УДК 519.542

О ПРИВОДИМЫХ τ-ЗАМКНУТЫХ ω-НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЯХ С РАЗРЕШИМЫМ ДЕФЕКТОМ 2

В.Г. Сафонов[1], **И.Н. Сафонова**[2]

[1]*Министерство образования Республики Беларусь, Минск*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*

ON REDUCIBLE τ-CLOSED ω-SATURATED FORMATIONS WITH A SOLUBLE DEFECT 2

V.G. Safonov[1], **I.N. Safonova**[2]

[1]*Ministry of Education of the Republic of Belarus, Minsk*
[2]*F. Scorina Gomel State University, Gomel*

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая τ-замкнутая ω-насыщенная формация, $\mathfrak{S}$ – формация всех разрешимых групп. Тогда через $\mathfrak{F}/_{\tau}^{\omega}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}$ обозначают решетку всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций $\mathfrak{H}$ таких, что $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}\subseteq\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}$. Длину решетки $\mathfrak{F}/_{\tau}^{\omega}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}$ называют разрешимым l_{τ}^{ω}-дефектом τ-замкнутой ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$. Получено описание приводимых τ-замкнутых ω-насыщенных формаций с разрешимым l_{τ}^{ω}-дефектом 2.

Ключевые слова: *формация конечных групп, ω-насыщенная формация, дефект формации, решетка формаций, τ-замкнутая формация.*

Let $\mathfrak{F}$ be some τ-closed ω-saturated formation, $\mathfrak{S}$ be the formation of all soluble groups. Then $\mathfrak{F}/_{\tau}^{\omega}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}$ denotes the lattice of all τ-closed ω-saturated formations $\mathfrak{H}$ such that $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}\subseteq\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}$. A length of the lattice $\mathfrak{F}/_{\tau}^{\omega}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}$ is called a soluble l_{τ}^{ω}-defect of the τ-closed ω-saturated formation $\mathfrak{F}$. The description of reducible τ-closed ω-saturated formations of finite groups with a soluble l_{τ}^{ω}-defect 2 is obtained.

Keywords: *formation of finite groups, ω-saturated formation, defect of a formation, lattice of formations, τ-closed formation.*

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используются определения и обозначения, принятые в [1]–[3].

Изучение структурного строения насыщенной формации на основе свойств достаточно хорошо изученной ее подформации впервые было проведено А.Н. Скибой и Е.А. Таргонским [4]. Данный подход базировался на введенном ими понятии $\mathfrak{H}$-дефекта насыщенной формации. В работе [4] изучены основные свойства насыщенных формаций с конечным $\mathfrak{H}$-дефектом, а также получена классификация насыщенных формаций нильпотентного дефекта ≤ 2.

В теории ω-насыщенных формаций такой подход использовали Дж. Джехад [5] и Н.Г. Жевнова [6] при изучении p-насыщенных и ω-насыщенных формаций с нильпотентным l^{ω}-дефектом 1, а авторы при классификации неразрешимых ω-насыщенных формаций с l^{ω}-дефектом ≤ 2 [7], n-кратно ω-насыщенных формаций с максимальной разрешимой подформацией [8] и τ-замкнутых ω-насыщенных формаций с разрешимым l_{τ}^{ω}-дефектом 1 [9]. В работах В.Г. Сафонова и А.И. Рябченко [10]–[12] изучено решеточное строение не π-нильпотентных (не π-специальных, не π-разложимых) ω-насыщенных формаций с π-нильпотентным (π-специальным, π-разложимым) l^{ω}-дефектом 1. В дальнейшем, А.И. Рябченко [13]–[15] получено описание ω-насыщенных формаций с $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефектом ≤ 2, где $\mathfrak{H}$ – произвольная формация классического типа.

В данной статье, развивая наблюдения работы [9], нами получено описание приводимых τ-замкнутых ω-насыщенных формаций с разрешимым l_{τ}^{ω}-дефектом 2.

1 Определения и обозначения

Пусть ω – непустое множество простых чисел. Символом $G_{\omega d}$ обозначается наибольшая нормальная в G подгруппа, у которой каждый композиционный фактор является ωd-группой (если таких подгрупп в G нет, то полагают $G_{\omega d}=1$). Всякую функцию вида

$f:\omega\cup\{\omega'\}\to\{$формации$\}$ называют ω-локальным спутником. Через $LF_\omega(f)$ обозначают класс всех таких групп G, что $G/G_{\omega d}\in f(\omega')$ и $G/F_p(G)\in f(p)$ для любого $p\in\omega\cap\pi(G)$. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F}=LF_\omega(f)$, то говорят, что $\mathfrak{F}$ является ω-локальной формацией, а f – ω-локальным спутником формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется ω-насыщенной, если ей принадлежит всякая группа G с $G/L\in\mathfrak{F}$, где $L\subseteq O_\omega(G)\cap\Phi(G)$. Как было показано в [3], [16] формация $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной тогда и только тогда, когда она ω-локальна.

Пусть всякой группе G сопоставлена такая система ее подгрупп $\tau(G)$, что $G\in\tau(G)$. Тогда τ называют подгрупповым функтором [2], если для любого эпиморфизма $\varphi:A\to B$ и для любых групп $H\in\tau(A)$, $T\in\tau(B)$ имеет место: $H^\varphi\in\tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}}\in\tau(A)$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутым, если $\tau(G)\subseteq\mathfrak{F}$ для любой группы $G\in\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Тогда через $l_\tau^\omega\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначают τ-замкнутую ω-насыщенную формацию, порожденную классом групп $\mathfrak{X}$, т. е. пересечение всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. При этом, если $\mathfrak{X}=\{G\}$, то формацию $l_\tau^\omega\mathrm{form}G$ называют однопорожденной τ-замкнутой ω-насыщенной формацией. Заметим, что множество l_τ^ω всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций относительно включения $\subseteq$ образует полную модулярную решетку [17]. Понятно, что в этой решетке $\vee_\tau^\omega(\mathfrak{F}_i\mid i\in I)=l_\tau^\omega\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$ и $\cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ являются, соответственно, точной верхней и точной нижней гранями для подмножества $\{\mathfrak{F}_i\mid i\in I\}$ из l_τ^ω.

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая τ-замкнутая ω-насыщенная формация, $\mathfrak{H}$ – произвольный класс групп. Формацию $\mathfrak{F}$ называют минимальной τ-замкнутой ω-насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией ($\mathfrak{H}_\tau^\omega$-критической формацией), если $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{H}$, но все ее собственные τ-замкнутые ω-насыщенные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Если $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая ω-насыщенная формация, то $\mathfrak{H}_\tau^\omega$-дефектом τ-замкнутой ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ называют длину решётки $\mathfrak{F}/_\tau^\omega\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ τ-замкнутых ω-насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$, и обозначают через $|\mathfrak{F}:\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}|_\tau^\omega$. Если $\mathfrak{H}=\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{S}_\tau^\omega$-дефект τ-замкнутой ω-насыщенной формации называют её разрешимым l_τ^ω-дефектом.

τ-Замкнутую ω-насыщенную формацию $\mathfrak{F}$ называют l_τ^ω-неприводимой, если $\mathfrak{F}\neq l_\tau^\omega\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{X}_i)=\vee_\tau^\omega(\mathfrak{X}_i\mid i\in I)$, где $\{\mathfrak{X}_i\mid i\in I\}$ – набор всех собственных τ-замкнутых ω-насыщенных подформаций из $\mathfrak{F}$. В противном случае, формацию $\mathfrak{F}$ называют l_τ^ω-приводимой.

2 Вспомогательные результаты

***Лемма 1* [9].** *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая ω-насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый l_τ^ω-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_\tau^\omega\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ – разрешимая τ-замкнутая ω-насыщенная формация, $\mathfrak{H}$ – минимальная τ-замкнутая ω-насыщенная неразрешимая формация, при этом:*

1) всякая разрешимая τ-замкнутая ω-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}\vee_\tau^\omega(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{S})$;

2) всякая неразрешимая τ-замкнутая ω-насыщенная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H}\vee_\tau^\omega(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{S})$.

Следующие две леммы являются частным случаем лемм 5.2.7 и 5.2.8 [2, с.193–194] соответственно.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутые ω-насыщенные формации, причем $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}$. Тогда если m и n – $\mathfrak{H}_\tau^\omega$-дефекты формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно, то $m\le n$.*

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутые ω-насыщенные формации, причем $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_\tau^\omega\mathfrak{X}$. Тогда если m, r и t – $\mathfrak{H}_\tau^\omega$-дефекты формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно, то $t\le m+r$.*

3 Основной результат

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ – приводимая τ-замкнутая ω-насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый l_τ^ω-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}_1\vee_\tau^\omega\mathfrak{H}_2\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{S}$, а $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ – различные минимальные τ-замкнутые ω-насыщенные неразрешимые формации;

2) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{S}$, $\mathfrak{H}$ – неприводимая τ-замкнутая ω-насыщенная формация разрешимого l_τ^ω-дефекта 2, $\mathfrak{M}\not\subseteq\mathfrak{H}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{X}$ – такая максимальная τ-замкнутая ω-насыщенная подформация $\mathfrak{F}$, что $|\mathfrak{X}:\mathfrak{X}\cap\mathfrak{S}|_\tau^\omega=1$. По лемме 1 имеем $\mathfrak{X}=\mathfrak{H}_1\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}_1$ – минимальная τ-замкнутая ω-насыщенная неразрешимая формация, $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{S}$. Тогда если в $\mathfrak{F}$ имеется еще одна минимальная τ-замкнутая ω-насыщенная неразрешимая подформация $\mathfrak{H}_2$, отличная от $\mathfrak{H}_1$, то в силу леммы 1 получим $\mathfrak{H}_2\not\subseteq\mathfrak{X}$. Значит, $\mathfrak{F}=\mathfrak{X}\vee_\tau^\omega\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}_1\vee_\tau^\omega\mathfrak{H}_2\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}$, т. е. формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1) теоремы.

Пусть теперь в $\mathfrak{F}$ нет отличных от $\mathfrak{H}_1$ минимальных τ-замкнутых ω-насыщенных неразрешимых формаций. Поскольку $\mathfrak{F}$ – приводимая τ-замкнутая ω-насыщенная формация, то в $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{X}$ найдется такая группа G, что $\mathfrak{R}=l_\tau^\omega\mathrm{form}G\neq\mathfrak{F}$. Понятно, что $\mathfrak{F}=\mathfrak{X}\vee_\tau^\omega\mathfrak{R}$. Ввиду леммы 2 имеет место $|\mathfrak{R}:\mathfrak{R}\cap\mathfrak{S}|_\tau^\omega\leq 2$. Поскольку $\mathfrak{F}=\mathfrak{X}\vee_\tau^\omega\mathfrak{R}$ и $|\mathfrak{X}:\mathfrak{X}\cap\mathfrak{S}|_\tau^\omega=1$, то $|\mathfrak{R}:\mathfrak{R}\cap\mathfrak{S}|_\tau^\omega\neq 0$. Допустим, что $|\mathfrak{R}:\mathfrak{R}\cap\mathfrak{S}|_\tau^\omega=1$. Тогда, поскольку в силу нашего предположения $\mathfrak{H}_1$ единственная минимальная τ-замкнутая ω-насыщенная формация, входящая в $\mathfrak{F}$, по лемме 1 получаем $\mathfrak{R}=\mathfrak{H}_1\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{S}$. Значит,

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{X}\vee_\tau^\omega\mathfrak{R}=(\mathfrak{H}_1\vee_\tau^\omega\mathfrak{M})\vee_\tau^\omega(\mathfrak{H}_1\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}_1)=$$
$$=\mathfrak{H}_1\vee_\tau^\omega(\mathfrak{M}\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}_1).$$

В силу леммы 1, получим $|\mathfrak{F}:\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}|_\tau^\omega=1$. Противоречие. Поэтому $|\mathfrak{R}:\mathfrak{R}\cap\mathfrak{S}|_\tau^\omega=2$. Заметим, что $\mathfrak{H}_1\subseteq\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{M}\not\subseteq\mathfrak{R}$, так как в противном случае $\mathfrak{X}=\mathfrak{H}_1\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{R}$. Последнее противоречит максимальности формации $\mathfrak{X}$.

Если $\mathfrak{R}$ – неприводимая τ-замкнутая ω-насыщенная формация, то

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{X}\vee_\tau^\omega\mathfrak{R}=(\mathfrak{H}_1\vee_\tau^\omega\mathfrak{M})\vee_\tau^\omega\mathfrak{R}=\mathfrak{M}\vee_\tau^\omega\mathfrak{R}$$

и формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2) теоремы.

Пусть $\mathfrak{R}$ – приводимая τ-замкнутая ω-насыщенная формация. Как известно (см. замечание 3 [3, с.127]), любая однопорожденная ω-насыщенная формация содержит конечное число разрешимых ω-насыщенных подформаций.

Поскольку $\mathfrak{R}$ – однопорожденная τ-замкнутая ω-насыщенная формация и для любого подгруппового функтора τ множество τ-подгрупп произвольной группы A конечно, то формация $\mathfrak{R}$ является однопорожденной ω-насыщенной формацией. Поэтому $\mathfrak{R}$ содержит конечное число разрешимых ω-насыщенных подформаций, а значит и разрешимых τ-замкнутая ω-насыщенных подформаций.

Пусть k – число разрешимых τ-замкнутых ω-насыщенных подформаций формации $\mathfrak{R}$. Индукцией по k покажем, что формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2).

Обозначим через $\mathfrak{L}$ такую максимальную τ-замкнутую ω-насыщенную подформацию формации $\mathfrak{R}$, что $|\mathfrak{L}:\mathfrak{L}\cap\mathfrak{S}|_\tau^\omega=1$. Если $\mathfrak{R}\cap\mathfrak{S}\not\subseteq\mathfrak{L}$, то $\mathfrak{L}\vee_\tau^\omega(\mathfrak{R}\cap\mathfrak{S})=\mathfrak{R}$ и $|\mathfrak{R}:\mathfrak{R}\cap\mathfrak{S}|_\tau^\omega=1$, что невозможно. Значит, $\mathfrak{R}\cap\mathfrak{S}\subseteq\mathfrak{L}$. В силу леммы 1 имеет место равенство $\mathfrak{L}=\mathfrak{H}_1\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_2\subseteq\mathfrak{S}$. Поскольку $\mathfrak{R}$ – приводимая τ-замкнутая ω-насыщенная формация, то в $\mathfrak{R}\setminus\mathfrak{L}$ найдется такая группа A, что $\mathfrak{R}_1=l_\tau^\omega\mathrm{form}A\neq\mathfrak{R}$. Тогда $\mathfrak{R}=\mathfrak{L}\vee_\tau^\omega\mathfrak{R}_1$. Если $|\mathfrak{R}_1:\mathfrak{R}_1\cap\mathfrak{S}|_\tau^\omega<2$, то в силу леммы 3 имеем $|\mathfrak{R}:\mathfrak{R}\cap\mathfrak{S}|_\tau^\omega=1$. Противоречие. Значит, $|\mathfrak{R}_1:\mathfrak{R}_1\cap\mathfrak{S}|_\tau^\omega=2$. Так как в $\mathfrak{F}$ нет отличных от $\mathfrak{H}_1$ минимальных τ-замкнутых ω-насыщенных неразрешимых формаций, то с учетом леммы 3 имеем $\mathfrak{H}_1\subseteq\mathfrak{R}_1$. Поскольку $\mathfrak{L}$ максимальная τ-замкнутая ω-насыщенная подформация $\mathfrak{R}$, то $\mathfrak{M}_2\not\subseteq\mathfrak{R}_1$, так как в противном случае $\mathfrak{L}=\mathfrak{H}_1\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}_2\subseteq\mathfrak{R}_1\subset\mathfrak{R}$. Поэтому число разрешимых τ-замкнутых ω-насыщенных подформаций формации $\mathfrak{R}_1$ меньше k. Значит, если $\mathfrak{R}_1$ – приводимая τ-замкнутая ω-насыщенная формация, то по индукции мы можем считать, что $\mathfrak{R}_1=\mathfrak{H}\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}_3$, где $\mathfrak{H}$ – неприводимая τ-замкнутая ω-насыщенная формация разрешимого l_τ^ω-дефекта 2. Тогда

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{R}\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}=\mathfrak{L}\vee_\tau^\omega\mathfrak{R}_1\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}=$$
$$=\mathfrak{H}_1\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}_2\vee_\tau^\omega\mathfrak{R}_1\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}=$$
$$=\mathfrak{H}\vee_\tau^\omega(\mathfrak{M}\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}_2\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}_3)=\mathfrak{H}\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}_4,$$

где $\mathfrak{M}_4\subseteq\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{M}_4\not\subseteq\mathfrak{H}$. Следовательно, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2) теоремы.

Если $\mathfrak{R}_1$ – неприводимая τ-замкнутая ω-насыщенная формация, то

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{R}\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}=\mathfrak{L}\vee_\tau^\omega\mathfrak{R}_1\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}=$$
$$=\mathfrak{H}_1\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}_2\vee_\tau^\omega\mathfrak{R}_1\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}=$$
$$=\mathfrak{R}_1\vee_\tau^\omega(\mathfrak{M}_2\vee_\tau^\omega\mathfrak{M})=\mathfrak{R}_1\vee_\tau^\omega\mathfrak{M}_5,$$

где $\mathfrak{M}_5\subseteq\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{M}_5\not\subseteq\mathfrak{H}$. Таким образом, и в этом случае формация $\mathfrak{F}$ также удовлетворяет условию 2). Теорема доказана.

Доказанная теорема имеет многочисленные следствия для заданных подгрупповых функторов τ и множеств простых чисел ω. Приведем некоторые из них. В случае когда $\omega=\{p\}$ из теоремы получаем

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – приводимая τ-замкнутая p-насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый l_τ^p-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}_1\vee_\tau^p\mathfrak{H}_2\vee_\tau^p\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{S}$, а $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ – различные минимальные τ-замкнутые p-насыщенные неразрешимые формации;

2) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee_\tau^p\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{S}$, $\mathfrak{H}$ – неприводимая τ-замкнутая p-насыщенная формация разрешимого l_τ^p-дефекта 2, $\mathfrak{M}\not\subseteq\mathfrak{H}$.

Если ω — множество всех простых чисел из теоремы вытекает

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – приводимая τ-замкнутая насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый l_l^τ-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}_1\vee_l^\tau\mathfrak{H}_2\vee_l^\tau\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{S}$, а $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ – различные минимальные τ-замкнутые насыщенные неразрешимые формации;

2) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee_l^\tau\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{S}$, $\mathfrak{H}$ – неприводимая τ-замкнутая насыщенная формация разрешимого l_l^τ- дефекта 2, $\mathfrak{M}\not\subseteq\mathfrak{H}$.

Пусть теперь τ – тривиальный подгрупповой функтор. Тогда из теоремы вытекает

Следствие 3 **[7].** *Пусть $\mathfrak{F}$ – приводимая ω-насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый l^ω-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}_1\vee^\omega\mathfrak{H}_2\vee^\omega\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{S}$, а $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ – различные минимальные ω-насыщенные неразрешимые формации;

2) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee^\omega\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{S}$, $\mathfrak{H}$ — неприводимая ω-насыщенная формация разрешимого l^ω-дефекта 2, $\mathfrak{M}\not\subseteq\mathfrak{H}$.

В случае, когда $\omega=\{p\}$, из теоремы получаем

Следствие 4 **[7].** *Пусть $\mathfrak{F}$ – приводимая p-насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый l^p-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}_1\vee^p\mathfrak{H}_2\vee^p\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{S}$, а $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ – различные минимальные p-насыщенные неразрешимые формации;

2) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee^p\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{S}$, $\mathfrak{H}$ – неприводимая p-насыщенная формация разрешимого l^p-дефекта 2, $\mathfrak{M}\not\subseteq\mathfrak{H}$.

Если ω – множество всех простых чисел, из теоремы вытекает

Следствие 5 **[7].** *Пусть $\mathfrak{F}$ – приводимая насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}_1\vee_l\mathfrak{H}_2\vee_l\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{S}$, а $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ – различные минимальные насыщенные неразрешимые формации;

2) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee_l\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{S}$, $\mathfrak{H}$ – неприводимая насыщенная формация разрешимого дефекта 2, $\mathfrak{M}\not\subseteq\mathfrak{H}$.

Заключение

Полученное в данной работе описание приводимых τ-замкнутых ω-насыщенных формаций с разрешимым l_τ^ω-дефектом 2 для любого подгруппового функтора τ, позволяет классифицировать формации такого вида по их внутреннему структурному строению. Доказанная теорема существенно расширяет основные результаты работ авторов [7, 9], где, соответственно, получено описание ω-насыщенных формаций с разрешимым l^ω-дефектом 2, для случая, когда τ тривиальный подгрупповой функтор, и τ-замкнутых ω-насыщенных формаций с разрешимым l_τ^ω-дефектом 1 для произвольного подгруппового функтора τ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков, Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 253 с.
2. *Скиба, А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
3. *Скиба, А.Н.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
4. *Скиба, А.Н.* Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 / А.Н. Скиба, Е.А.Таргонский // Матем. заметки. – 1987. – Т.41. – № 4. – С. 490–499.
5. *Джехад, Дж.* Классификация p-локальных формаций длины 3: автореф. : дис. канд. физ.-мат. наук: 02.12.01 / Дж. Джехад; Гом. гос. ун-т им.Ф.Скорины. – Гомель, 1996. – 15 с.
6. *Жевнова, Н.Г.* ω-Локальные формации с дополняемыми подформациями: автореф. : дис. канд. физ.-мат. наук: 02.12.01 / Н.Г. Жевнова;

Гом. гос. ун-т им. Ф.Скорины. – Гомель, 1997. – 17 с.

7. *Сафонов, В.Г.* О приводимых ω-насыщенных формациях с разрешимым дефектом ≤ 2 / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф.Скорины. – 2005. – № 5 (32). С. 162–165.

8. *Сафонов, В.Г.* О n-кратно ω-насыщенных формациях с максимальной разрешимой подформацией / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Вестник Гродненского гос. университета. Серия Математика. – 2008. – № 2. – С. 53–57.

9. *Сафонов, В.Г.* О τ-замкнутых ω-насыщенных формациях разрешимого l_τ^ω-дефекта 1 / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. – 2008, №2 (48). – С. 120–125.

10. *Сафонов, В.Г.* Частично насыщенные формации с π-нильпотентным дефектом 1 / В.Г. Сафонов, А.И. Рябченко // Вестник Мозырского гос. пед. ун-та. – 2005. – № 2 (13). – С. 16–20.

11. *Рябченко, А.И.* Частично насыщенные формации с π-специальным дефектом 1 / А.И. Рябченко // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2006. – № 5. – С. 59–68.

12. *Сафонов, В.Г.* О ω-насыщенных формациях с π-разложимым дефектом 1 / В.Г. Сафонов, А.И. Рябченко // Вес. Магілёускага дзярж. ун-таім. А.А.Куляшова. – 2006. – № 4 (25). – С. 204–211.

13. *Рябченко, А.И.* О частично насыщенных формациях с X-дефектом 1 / А.И. Рябченко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. – 2008. – № 1. – С. 28–34.

14. *Рябченко, А.И.* О частично насыщенной формации с максимальной подформацией классического типа / А.И. Рябченко // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф.Скорины. – 2008. – № 5 (50), Ч. 2. – С. 216–222.

15. *Рябченко, А.И.* К теории частично насыщенных формаций / А.И. Рябченко // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф.Скорины. – 2008. – № 6 (51), Ч. 2. – С. 153–160.

16. *Скиба, А.Н.* О частично локальных формациях / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков //Докл. АН Беларуси. – 1995. – Т.39, № 3. – С. 9–11.

17. *Шабалина, И.П.* О решетке τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций конечных групп / И.П. Шабалина // Весці НАН Беларусі, Сер. фіз.-мат. наук. – 2003, № 1. – С. 28–30.

Поступила в редакцию 23.11.09.