Проблемы физики, математики и техники, № 2 (47), 2021

УДК 512.548

О ПОРОЖДАЮЩИХ МНОЖЕСТВАХ *l*-АРНОЙ ГРУППЫ $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. I

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, *Могилёв*

ON SETS OF GENERATORS OF *l*-ARY GROUP $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. I

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, *Mogilev*

Устанавливается связь между порождающими множествами группы A и порождающими множествами полиадической группы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ с l-арной операцией $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая определяется на k-ой декартовой степени произвольной группы A для любого целого $l \geq 2$ и любой подстановки σ из множества $\mathbf{S}_k$ всех подстановок множества $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Ключевые слова: *группа*, *l-арная группа*, *порождающее множество.*

The relationship between sets of generators in group A and sets of generators in polyadic group $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ with l-ary operation $[\ ]_{l,\sigma,k}$, that is defined on Cartesian power A^k of group A for arbitrary integer $l \geq 2$ and arbitrary substitution σ from the set $\mathbf{S}_k$ of all substitutions of the set $\{1, 2, \ldots, k\}$ is described.

Keywords: *group*, *l-ary group*, *set of generators.*

Введение

Ранее автором изучались порождающие множества l-арной полугруппы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ с l-арной операцией $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая определяется на k-ой декартовой степени A^k произвольной полугруппы A для любого целого $l \geq 2$ и любой подстановки σ из множества $\mathbf{S}_k$ всех подстановок множества $\{1, 2, \ldots, k\}$. Данная статья посвящена изучению порождающих множеств l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$.

Частными случаями ($l = k + 1$, $\sigma = (12 \ldots k)$) l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ являются две полиадические операции Э. Поста [1], одну из которых он определил на декартовой степени симметрической группы**,** вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Систематическому изучению свойств операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ посвящена монография [2].

1 Предварительные сведения

***Теорема* 1.1** [2]. *Пусть A – полугруппа*, $\mathrm{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k$, $i = 1, 2, \ldots, l$. *Тогда*

$$[\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 \ldots \mathrm{x}_l]_{l,\sigma,k} = (y_1, y_2, \ldots, y_k),$$

где $y_j = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_{l\sigma^{l-1}(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Если в универсальной алгебре $< A, [\ ] >$ с одной l-арной операцией $[\ ]\colon A^l \to A$ для любого $i = 1, \ldots, l-1$ выполняется тождество ассоциативности

$$[[a_1 \ldots a_l]a_{l+1} \ldots a_{2l-1}] =$$
$$[a_1 \ldots a_i[a_{i+1} \ldots a_{i+l}]a_{i+l+1} \ldots a_{2l-1}],$$

то такую универсальную алгебру называют *l-арной полугруппой*, а l-арную операцию $[\ ]$ – *ассоциативной.*

l-Арная полугруппа $< A, [\ ] >$ называется *l-арной группой*, если в ней для любого $i = 1, 2, \ldots, l$ и всех $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_l \in A$ однозначно разрешимо уравнение

$$[a_1 \ldots a_{i-1}x_ia_{i+1} \ldots a_l] = b.$$

Необходимую информацию можно найти в [3]–[9].

***Теорема* 1.2** [2]. *Если A – группа*, *подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$*, *то* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *– l-арная группа.*

Свойства l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ подробно описаны в [2]. В частности, доказано, что в ней нет единиц, если σ – нетождественная подстановка.

Для любого элемента a l-арной группы $< A, [\ ] >$ решение уравнения $[x\underbrace{a \ldots a}_{l-1}] = a$ обозначают символом $\bar{a}$ и называют косым элементом для a.

Для любого подмножества M l-арной группы $< A, [\ ] >$ полагают

$$\bar{M} = \{\,\bar{a} \mid a \in M\}.$$

Согласно соответствующему определению для произвольных универсальных алгебр, l-арная подгруппа $< B, [\ ] >$ l-арной группы $< A, [\ ] >$ называется *порожденной* множеством $M \subseteq A$, если она совпадает с пересечением всех l-арных подгрупп $< C, [\ ] >$ *из* $< A, [\ ] >$ таких, что $M \subseteq C$. Множество M в этом случае называют *порождающим для* $< B, [\ ] >$.

Порождающее множество l-арной группы $< A, [\ ] >$ называют *неприводимым*, если любое его собственное подмножество не порождает $< A, [\ ] >$. Если порождающее множество l-арной группы $<A, [\ ]>$ конечно, то $<A, [\ ]>$ называют *конечно порождённой*. Если порождающее множество l-арной группы $<A, [\ ]>$ состоит из n элементов, то $<A, [\ ]>$ называют *n-порождённой*.

Известно, что *подгруппа B группы A порождается множеством $M \subseteq A$ тогда и только тогда, когда каждый элемент b из B либо совпадает с некоторым элементом из M, либо является произведением степеней элементов из M*.

По другому критерию, *подгруппа B группы A порождается множеством $M \subseteq A$ тогда и только тогда, когда каждый элемент b из B либо совпадает с некоторым элементом из $M \cup M^{-1}$, либо является произведением элементов из M и обратных к ним, то есть*

$$b = m_1^{\varepsilon_1} \ldots m_r^{\varepsilon_r},\ m_i \in M,\ \varepsilon_i = \pm 1,\ r = 1, 2 \ldots$$

или, что то же самое,

$$b = m_1 \ldots m_r,\ m_i \in M \cup M^{-1},\ r = 1, 2 \ldots.$$

Порождающее множество неединичной группы может содержать её единицу, которую можно удалить, так как она совпадает как с нулевой степенью любого элемента a из порождающего множества, так и с произведением aa^{-1}. Поэтому далее в статье всегда порождающее множество M группы A не содержит её единицу.

Следующие две теоремы являются многоместными аналогами приведённых выше критериев порождаемости группы.

***Теорема* 1.3** [4]. *l-Арная подгруппа $<B, [\ ]>$ l-арной группы $<A, [\ ]>$ порождается множеством $M \subseteq A$ тогда и только тогда, когда каждый элемент b из B либо совпадает с некоторым элементом из M, либо может быть представлен в виде*

$$b = [m_1 \ldots m_{r(l-1)+1}],\ r = 1, 2 \ldots,$$

где в правой части все элементы под знаком l-арной операции являются степенями элементов из M.

***Теорема* 1.4** [9]. *l-Арная подгруппа $<B, [\ ]>$ l-арной группы $<A, [\ ]>$ порождается множеством $M \subseteq A$ тогда и только тогда, когда каждый элемент b из B либо совпадает с некоторым элементом из M, либо может быть представлен в виде*

$$b = [m_1 \ldots m_{r(l-1)+1}],\ m_i \in M \cup \bar{M},\ r = 1, 2 \ldots.$$

***Замечание* 1.1**. Если в порождающем множестве M l-арной группы $<A, [\ ]>$ имеется элемент c, который с помощью l-арной операции $[\ ]$ и унарной операции $\bar{\ }$ взятия косого элемента выражается через другие элементы множества M, то есть

$$c = [m_1 \ldots m_{r(l-1)+1}],\ m_i \in M \cup \bar{M},\ m_i \neq c$$

для некоторого $r = 1, 2, \ldots$, то этот элемент можно удалить из порождающего множества. В этом случае l-арная группа $<A, [\ ]>$ порождается множеством $M \setminus \{c\}$.

2 Порождающее множество $\mathbf{U}(M) \cup \mathbf{U}(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\}$

В данном и в следующих разделах будет получен положительный ответ на следующий

***Вопрос* 2.1**. *Можно ли, зная порождающее множество группы A, построить порождающее множество l-арной группы $<A^k, [\ ]_{l, \sigma, k}>$?*

В статье символ 1 будет использоваться не только для обозначения единицы натурального ряда, но и для обозначения единицы группы и единицы полугруппы, если она в ней имеется. Для сокращения записей будем использовать также обозначение.

$$\mathbf{e} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}),$$

где 1 – единица полугруппы (группы).

***Лемма* 2.1.** *Пусть A – полугруппа с единицей* 1, *подстановка σ из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) *если* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in A^k$, *то*

$$[\mathbf{b}\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{c}]_{l, \sigma, k} = (b_1c_1, \ldots, b_kc_k);$$

2) *если* $\mathbf{b}_j = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1},\ b_j,\ \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}) \in A^k$,

$j = 1, 2, \ldots, k$, *то*

$$\mathbf{b} = [\mathbf{b}_1\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{b}_2\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2} \ldots \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{b}_k]_{l, \sigma, k};$$

3) *если для фиксированного* $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$

$$\mathbf{c}_s = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1},\ c_s,\ \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}) \in A^k,\ s = 1, 2, \ldots, r,$$

то

$$[\mathbf{c}_1\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{c}_2\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2} \ldots \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{c}_r]_{l, \sigma, k} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1},\ c_1c_2 \ldots c_r,\ \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j});$$

4) *если* $\mathbf{u}_{js} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1},\ a_{js},\ \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}) \in A^k$,

где $j = 1, 2, \ldots, k$; $s = 1, 2, \ldots, r_j$, *то*

$$(a_{11}a_{12} \ldots a_{1r_1}, a_{21}a_{22} \ldots a_{2r_2}, \ldots, a_{k1}a_{k2} \ldots a_{kr_k}) =$$
$$= [\mathbf{u}_{11}\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{12}\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2} \ldots \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}\ \mathbf{u}_{1r_1}\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}$$
$$\mathbf{u}_{21}\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{22}\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2} \ldots \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}\ \mathbf{u}_{2r_2}\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2} \ldots$$
$$\ldots \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{k1}\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{k2}\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2} \ldots \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{kr_k}]_{l, \sigma, k}.$$

Доказательство. 1), 2) Используется определение операции $[\ ]_{l, \sigma, k}$.

3) Применяется $r - 1$ раз утверждение 1).

4) Согласно 2),

$$(a_{11}a_{12} \ldots a_{1r_1}, a_{21}a_{22} \ldots a_{2r_2}, \ldots, a_{k1}a_{k2} \ldots a_{kr_k}) =$$
$$= [\mathbf{v}_1\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{v}_2\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2} \ldots \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{v}_k]_{l, \sigma, k}, \quad (2.1),$$

где

$$\mathbf{v}_j = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, a_{j1}a_{j2}\ldots a_{jr_j}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}) \in A^k, j = 1, 2, \ldots, k.$$

А в силу 3),

$$\mathbf{v}_j = [\mathbf{u}_{j1}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{j2}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{jr_j}]_{l,\sigma,k}. \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получаем требуемое равенство. □

***Замечание* 2.1**. Равенство из утверждения 2) леммы 2.1 можно заменить более общим равенством

$$\mathbf{b} = [\mathbf{b}_{\alpha(1)}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{b}_{\alpha(2)}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{b}_{\alpha(k)}]_{l,\sigma,k},$$

где α – любая подстановка из $\mathbf{S}_k$.

Для подмножества M полугруппы A с единицей 1, натурального $k \geq 2$ и любого $j = 1, 2, \ldots, k$ положим

$$\mathbf{U}_j(M) = \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}) \mid a \in M\},$$

$$\mathbf{U}(M) = \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{U}_j(M).$$

Ясно, что если $1 \notin M$, то $\mathbf{U}_i(M) \cap \mathbf{U}_j(M) = \varnothing$ для $i \neq j$.

Следующая теорема дает положительный ответ на вопрос 2.1.

***Теорема* 2.1**. *Если группа A порождается множеством M, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ порождается множеством*

$$\mathbf{U}(M) \cup \mathbf{U}(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\}.$$

Доказательство. Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ и пусть $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент из A^k. Так как группа A порождается множеством M, то

$$a_i = b_{i1} \ldots b_{ir_i},\ i = 1, 2, \ldots, k \quad (2.3)$$

для некоторых

$$b_{i1}, \ldots, b_{ir_i} \in M \cup M^{-1},\ i = 1, 2, \ldots, k,\ r_i = 1, 2, \ldots .$$

Положим

$$\mathbf{c}_1 = (a_1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-1}), \mathbf{c}_2 = (1, a_2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-2}), \ldots$$

$$\ldots, \mathbf{c}_k = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k-1}, a_k) \in A^k,$$

$$\mathbf{c}_{11} = (b_{11}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-1}), \ldots, \mathrm{c}_{1r_1} = (b_{1r_1}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-1}) \in A^k,$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{c}_{i1} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{i-1}, b_{i1}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-i}), \ldots$$

$$\ldots, \mathrm{c}_{ir_i} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{i-1}, b_{ir_i}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-i}) \in A^k,$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{c}_{k1} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k-1}, b_{k1}), \ldots, \mathrm{c}_{kr_k} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k-1}, b_{kr_k}) \in A^k.$$

Согласно утверждению 2) леммы 2.1,

$$\mathbf{a} = [\mathbf{c}_1\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{c}_2\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{c}_k]_{l,\sigma,k}. \quad (2.4)$$

Так как ввиду (2.3),

$$\mathbf{c}_i = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{i-1}, a_i = b_{i1} \ldots b_{ir_i}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-i}), i = 1, 2, \ldots, k,$$

то согласно утверждению 3) леммы 2.1,

$$\mathbf{c}_i = [\mathbf{c}_{i1}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{c}_{i2}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{c}_{ir_i}]_{l,\sigma,k}. \quad (2.5)$$

Подставив в (2.4) вместо $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k$ их правые части из (2.5), видим, что элемент $\mathbf{a}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = [\mathbf{c}_{11}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{c}_{12}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{c}_{1r_1}$$

$$\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{c}_{21}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{c}_{22}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{c}_{2r_2}$$

$$\ldots$$

$$\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{c}_{k1}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{c}_{k2}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{c}_{kr_k}]_{l,\sigma,k}, \quad (2.6)$$

где

$$\mathbf{e}, \mathbf{c}_{i1}, \ldots, \mathrm{c}_{ir_i} \in \mathbf{U}(M) \cup \mathbf{U}(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\}$$

для любых $i = 1, 2, \ldots$. Следовательно, по теореме 1.3 l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ порождается множеством $\mathbf{U}(M) \cup \mathbf{U}(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\}$. □

***Замечание* 2.2**. Так как

$$\mathbf{U}(M) \cup \mathbf{U}(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\} = \mathbf{U}(M \cup M^{-1} \cup \{\mathbf{1}\}),$$

то множество $\mathbf{U}(M) \cup \mathbf{U}(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\}$ в формулировке теоремы 2.1 можно заменить множеством $\mathbf{U}(M \cup M^{-1} \cup \{\mathbf{1}\})$.

3 Порождающее множество $\mathbf{U}_j(M) \cup \mathbf{U}_j(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\}$

Далее нам понадобится следующая лемма.

***Лемма* 3.1**. *Пусть A – полугруппа с единицей 1, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, $k \leq l$. Тогда для любых $b \in A$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ существует такое $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$, что*

$$[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-r}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j})\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+r-1}]_{l,\sigma,k} =$$

$$= (\underbrace{1, \ldots, 1}_{i-1}, b, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-i}).$$

Доказательство. Так как $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, то множество

$$\{\sigma(j), \sigma^2(j), \ldots, \sigma^k(j) = j\}$$

совпадает с множеством $\{1, 2, \ldots, k\}$. Поэтому для любого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ существует такое $r \in \{1, \ldots, k\}$, что $i = \sigma^r(j)$, откуда

$$j = \sigma^{k-r}(i). \quad (3.1)$$

Положим

$$[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-r}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j})\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+r-1}]_{l,\sigma,k} =$$

$$= (c_1, \ldots, c_k), \quad (3.2)$$

$$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}) = (b_1, \ldots, b_k). \quad (3.3)$$

Тогда, применяя к левой части равенства (3.2) определение операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, получим

$$c_s = \underbrace{1\ldots1}_{k-r}\, b_{\sigma^{k-r}(s)}\, \underbrace{1\ \ldots\ 1}_{l-k+r-1} = b_{\sigma^{k-r}(s)},\ s = 1, 2, \ldots, k,$$

то есть

$$c_s = b_{\sigma^{k-r}(s)},\ s = 1, 2, \dots, k. \tag{3.4}$$

Кроме того, из того же определения следует, что среди компонент $c_1, \dots, c_k$ одна компонента равна b, а остальные $k - 1$ компонент равны 1.

Так как согласно (3.1), $j = \sigma^{k-r}(i)$, то из (3.3) и (3.4) вытекает $c_i = b_j = b$, а для остальных $k - 1$ компонент с индексами $s \neq i$ имеем $c_s = 1$. Следовательно, верно равенство из условия леммы. □

Следующая теорема позволяет сузить порождающее множество из теоремы 2.1.

***Теорема* 3.1.** *Пусть группа A порождается множеством M, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, k делит $l - 1$. Тогда для любого $j = 1, 2, \dots, k$ l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ порождается множеством*

$$\mathbf{U}_j(M) \cup \mathbf{U}_j(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\} = \mathbf{U}(M \cup M^{-1} \cup \{\mathbf{1}\}).$$

Доказательство. Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ и пусть $\mathbf{a}$ – произвольный элемент из A^k. Так как $\sigma^l = \sigma$, то применима теорема 2.1. Равенство (2.6) из этой теоремы показывает, что он может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_{m(l-1)+1}]_{l,\sigma,k} \tag{3.5}$$

для некоторого $m \geq 2$ и некоторых

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m(l-1)+1} \in \mathbf{U}(M) \cup \mathbf{U}(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\}. \tag{3.6}$$

Так как

$$\mathbf{U}(M) = \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{U}_j(M),\ \mathbf{U}(M^{-1}) = \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{U}_j(M^{-1}),$$

то из (3.6) следует, что для любого $s = 1, \dots, m(l - 1) + 1$ либо $\mathbf{v}_s = \mathbf{e}$, либо $\mathbf{v}_s \in \mathbf{U}_j(M) \cup \mathbf{U}_j(M^{-1})$, либо $\mathbf{v}_s \in \mathbf{U}_i(M) \cup \mathbf{U}_i(M^{-1})$ для некоторого $i = 1, 2, \dots, k$, $i \neq j$. В последнем случае

$$\mathbf{v}_s = (\underbrace{1, \dots, 1}_{i-1},\ b,\ \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i})$$

для некоторого $b \in M \cup M^{-1}$. Тогда по лемме 3.1

$$\mathbf{v}_s = [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-r_i}(\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j})\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+r_i-1}]_{l,\sigma,k} \tag{3.7}$$

для некоторого $r_i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Заменив в (3.5) все $\mathbf{v}_s$, отличные от $\mathbf{e}$ и не принадлежащие множеству $\mathbf{U}_j(M) \cup \mathbf{U}_j(M^{-1})$, их правыми частями из (3.7), получим

$$\mathbf{a} = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{n(l-1)+1}]_{l,\sigma,k} \tag{3.8}$$

для некоторого $n \geq 2$, где

$$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n(l-1)+1} \in \mathbf{U}_j(M) \cup \mathbf{U}_j(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\}.$$

Следовательно, по теореме 1.3 l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M \cup M^{-1} \cup \{1\})$. □

4 Порождающее множество $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$

Для получения основного результата статьи нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

***Лемма* 4.1**. *Пусть A – полугруппа с единицей 1, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, $l = rk + 1$, $r \geq 1$, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$,*

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k),$$

$$\mathbf{a}_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a_i, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k,\ i = 2, \dots, l. \tag{4.1}$$

Тогда

$$[\mathbf{x}\mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k} = (b_1, \dots, b_k),$$

где

$$b_j = x_j a_{k+1} a_{2k+1} \dots a_{rk+1},$$

$$b_s = x_s a_{m_s+1} a_{k+m_s+1} a_{2k+m_s+1} \dots a_{(r-1)k+m_s+1}$$

для любого $s \in \{1, \dots, j - 1, j + 1, \dots, k\}$, m_s однозначно определяется из условия $\sigma^{m_s}(s) = j$.

Доказательство. Положив

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1} = 1, \dots, a_{i(j-1)} = 1, a_{ij} = a_i,$$
$$a_{i(j+1)} = 1, \dots, a_{ik} = 1),\ i = 2, \dots, l,$$

и применив определение операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, получим для любого $s = 1, 2, \dots, k$

$$b_s = x_s a_{2\sigma(s)} \dots a_{k\sigma^{k-1}(s)} a_{(k+1)\sigma^k(s)}$$
$$a_{(k+2)\sigma^{k+1}(s)} \dots a_{(2k)\sigma^{2k-1}(s)} a_{(2k+1)\sigma^{2k}(s)}$$
$$\dots$$
$$a_{((r-1)k+2)\sigma^{(r-1)k+1}(s)} \dots a_{(rk)\sigma^{rk-1}(s)} a_{(rk+1)\sigma^{rk}(s)},$$

откуда, ввиду тождественности подстановки σ^k, следует

$$b_s = x_s a_{2\sigma(s)} \dots a_{k\sigma^{k-1}(s)} a_{(k+1)s}$$
$$a_{(k+2)\sigma(s)} \dots a_{(2k)\sigma^{k-1}(s)} a_{(2k+1)s}$$
$$\dots$$
$$a_{((r-1)k+2)\sigma(s)} \dots a_{(rk)\sigma^{k-1}(s)} a_{(rk+1)s}. \tag{4.2}$$

Так как

$$\sigma(j) \neq j, \dots, \sigma^{k-1}(j) \neq j,$$

то при $s = j$, ввиду (4.1), в правой части равенства (4.2) все сомножители, отличные от элементов

$$x_j,\ a_{(k+1)j} = a_{k+1},\ a_{(2k+1)j} = a_{2k+1},\ \dots,\ a_{(rk+1)j} = a_{rk+1},$$

равны 1. Следовательно,

$$b_j = x_j a_{k+1} a_{2k+1} \dots a_{rk+1}.$$

Если $s \neq j$, то есть $s \in \{1, \dots, j - 1, j + 1, \dots, k\}$, то найдется $m_s \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$ такое, что $\sigma^{m_s}(s) = j$. Поэтому в правой части равенства (4.2) все сомножители, отличные от элементов

$$x_s,\ a_{(m_s+1)\sigma^{m_s}(s)} = a_{(m_s+1)j} = a_{m_s+1},$$
$$a_{(k+m_s+1)\sigma^{m_s}(s)} = a_{(k+m_s+1)j} = a_{k+m_s+1},$$
$$a_{(2k+m_s+1)\sigma^{m_s}(s)} = a_{(2k+m_s+1)j} = a_{2k+m_s+1},$$
$$\dots$$
$$a_{((r-1)k+m_s+1)\sigma^{m_s}(s)} = a_{((r-1)k+m_s+1)j} = a_{(r-1)k+m_s+1},$$

равны 1. Следовательно,

$$b_s = x_s a_{m_s+1} a_{k+m_s+1} a_{2k+m_s+1} \dots a_{(r-1)k+m_s+1}.$$ □

Полагая в лемме 4.1 $l = k + 1$ или, что то же самое, $r = 1$, получим

***Следствие* 4.1.** *Пусть A – полугруппа с единицей 1, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$,*

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k),$$

$$\mathbf{a}_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a_i, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k,\ i = 2, \dots, k + 1,$$

$$[\mathbf{x}\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{k+1}]_{k+1,\sigma,k} = (b_1, \ldots, b_k).$$

Тогда

$$b_j = x_j a_{k+1},\ b_s = x_s a_{m_s+1}$$

для любого $s \in \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, k\}$, *где* m_s *однозначно определяется из условия* $\sigma^{m_s}(s) = j$.

Полагая в следствии 4.1 $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ k)$, получим

***Следствие* 4.2.** *Пусть A – полугруппа с единицей* 1, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$,

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k),$$

$$\mathbf{a}_i = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, a_i, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}) \in A^k,\ i = 2, \ldots, k+1,$$

$$[\mathbf{x}\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{k+1}]_{k+1,(12\ldots k),k} = (b_1, \ldots, b_k).$$

Тогда

$$b_1 = x_1 a_j,\ b_2 = x_2 a_{j-1},\ \ldots,\ b_{j-1} = x_{j-1} a_2,\ b_j = x_j a_{k+1},$$

$$b_{j+1} = x_{j+1} a_k,\ \ldots,\ b_{k-1} = x_{k-1} a_{j+2},\ b_k = x_k a_{j+1}.$$

Доказательство. Так как для цикла $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ k)$ имеем

$$j = \sigma^{j-1}(1) = \sigma^{j-2}(2) = \ldots = \sigma(j-1) = \sigma^k(j) = $$
$$= \sigma^{k-1}(j+1) = \ldots = \sigma^{j+1}(k-1) = \sigma^j(k),$$

то из $\sigma^{m_s}(s) = j$ следует

$$m_1 = j-1,\ m_2 = j-2,\ \ldots,\ m_{j-1} = 1,\ m_j = k,$$

$$m_{j+1} = k-1,\ \ldots,\ m_{k-1} = j+1,\ m_k = j.$$

Подставляя правые части полученных равенств в формулы

$$b_j = x_j a_{k+1},\ b_s = x_s a_{m_s+1}$$

из следствия 4.1, получим требуемые равенства из условия. □

***Замечание* 4.1**. Если в следствии 4.2 положить $j = 1$, то есть

$$\mathbf{a}_i = (a_i, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-1}) \in A^k,\ i = 2, \ldots, k+1,$$

то

$$[\mathbf{x}\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{k+1}]_{k+1,(12\ldots k),k} = (b_1, \ldots, b_k),$$

где

$$b_1 = x_1 a_{k+1},\ b_2 = x_2 a_k,\ \ldots,\ b_{k-1} = x_{k-1} a_3,\ b_k = x_k a_2.$$

Если в следствии 4.2 положить $j = k$, то есть

$$\mathbf{a}_i = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k-1}, a_i) \in A^k,\ i = 2, \ldots, k+1,$$

то

$$[\mathbf{x}\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{k+1}]_{k+1,(12\ldots k),k} = (b_1, \ldots, b_k),$$

где

$$b_1 = x_1 a_k,\ b_2 = x_2 a_{k-1},\ \ldots,\ b_{k-1} = x_{k-1} a_2,\ b_k = x_k a_{k+1}.$$

***Лемма* 4.2.** *Пусть A – группа,* $b \in A$, σ *– цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, $l = rk + 1$, $r \geq 1$. *Тогда в l-арной группе* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *элемент*

$$(\underbrace{b^{-r}, \ldots, b^{-r}}_{j-1}, b^{1-r}, \underbrace{b^{-r}, \ldots, b^{-r}}_{k-j})$$

является косым для элемента

$$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}).$$

Доказательство. Положим

$$[\mathbf{x}\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k} = (b_1, \ldots, b_k),$$

где

$$\mathbf{x} = (\underbrace{b^{-r}, \ldots, b^{-r}}_{j-1}, b^{1-r}, \underbrace{b^{-r}, \ldots, b^{-r}}_{k-j}),$$

$$\mathbf{a}_2 = \ldots = \mathbf{a}_l = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}),$$

то есть

$$[(\underbrace{b^{-r}, \ldots, b^{-r}}_{j-1}, b^{1-r}, \underbrace{b^{-r}, \ldots, b^{-r}}_{k-j})$$
$$\underbrace{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}) \ldots (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j})}_{l-1}]_{l,\sigma,k} =$$
$$= (b_1, \ldots, b_k).$$

Так как в обозначениях леммы 4.1

$$x_j = b^{1-r},\ a_{k+1} = a_{2k+1} = \ldots = a_{rk+1} = b,$$
$$x_s = b^{-r},\ a_{m_s+1} = a_{k+m_s+1} =$$
$$= a_{2k+m_s+1} = \ldots = a_{(r-1)k+m_s+1} = b,$$

то

$$b_j = x_j a_{k+1} a_{2k+1} \ldots a_{rk+1} = b^{1-r} b^r = b,$$
$$b_s = x_s\, a_{m_s+1}\, a_{k+m_s+1}\, a_{2k+m_s+1} \ldots$$
$$\ldots a_{(r-1)k+m_s+1} = b^{-r} b^r = 1$$

для любого $s \in \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, k\}$, где m_s однозначно определяется из условия $\sigma^{m_s}(s) = j$. Таким образом,

$$[(\underbrace{b^{-r}, \ldots, b^{-r}}_{j-1}, b^{1-r}, \underbrace{b^{-r}, \ldots, b^{-r}}_{k-j})$$
$$\underbrace{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}) \ldots (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j})}_{l-1}]_{l,\sigma,k} =$$
$$= (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}).$$ □

Полагая в лемме 4.2 $r = 1$, получим

***Следствие* 4.3.** *Пусть A – группа,* $b \in A$, σ *– цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда в* $(k+1)$*-арной группе* $< A^k, [\ ]_{k+1,\sigma,k} >$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *элемент*

$$(\underbrace{b^{-1}, \ldots, b^{-1}}_{j-1}, 1, \underbrace{b^{-1}, \ldots, b^{-1}}_{k-j})$$

является косым для элемента

$$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}).$$

Полагая в следствии 4.3 $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ k)$, получим

***Следствие* 4.4.** *Пусть A – группа,* $b \in A$. *Тогда в* $(k+1)$*-арной группе* $< A^k, [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k} >$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *элемент*

$$(\underbrace{b^{-1}, \ldots, b^{-1}}_{j-1}, 1, \underbrace{b^{-1}, \ldots, b^{-1}}_{k-j})$$

является косым для элемента

$$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}).$$

Следующая лемма является следствием утверждения 1) леммы 2.1.

Лемма 4.3. *Пусть A – группа, $b \in A$, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, r – целое, $r \geq 1$. Тогда*:

$$(\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1}, b^{-1}, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-j}) =$$

$$= [(\underbrace{b^{-r},\ldots,b^{-r}}_{j-1}, b^{1-r}, \underbrace{b^{-r},\ldots,b^{-r}}_{k-j})$$

$$\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}(\underbrace{b^{r},\ldots,b^{r}}_{j-1}, b^{r-2}, \underbrace{b^{r},\ldots,b^{r}}_{j-1})]_{l,\sigma,k}$$

для любого $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Лемма 4.4. *Пусть A – группа, $b \in A$, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, $l = rk + 1$, $r \geq 1$, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$,*

$$\mathbf{u} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1}, b, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-j}).$$

Тогда:

1) *существуют элементы*

$$\mathbf{u}_{11} = \ldots = \mathbf{u}_{1r}, \ldots, \mathbf{u}_{(j-1)1} = \ldots = \mathbf{u}_{(j-1)r},$$

$$\mathbf{u}_{j1} = \ldots = \mathbf{u}_{j(r-2)},$$

$$\mathbf{u}_{(j+1)1} = \ldots = \mathbf{u}_{(j+1)r}, \ldots, \mathbf{u}_{k1} = \ldots = \mathbf{u}_{kr} \in \mathbf{U}(M)$$

такие, что

$$(\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1}, b^{-1}, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-j}) =$$

$$= [\,\bar{\mathbf{u}}\,\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{11}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{12}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ \ldots\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{1r}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{u}_{(j-1)1}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{(j-1)2}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ \ldots\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{(j-1)r}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}$$

$$\mathbf{u}_{j1}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{j2}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ \ldots\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{j(r-2)}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}$$

$$\mathbf{u}_{(j+1)1}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{(j+1)2}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ \ldots\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{(j+1)r}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{u}_{k1}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{k2}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ \ldots\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{kr}]_{l,\sigma,k}; \qquad (4.3)$$

2) существуют $t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_k \in \{1, 2, \ldots, k\}$ такие, что

$$(\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1}, b^{-1}, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-j}) =$$

$$= [\,\bar{\mathbf{u}}\,\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_1-1}\underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-1}\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_1-2}$$

$$\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_2}\underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-1}\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_2-2}$$

$$\ldots$$

$$\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_{j-1}}\underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-1}\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_{j-1}-2}\underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-2}$$

$$\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_{j+1}}\underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-1}\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_{j+1}-2}$$

$$\ldots$$

$$\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_{k-1}}\underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-1}\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_{k-1}-2}$$

$$\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_k}\underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-1}\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_k-1}]_{l,\sigma,k}. \qquad (4.4)$$

Доказательство. 1) Положив в утверждении 4) леммы 2.1

$$r_1 = \ldots = r_{j-1} = r,\ r_j = r - 2,\ r_{j+1} = \ldots = r_k = r,$$

$$\mathbf{u}_{11} = \mathbf{u}_{12} = \ldots = \mathbf{u}_{1r} = (b, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-1}) \in \mathbf{U}(M),$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{u}_{(j-1)1} = \mathbf{u}_{(j-1)2} = \ldots = \mathbf{u}_{(j-1)r} =$$

$$= (\underbrace{1,\ldots,1}_{j-2}, b, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-j+1}) \in \mathbf{U}(M),$$

$$\mathbf{u}_{j1} = \mathbf{u}_{j2} = \ldots = \mathbf{u}_{j(r-2)} =$$

$$= (\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1}, b, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-j}) \in \mathbf{U}(M),$$

$$\mathbf{u}_{(j+1)1} = \mathbf{u}_{(j+1)2} = \ldots = \mathbf{u}_{(j+1)r} =$$

$$= (\underbrace{1,\ldots,1}_{j}, b, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-j-1}) \in \mathbf{U}(M),$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{u}_{k1} = \mathbf{u}_{k2} = \ldots = \mathbf{u}_{kr} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{k-1}, b) \in \mathbf{U}(M),$$

получим

$$(\underbrace{b^{r},\ldots,b^{r}}_{j-1}, b^{r-2}, \underbrace{b^{r},\ldots,b^{r}}_{j-1}) =$$

$$= [\mathbf{u}_{11}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{12}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ \ldots\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{1r}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{u}_{(j-1)1}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{(j-1)2}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ \ldots\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{(j-1)r}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}$$

$$\mathbf{u}_{j1}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{j2}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ \ldots\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{j(r-2)}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}$$

$$\mathbf{u}_{(j+1)1}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{(j+1)2}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ \ldots\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{(j+1)r}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{u}_{k1}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{k2}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ \ldots\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{u}_{kr}]_{l,\sigma,k}. \qquad (4.5)$$

По лемме 4.2

$$(\underbrace{b^{-r},\ldots,b^{-r}}_{j-1}, b^{1-r}, \underbrace{b^{-r},\ldots,b^{-r}}_{k-j}) =$$

$$= \overline{(\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1}, b, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-j})} = \bar{\mathrm{u}} \in \overline{\mathrm{U}_j(M)} \subseteq \overline{\mathrm{U}(M)}. \qquad (4.6)$$

Подставляя правые части равенств (4.5) и (4.6) в правую часть равенства из формулировки леммы 4.3, получим равенство (4.3).

2) Согласно лемме 3.1, для любого

$$s \in \{1, \ldots, j-1, j+1, ,\ldots, k\}$$

существуют $t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_k \in \{1, 2, \ldots, k\}$ такие, что

$$\mathbf{u}_{11} = \mathbf{u}_{12} = \ldots = \mathbf{u}_{1r} =$$

$$= [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_1}(\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1}, b, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-j})\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_1-1}]_{l,\sigma,k},$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{u}_{(j-1)1} = \mathbf{u}_{(j-1)2} = \ldots = \mathbf{u}_{(j-1)r} =$$

$$= [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_{j-1}}(\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1}, b, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-j})\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_{j-1}-1}]_{l,\sigma,k},$$

$$\mathbf{u}_{(j+1)1} = \mathbf{u}_{(j+1)2} = \ldots = \mathbf{u}_{(j+1)r} =$$
$$= [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_{j+1}}(\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1}, b, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-j})\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_{j+1}-1}]_{l,\sigma,k},$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{u}_{k1} = \mathbf{u}_{k2} = \ldots = \mathbf{u}_{kr} =$$
$$= [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_k}(\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1}, b, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-j})\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_k-1}]_{l,\sigma,k}.$$

С учётом записанных равенств, а также нейтральности в l-арной группе $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ последовательности $\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}$, равенство (4.3) принимает вид (4.4). □

***Теорема* 4.1**. *Пусть группа A порождается множеством M, σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, $l = rk + 1$, $r \geq 1$. *Тогда для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$.

Доказательство. Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ и пусть $\mathbf{a}$ – произвольный элемент из A^k. Равенство (3.4) из теоремы 3.1 показывает, что он может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_{n(l-1)+1}]_{l,\sigma,k} \qquad (4.7)$$

для некоторого $n \geq 2$ и для некоторых

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n(l-1)+1} \in \mathbf{U}_j(M) \cup \mathbf{U}_j(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\}. \qquad (4.8)$$

Из (4.8) следует, что для любого $s = 1, \ldots, n(l-1)+1$, либо $\mathbf{u}_s = \mathbf{e}$, либо $\mathbf{u}_s \in \mathbf{U}_j(M) \cup \mathbf{U}_j(M^{-1})$, либо $\mathbf{u}_s \in \mathbf{U}_i(M) \cup \mathbf{U}_i(M^{-1})$ для некоторого $i = 1, 2, \ldots, k$, $i \neq j$. Таким образом, необходимо рассмотреть пять возможных случаев: 1) $\mathbf{u}_s = \mathbf{e}$; 2) $\mathbf{u}_s \in \mathbf{U}_j(M)$; 3) $\mathbf{u}_s \in \mathbf{U}_j(M^{-1})$; 4) $\mathbf{u}_s \in \mathbf{U}_i(M)$, $i \neq j$; 5) $\mathbf{u}_s \in \mathbf{U}_i(M^{-1})$, $i \neq j$.

В случае 3) имеем

$$\mathbf{u}_s = (\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1}, b^{-1}, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-j}) \qquad (4.9)$$

для некоторого $b \in M$. Тогда согласно утверждению 2) леммы 4.4, равенство (4.9) принимает вид

$$\mathbf{u}_s = [\,\bar{\mathbf{u}}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_1-1}\ \underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-1}\ \mathbf{u}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_1-2}$$

$$\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_2}\ \underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-1}\ \mathbf{u}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_2-2}$$

$$\ldots$$

$$\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_{j-1}}\ \underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-1}\ \mathbf{u}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_{j-1}-2}$$

$$\underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-2}$$

$$\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_{j+1}}\ \underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-1}\ \mathbf{u}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_{j+1}-2}$$

$$\ldots$$

$$\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_{k-1}}\ \underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-1}\ \mathbf{u}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_{k-1}-2}$$

$$\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_k}\ \underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-1}\ \mathbf{u}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_k-1}\,]_{l,\sigma,k} \qquad (4.10)$$

для некоторых $t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_k \in \{1, 2, \ldots, k\}$, где

$$\mathbf{u} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1}, b, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-j}) \in \mathbf{U}_j(M).$$

В случае 4) имеем

$$\mathbf{u}_s = (\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1}, b, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-i})$$

для некоторого $b \in M$. Тогда по лемме 3.1

$$\mathbf{u}_s = [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-r_i}(\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1}, b, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-j})\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+r_i-1}]_{l,\sigma,k} \qquad (4.11)$$

для некоторого $r_i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

В случае 5) имеем

$$\mathbf{u}_s = (\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1}, b^{-1}, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-i})$$

для некоторого $b \in M$. Тогда по лемме 3.1

$$\mathbf{u}_s = [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-r_i}(\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1}, b^{-1}, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-j})\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+r_i-1}]_{l,\sigma,k}$$

для некоторого $r_i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Применив к правой части записанного равенства утверждение 2) леммы 4.4, получим

$$\mathbf{u}_s = [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-r_i}(\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1}, b^{-1}, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-j})\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+r_i-1}]_{l,\sigma,k} =$$

$$= [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-r_i}\ \bar{\mathbf{u}}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_1-1}\ \underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-1}\ \mathbf{u}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_1-2}$$

$$\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_2}\ \underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-1}\ \mathbf{u}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_2-2}$$

$$\ldots$$

$$\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_{j-1}}\ \underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-1}\ \mathbf{u}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_{j-1}-2}$$

$$\underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-2}$$

$$\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_{j+1}}\ \underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-1}\ \mathbf{u}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_{j+1}-2}$$

$$\ldots$$

$$\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_{k-1}}\ \underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-1}\ \mathbf{u}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_{k-1}-2}$$

$$\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{k-t_k}\ \underbrace{\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\ldots\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}}_{r-1}\ \mathbf{u}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+t_k-1}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-k+r_i-1}]_{l,\sigma,k} \qquad (4.12)$$

для некоторых $t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_k \in \{1, 2, \ldots, k\}$, где

$$\mathbf{u} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1}, b, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-j}) \in \mathbf{U}_j(M).$$

Заменив в (4.7) все $\mathbf{u}_s$, отличные от $\mathbf{e}$ и не принадлежащие $\mathbf{U}_j(M)$, их правыми частями из (4.10), (4.11) и (4.12), получим

$$\mathbf{a} = [\mathbf{w}_1 \ldots \mathbf{w}_{v(l-1)+1}]_{l,\,\sigma,\,k}$$

для некоторого $v \geq 2$, где

$$\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{v(l-1)+1} \in \mathbf{U}_j(M) \cup \overline{\mathbf{U}_j(M)} \cup \{\mathbf{e}\}.$$

Следовательно, по теореме 1.4 l-арная группа $< A^k, [\;]_{l,\,\sigma,\,k} >$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$. □

5 Следствия из теоремы 4.1

***Замечание* 5.1**. Ясно, что если в теореме 4.1 порождающее множеством M группы A бесконечно, то его мощность совпадает с мощностью порождающего множества $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ l-арной группы $< A^k, [\;]_{l,\,\sigma,\,k} >$. Для конечного порождающего множества M имеет место

***Следствие* 5.1**. *Если A – n-порожденная группа, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, k делит $l - 1$, то l-арная группа $< A^k, [\;]_{l,\,\sigma,\,k} >$ является $(n + 1)$-порожденной.*

Следующее следствие вытекает из теоремы 4.1 при $l = k + 1$.

***Следствие* 5.2**. *Пусть группа A порождается множеством M, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$. Тогда $(k + 1)$-арная группа $< A^k, [\;]_{k+1,\,\sigma,\,k} >$ порождается множеством $\mathbf{U}_i(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.*

Полагая в теореме 4.1 и следствии 5.2 $\sigma = (1\;2\;\ldots\;k)$, получим ещё два следствия.

***Следствие* 5.3.** *Пусть группа A порождается множеством M, k делит $l - 1$ Тогда l-арная группа группа $< A^k, [\;]_{l,\,(12\,\ldots\,k),\,k} >$ порождается множеством $\mathbf{U}_i(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.*

***Следствие* 5.4.** *Пусть группа A порождается множеством M. Тогда $(k + 1)$-арная группа $< A^k, [\;]_{k+1,\,(12\,\ldots\,k),\,k} >$ порождается множеством $\mathbf{U}_i(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.*

Полагая в следствии 5.4 $k = 2$, получим

***Следствие* 5.5.** *Если группа A порождается множеством M, то тернарная группа $< A^2, [\;]_{3,\,(12),\,2} >$ порождается любым из множеств*

$$\mathbf{U_1}(M) \cup \{(1, 1)\},\ \mathbf{U_2}(M) \cup \{(1, 1)\}.$$

Если в теореме 4.1 и следствиях из неё в качестве группы A взять циклическую группу, то получим соответствующие следствия.

***Следствие* 5.6.** *Пусть циклическая группа A порождается элементом a, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, k делит $l - 1$. Тогда l-арная группа $< A^k, [\;]_{l,\,\sigma,\,k} >$ порождается двухэлементным множеством*

$$\{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}), (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k})\}. \qquad (5.1)$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

***Следствие* 5.7.** *Пусть циклическая группа A порождается элементом a, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$. Тогда $(k + 1)$-арная группа $< A^k, [\;]_{k+1,\,\sigma,\,k} >$ порождается двухэлементным множеством (5.1) для любого $j = 1, 2, \ldots, k$..*

***Следствие* 5.8.** *Пусть циклическая группа A порождается элементом a, k делит $l - 1$ Тогда l-арная группа группа $< A^k, [\;]_{l,\,(12\,\ldots\,k),\,k} >$ порождается двухэлементным множеством (5.1) для любого $j = 1, 2, \ldots, k$..*

***Следствие* 5.9.** *Пусть циклическая группа A порождается элементом a. Тогда $(k + 1)$-арная группа $< A^k, [\;]_{k+1,\,(12\,\ldots\,k),\,k} >$ порождается двухэлементным множеством (5.1) для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.*

***Следствие* 5.10.** *Пусть циклическая группа A порождается элементом a. Тогда тернарная группа $< A^2, [\;]_{3,\,(12),\,2} >$ порождается любым из множеств*

$$\{(a, 1), (1, 1)\},\ \{(1, a), (1, 1)\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

2. *Гальмак*, *А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

3. Dornte, W. Untersuchungen uber einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dornte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

4. *Русаков*, *С.А.* Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Мн.: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

5. *Белоусов*, *В.Д.* n-Арные квазигруппы / В.Д. Белоусов. – Кишинев: Штиинца, 1972. – 228 с.

6. *Ušan*, *J.* n-Groups in the light of the neutral operations / J. Ušan // Mathematika Moravica. – 2003. – Special Vol. – 162 p.

7. *Кулаженко*, *Ю.И.* Полиадические операции и их приложения / Ю.И. Кулаженко. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2014. – 311 с.

8. *Щучкин*, *Н.А.* Введение в теорию n-групп / Н.А. Щучкин. – Волгоград: Принт, 2019. – 236 с.

9. *Гальмак*, *А.М.* Конгруэнии полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск: Беларуская навука, 1999. – 182 с.

Поступила в редакцию 06.04.2021.