координат и времени ψ подчиняется скалярному уравнению (13).

Уравнения (11), (13) имеют смысл при произвольных зависимостях $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\underline{r})$ и $\mu_2 = \mu_2(\underline{r})$, но при условии непрерывности функций $\varepsilon_2 = \varepsilon(r)$, $\mu_2 = \mu(r)$. Если на некоторой границе раздела $r = a = \text{const}$ ε_1 и μ_1 испытывают скачок, то условие непрерывности касательных компонент электрического и магнитного полей на сфере $r = a$ эквивалентно требованию непрерывности функций φ, $\mu_1^{-1}(\underline{r}\,\underline{\nabla})r\varphi$ и ψ, $\varepsilon_1^{-1}(\underline{r}\,\underline{\nabla})r\psi$. Это можно показать, исходя из выражений (3) и (12). Так, из (3) видно, что электрическое поле является касательным и сохраняется непрерывным при условии непрерывности φ при $r = a$. Касательное магнитное поле определяется равенством

$$-r^{-2}\underline{r}^{\times}\underline{r}^{\times}\underline{H}_1 = r^{-3}\underline{r}^{\times}\underline{r}^{\times}\underline{\nabla}\mu_1^{-1}(\underline{r}\,\underline{\nabla})r\varphi,$$

из которого видно, что его правая часть будет непрерывной, если при $r = a$ непрерывна функция $\mu_1^{-1}(\underline{r}\,\underline{\nabla})r\varphi$, поскольку оператор дифференцирования $\underline{r}^{\times}\underline{r}^{\times}\underline{\nabla}$ не содержит производной по направлению нормали к поверхности сферы $r = a$. Аналогичные соображения применимы к выражениям (12).

Полученный результат редукции уравнений (2) содержит некоторые частные случаи. Так, в случае изотропной однородной среды, для которой $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \text{const}_1$, $\mu_1 = \mu_2 = \text{const}_2$, вследствие операторного равенства

$$r(\underline{\nabla}r^{-2}\underline{\nabla})r = \triangle$$

потенциальные функции φ и ψ удовлетворяют волновому уравнению

$$(\triangle - \varepsilon_1\mu_1\nabla_t^2)\varphi, \psi = 0,$$

причем в выражениях (3) и (12) вектор $\underline{r}$ можно заменить постоянным вектором, направление которого выбирается из соображений простоты получения решения рассматриваемой задачи. В случае изотропной среды в сферической системе координат функции φ и ψ совпадают с потенциалами Дебая [2]. Соотношения (3), (11)–(13) можно рассматривать как другую форму записи уравнений Максвелла (2) для среды (1), где электромагнитное поле $\underline{E}$, $\underline{H}$ представляет собой суперпозицию двух типов решений: $\underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2$, $\underline{H} = \underline{H}_1 + \underline{H}_2$. При этом вид правил дифференцирования (3), (12) и уравнений (11), (13) не связан с выбором ортогональной системы координат. Координатная система может диктоваться условиями конкретной задачи.

Abstract. Elektromagnetic equations in the special case of an inhomogeneous anisotropic dispersion-free medium are reduced to two independent scalar second-order equations.

Литература

[1] Дж.А.Стреттон, *Теория электромагнетизма.* Ленинград–Москва: ГИТТЛ, 1948, с.309–318, 345–370.

[2] В.А.Фок, *Проблема дифракции и распространения электромагнитных волн.* М.: Сов. Радио, 1970. 520 с.

[3] В.А.Карпенко // ДАН БССР. 1983. Т 27. N 2. С.129–131.

[4] Ф.И.Федоров, *Оптика анизотропных сред.* Минск: Академия наук БССР. 1958. 380 с.