Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (93), 2015

УДК 512.542

О решетке τ-замкнутых подформаций однопорожденной формации

В.М. Селькин

Исследовалось строение решетки τ-одформаций однопорожденной формации. Доказано, что для любого подгруппового функтора Скибы τ справедливы следующие утверждения: а) если решетка τ-замкнутых подформаций любой однопорожденной τ-замкнутой формации конечна, то и у любой однопорожденной τ-замкнутой ω-насыщенной формации решетка всех ее τ-замкнутых ω-насыщенных подформаций конечна, б) если решетка τ-замкнутых ω-насыщенных подформаций любой однопорожденной τ-замкнутой ω-насыщенной формации $\mathsf{F} = \tau\mathrm{form(G)}$, где G – p'-группа для некоторого $p \in \omega$, решетка τ-замкнутых подформаций конечна.

Ключевые слова: решетка, формация, τ-замкнутая ω-насыщенная формация, однопорожденная формация, спутник.

The structure of the lattice of τ-closed subformation of one-generated formation is investigated. It is proved that for every subgroup functor of Skiba τ the following statements are true: a) if the lattice of τ-closed subformations of some one-generation τ-closed formation is finite then τ in every one-generated τ-closed ω-saturated formation has the finite lattice of owner τ-closed ω-saturated subformations, б) if the one-generated τ-closed ω-saturated formation $\mathsf{F} = \tau\mathrm{form(G)}$, where G - p'-group for every $p \in \omega$ has the finite lattice of owner τ-closed ω-saturated subformation then this formation has the finite lattice of owner τ-closed sudformations.

Keywords: lattice, formation, τ-closed ω-saturated formations, one-generated formation, satellite.

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используется общепринятая терминология [1]–[4].

В группе G выберем некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Исходя из [3], τ называется подгрупповым функтором Скибы, если выполняются следующие условия:

(1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

(2) для любого эпиморфизма и любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Формация F называется τ-замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathsf{F}$ для любой группы $G \in \mathsf{F}$. Для подгрупповых функторов τ_1 и τ_2 полагают $\tau_1 \le \tau_2$, если $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$ для любой группы G. Подгрупповой функтор τ называется замкнутым, если всегда из того, что $T \in \tau(H)$, $H \in \tau(G)$, следует $T \in \tau(G)$. Символом $\overline{\tau}$ обозначается наименьший замкнутый подгрупповой функтор со свойством $\tau \le \overline{\tau}$.

Пусть ω – произвольное непустое множество простых чисел. Всякая функция вида
$$f : \omega \cup \{\omega'\} \mapsto \{\text{ формации групп}\}$$
называется ω-локальным спутником [4]. Если все значения ω-локального спутника f являются τ-замкнутыми формациями, то f называется τ-замкнутым ω-локальным спутником. Символом $LF_{\omega} < f >$ обозначим класс групп $(G \mid G/O_{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$ для любого произвольного ω-локального спутника f. Пусть $\mathsf{F} = LF_{\omega} < f >$, то говорим, что f – ω-локальный V-спутник формации F. В этом случае мы называем F ω-насыщенной формацией. Если при этом все значения f лежат в F, то f будем называть внутренним ω-локальным V-спутником формации F.

Пусть X – произвольная совокупность групп, p – простое число. Тогда полагают
$$\mathsf{X}(F_p) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathsf{X}), & \text{если } p \in \pi(\mathsf{X}); \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(\mathsf{X}). \end{cases}$$

V-спутник формации $\mathfrak{F}$ называется минимальным τ-значным ω-локальным V-спутником формации $\mathfrak{F}$, если $f(\omega') = \mathrm{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F})$ и $f(p) = \mathrm{form}(\mathfrak{F}(F_p))$ для всех простых $p \in \omega$. Символом $\tau^\omega\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ обозначаем пересечение всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций, содержащих непустое множество групп $\mathfrak{X}$.

Исследование конструкций общей теории решеток при изучении внутреннего строения формаций позволяет находить более удобные решения и схемы доказательств новых результатов [2], [3]. Ряд работ таких известных авторов, как Р. Брайнт, Р. Брайс и Б. Хартли [5], Р. Брайнт и П. Фойя [6], А.Н. Скиб [7], В.П. Буриченко [8] указывает на важность изучения свойств решетки однопорожденной формации. В данной работе рассмотрим вопрос посвященный конечности решетки однопорожденной τ-замкнутой ω-насыщенной формации.

Теорема. Для любого подгруппового функтора Скибы τ справедливы следующие утверждения:

1) если решетка τ-замкнутых подформаций любой однопорожденной τ-замкнутой формации конечна, то и у любой однопорожденной τ-замкнутой ω-насыщенной формации решетка всех ее τ-замкнутых ω-насыщенных подформаций конечна;

2) если решетка τ-замкнутых ω-насыщенных подформаций любой однопорожденной τ-замкнутой ω-насыщенной формации конечна, то и у любой однопорожденной τ-замкнутой формации $\mathfrak{F} = \tau\mathrm{form}(G)$, где G - p'-группа для некоторого $p \in \omega$, решетка τ-замкнутых подформаций конечна.

Некоторые предварительные сведения.

Лемма 1 [9]. Пусть f_i – минимальный τ значный ω-локальный V-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Тогда включение $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ имеет место в том и только в том случае, когда $f_1 \le f_2$.

Лемма 2 [10]. Если $\mathfrak{F} = \tau^\omega\mathrm{form}(\mathfrak{X})$, f – минимальный τ-значный ω-локальный V-спутник формации $\mathfrak{F}$, то следующие утверждения справедливы:

1) $f(\omega') = \tau\,\mathrm{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = \tau\,\mathrm{form}(\mathfrak{X}(F_p))$ для всех $p \in \omega$;

3) $\mathfrak{F} = LF_\omega\langle g\rangle$, где $g(\omega') = \mathfrak{F}$ и $g(p) = f(p)$ при всех $p \in \omega$.

Лемма 3 [3]. Если $\mathfrak{F} = LF_\omega\langle f\rangle$ и $G/O_p(G) \in \mathfrak{F} \cap f(p)$ для некоторого $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Доказательство теоремы. Предположим прежде, что у любой однопорожденной τ-замкнутой формации решетка всех ее τ-замкнутых подформаций конечна. И пусть $\mathfrak{F} = \tau^\omega\mathrm{form}(G)$ – произвольная однопорожденная τ-замкнутая ω-насыщенная формация. Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ имеет лишь конечное множество τ-замкнутых ω-насыщенных подформаций. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная τ-замкнутая ω-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$. И пусть f и h – минимальные τ-значные ω-локальные V-спутники формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно. Тогда, по лемме 1, имеет место $h(a) \subseteq f(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Но, согласно лемме 2, имеет место $f(\omega') = \tau\mathrm{form}(G/O_\omega(G))$, $f(p) = \mathrm{form}(G/F_p(G))$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$ и $f(p) = \varnothing$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(G)$. Таким образом, имеется лишь конечное множество возможных вариантов для вложений $h(a) \subseteq f(a)$, и поэтому имеется лишь конечное множество возможных вариантов для вложений $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

Предположим теперь, что у любой однопорожденной τ-замкнутой ω-насыщенной формации решетка всех ее τ-замкнутых ω-насыщенных подформаций конечна. И пусть $\mathfrak{F} = \tau\mathrm{form}(G)$ – произвольная однопорожденная τ-замкнутая формация, где G – p'-группа для некоторого $p \in \omega$. Покажем, что у формации $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество τ-замкнутых подформаций.

Пусть $\mathfrak{F}^* = \tau^\omega\mathrm{form}(C_p \wr G)$, где C_p – группа порядка p. Поскольку G – p'-группа, то $F_p(C_p \wr G) = K$ – база регулярного сплетения $C_p \wr G$. Поэтому

$$C_p \wr G / F_p(C_p \wr G) \cong G .$$

С каждой τ-замкнутой подформацией $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$ сопоставим класс $\mathfrak{M}(p) = \{C_p \wr A \mid A \in \mathfrak{M}\}$.

Пусть $\mathfrak{M}^* = \tau^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{M}(p))$. Пусть f и h – минимальные τ-значные ω-локальные V-спутники формаций $\mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{M}^*$ соответственно. Ввиду лемм 2 и 3 , имеет место

$$\mathfrak{M}(p) \subseteq f(p) = \tau\, form(C_p \wr G / F_p(C_p \wr G)) = \tau\mathrm{form}(G) = \mathfrak{F}$$

и

$$m(p) = \tau\, form(A/ F_p(A) \mid A \in \mathfrak{M}(p)) = \mathfrak{M} .$$

Следовательно, $\mathfrak{M}^* \subseteq \mathfrak{F}^*$ и имеется лишь конечное множество возможных вариантов для вложений $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Литература

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва : Наука, 1978, – 272 с.
2. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва : Наука, 1989. – 253 с
3. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
4. Shemetkov, L.A. Multiply ω-local formations and Fitting classes of finete groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // Matem. Trudy. – 1999. – № 2. – P. 114–147.
5. Bryant, R.M. The formation generated by a finite group / R.M. Bryant, R.A. Bryce, B. Hartley // Bull. Ausral.Math. Soc. – 1970. – V. 2, № 3. – P. 346–357.
6. Bryant, R.M. The formation generated by a finite group / R.M. Bryant, P.D. Foy // Red. Sem. Math. Univ. Padova. – 1995. – V. 99. – P. 215–225.
7. Скиба, А.Н. О подформациях формаций конечных групп / А.Н. Скиба // Доклады АН БССР. – 1981. – Т. 2, № 6. – С. 492–495.
8. Буриченко, В.П. О формациях порожденных группой цокольной длинны 2 / В.П. Буриченко // Сиб. мат. журнал. – 2008. – № 6. – С. 1238–1349.
9. Go, W. Factorization theory of onegenerated Bear ω-local formations / W. Go, V.M. Selkin, K.P. Sham // Communications in Algebra.– 2007. – Vol. 35. – P. 2901–2931.
10. Селькин, В.М. Об одном применении теории критических формаций / В.М. Селькин // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя П.М. Машэрава. – 2012. – № 1 (67). – С. 18–21.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 25.09.2015