Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №3(30), 2005

УДК 553:548

Бесселевы световые пучки

С. С. Гиргель

1. Поляризационные и энергетические свойства бесселевых волновых полей

Дурнин и другие [1, 2] обратили внимание на то, что существуют точные решения скалярного волнового уравнения Гельмгольца, характеризующие новый тип световых пучков, у которых поперечное распределение амплитуды описывается не функцией Гаусса, а функциями Бесселя 1-го рода. Удивительное свойство бездифракционности бесселевых световых пучков вызвало всеобщий интерес. Начались их интенсивные теоретические и экспериментальные исследования [3-15], однако изучались лишь частные случаи.

Здесь мы изложим новые строгие решения уравнений Максвелла, описывающие моды бесселевых пучков различных типов, следуя нашим работам [9, 16-17].

Монохроматические световые волны в изотропных средах, характеризуемых уравнениями связи

$$\overline{D} = \varepsilon\overline{E},\ \overline{B} = \mu\overline{H}\ , \qquad (1.1)$$

удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} rot\ \overline{E} = ik_0\mu\overline{H}; & div\ \mu\overline{H} = 0; \\ rot\ \overline{H} = -ik_0\varepsilon\overline{E}; & div\ \varepsilon\overline{E} = 0. \end{cases} \qquad (1.2),\ (1.3)$$

Из (1.2), (1.3) вытекает волновое уравнение (векторное уравнение Гельмгольца)

$$\left(\Delta + k^2\right)\overline{E}(r) = 0\ , \qquad (1.4)$$

которое вместе с уравнением непрерывности

$$div\,\overline{E} = 0 \qquad (1.5)$$

полностью определяет векторное поле $\overline{E}$. Здесь $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu / c^2$.

Для полей вида

$$\overline{E}(\overline{r}) = \overline{E}(\overline{r}_\perp)exp(ik_{II}z) \qquad (1.6)$$

уравнение Гельмгольца приобретает вид

$$\left(\overline{\nabla}_\perp^2 + k_\perp^2\right)\overline{E}(\overline{r}_\perp) = 0\ . \qquad (1.7)$$

Здесь $\overline{k}_{II}$ и $\overline{k}_\perp$ – продольная и поперечная компоненты волнового вектора поля .
Так как уравнение (1.7) справедливо для любой компоненты поля $\overline{E}$, то можно взять

$$\overline{E}_\perp = \overline{e}_x J_m(u)\exp(im\varphi)\ . \qquad (1.8)$$

Здесь $J_m(u)$ – функции Бесселя первого рода порядка m, для упрощения введена безразмерная переменная $u = k_\perp\rho$. Продольную компоненту поля E_z найдем из уравнения непрерывности (1.5). Тогда полный вектор поля пучка равен

$$\overline{E} = \left[J_m\overline{e}_x + i\overline{e}_z\frac{k_\perp}{2k_{II}}\left(e^{-i\varphi}J_{m-1} - e^{+i\varphi}J_{m+1}\right)\right]e^{im\varphi}\ . \qquad (1.9)$$

Отсюда находим также выражения

$$\overline{E} = \left[J_m\left(\overline{e}_z \pm i\overline{e}_y\right) \mp i\overline{e}_z\frac{k_\perp}{k_{II}}J_{m\pm1}\,e^{\pm i\varphi}\right]e^{im\varphi}, \qquad (1.10)$$

описывающие циркулярно поляризованные моды. Последние выражения (1.10), как наиболее простые, можно взять в качестве базовых.

Бесселевы поля, не имеющие нормальной составляющей E_z (ТЕ-моды), описываются выражениями

$$\overline{E}_{TE} = \frac{1}{2}\left[(J_{m+1}+J_{m-1})\overline{e}_\rho + i(J_{m-1}-J_{m+1})\overline{e}_\varphi\right]\exp(im\varphi). \quad (1.11)$$

Зная вектор поля $\overline{E}$ из уравнений Максвелла находим $\overline{H}$, а затем по стандартной методике [21,23] можно рассчитать [9, 16-17] энергетические характеристики поля (плотность энергии и вектор Пойнтинга) электромагнитного поля.

2. Поляризационные свойства векторных бессель-гауссовых пучков света

Для бездифракционных световых пучков более реалистической, хотя и более сложной моделью является модель бессель-гауссового светового пучка, у которого поперечное распределение амплитуды поля описывается произведением функций Бесселя первого рода на функцию Гаусса [10-14]. Однако большая часть работ ограничена скалярными пучками.

Поэтому мы изложим [17] общие векторные решения уравнений Максвелла и векторного волнового уравнения Гельмгольца, описывающие поляризационные свойства бессель-гауссовых пучков света.

Для световых пучков будем искать решения уравнения Гельмгольца (1.4) в виде:

$$\overline{E}(\overline{r}) = \overline{A}(\overline{r})exp(ikz). \quad (2.1)$$

Отсюда получаем два независимых уравнения

$$\left(\overline{\nabla}^2 + 2ik\frac{\partial}{\partial z}\right)\overline{A}_\perp(\overline{r}) = 0; \qquad \left(\overline{\nabla}^2 + 2ik\frac{\partial}{\partial z}\right)A_z(\overline{r}) = 0. \quad (2.2), (2.3)$$

Можно показать [17], что следующие выражения

$$\overline{E}_\perp(\overline{r}) = G(\rho,z)\cdot Q(z) J_m(u_1)(\overline{e}_x \pm ip\overline{e}_y)\exp(im\varphi) \quad (2.4)$$

являются решениями векторного уравнения (1.4) в параболическом приближении и описывают поперечные компоненты эллиптически поляризованных бессель-гауссовых пучков. Здесь $G(\rho,z)$ – функция Гаусса нулевой моды (гауссиан)

$$G(\rho,z) = \frac{L}{L+iZ}\cdot\exp\left(\frac{-k\rho^2}{2(L+iz)}\right), \quad (2.5)$$

а функция $Q(z)$ имеет следующую [13] зависимость от z:

$$Q(z) = \exp\left(\frac{-ik_\perp^2 zL}{2k(L+iz)}\right), \quad (2.6)$$

Функция Бесселя первого рода $J_m(u_1)$ зависит от безразмерного параметра u_1:

$$u_1 = \frac{u}{1+iz/L}, \quad u = k_\perp\rho. \quad (2.7)$$

Аналогично можно показать, что уравнение (1.4) в параболическом приближении также имеет решение для компонент E_z световых пучков вида

$$\overline{E}_z(\overline{r}) = \overline{e}_z G(\rho,z) Q(z) J_m(u_1)\exp(im\varphi). \quad (2.8)$$

Общие решения уравнения Гельмгольца (1.4) для бессель-гауссовых пучков света являются суперпозицией различных мод, отличающихся индексами m, поляризацией и амплитудой. Так как компоненты поля $\overline{E}$ должны удовлетворять уравнению непрерывности (1.5), то можно взять поперечные компоненты поля $\overline{E}_\perp$, например, в виде (2.4). Затем продольную компоненту E_z проще всего найти из (1.5), учитывая, что в оптическом диапазоне частот $|dE_z/dz| << k|E_z|$. Тогда имеем $E_z = i\overline{\nabla}_\perp\overline{A}_\perp e^{ikz}/k$.

Выражения (2.4)-(2.8) для эллиптически поляризованных мод вектора $\overline{E}_\perp(\overline{r})$ пучков Бесселя-Гаусса являются общими и одновременно более простыми, чем у Холла и др. [11-13]. Холл фактически анализировал только поперечные линейно поляризованные моды. Кроме того, мы нашли продольные компоненты E_z поля, необходимые, например, для описания расходимости пучка. Поэтому (2.4)-(2.8) можно взять в качестве базовых для вычисления мод других типов. При циркулярной поляризации $p = 1$, а при линейной – $p = 0$.

3. Световые пучки Бесселя в одноосных кристаллах. Моды o-типа

В одноосных кристаллах возможны [20, 22] обыкновенные *o*- и необыкновенные *e*-волны. Модами *o*-типа будем называть суперпозицию обыкновенных плоских волн в одноосном кристалле. Исследования бесселевых световых пучков ограничиваются, главным образом, только изотропными средами и параксиальным приближением. См., например, Ciattoni и др. [22]. Поэтому изложим строгие решения для векторных бесселевых световых пучков *o*-типа в одноосных кристаллах.

Волновое уравнение для векторов поля монохроматических волн имеет следующий вид

$$(\varepsilon^{-1}\overline{\nabla}^{\times}\overline{\nabla}^{\times} - k_0^2)\overline{E} = 0\,, \tag{3.1}$$

где $k_0=\omega/c$, а диэлектрическая проницаемость является тензорной.

Для обыкновенных волн [20] вектор индукции электрического поля

$$\overline{D}_0 = \varepsilon\overline{E}_0 = \varepsilon_0\overline{E}_0\,. \tag{3.2}$$

Кроме того, вектор поля $\overline{E}_0$ также удовлетворяет уравнению непрерывности (1.5). Тогда волновое уравнение (3.1) для обыкновенных плоских волн упрощается и принимает вид

$$(\overline{\nabla}^2 + k_0^2\varepsilon_0)\overline{E}_0 = 0 \tag{3.3}$$

векторного уравнения Гельмгольца в изотропной среде.

Следовательно, бесселевы световые пучки *o*-типа, которые можно представить как суперпозицию плоских монохроматических обыкновенных волн с одинаковыми проекциями волновых векторов вдоль оси пучка, также должны удовлетворять уравнению (3.3).

Так как [20]

$$\overline{c}\overline{E}_0 = 0\,, \tag{3.4}$$

где $\overline{c}$ – единичный вектор, направленный вдоль оси одноосного кристалла, то из уравнений (3.2) и (3.4) получаем

$$\overline{E}_0 = \left[\overline{\nabla}\psi, \overline{c}\right], \tag{3.5}$$

где некоторая скалярная функция ψ должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$(\overline{\nabla}^2 + k^2)\psi = 0\,. \tag{3.6}$$

Здесь для краткости введены обозначения $k^2 = k_0^2\varepsilon_0$. Выражения (3.5) и (3.6) впервые были получены Карпенко В.А. в работе [20] другим путем (см. также [18]).

Итак, проблема нахождения явных строгих выражений для векторов бесселевых световых пучков обыкновенных мод (мод *o*-типа) сведена к решению скалярного уравнения (3.6). Затем нетрудно вычислить вектор электрического поля $\overline{E}_0$, пользуясь выражением (3.5). Остальные векторы поля светового бесселева пучка о-типа вычисляются по формулам

$$\overline{D}_0 = \varepsilon_0\overline{E}_0\,;\ \overline{H}_0 = -i\overline{\nabla}^{\times}\overline{E}_0 / k_0\,. \tag{3.7}$$

В качестве решения уравнения (3.6) в цилиндрической системе координат возьмем функцию Бесселя целочисленного порядка *m* первого рода, т.е.

$$\psi = J_m(u)e^{i(k_\parallel z + m\varphi)}\,. \tag{3.8}$$

Продольная $k_\parallel$ и поперечная $k_\perp$ составляющие волновых векторов парциальных плоских монохроматических волн пучка Бесселя *o*-типа соответственно равны

$$k_\parallel \in (0;k)\,,\ k_\perp = \sqrt{k^2 - k_\parallel^2}\,, \tag{3.9}$$

а аргумент функции Бесселя J_m равен

$$u = k_\perp\rho\,,\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{3.10}$$

Как обычно, здесь азимутальный угол $\varphi = arctg(y/x)$, модовое число *m* принимает целочисленные значения $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Рассмотрим общий случай произвольного направления распространения обыкновенных пучков Бесселя *o*-типа в одноосных кристаллах. Выберем правую ортонормированную систему координат ($\overline{e}_x$, $\overline{e}_y$, $\overline{n}$), связанную с направлением распространения пучка $\overline{n}$, причем вектор $\overline{e}_x$ ориентирован перпендикулярно векторам $\overline{n}$ и $\overline{c}$. После соответствующих вычислений получаем, что вектор электрического поля пучка Бесселя o-типа в одноосном кристалле для общего случая произвольного направления распространения $\overline{n}$ можно записать в форме

$$\overline{E}_0 = \Big\{\cos\theta\Big[\tfrac{ik_\perp}{2}(J_{m-1}e^{-i\phi}(\overline{e}_x + i\overline{e}_y) + J_{m+1}e^{i\phi}(\overline{e}_x - i\overline{e}_y))\Big] + \\ + \sin\theta\Big[ik_\parallel \overline{e}_x J_m + \tfrac{ik_\perp}{2}(J_{m+1}e^{i\phi} - J_{m-1}e^{-i\phi})\Big]\overline{n}\Big\}e^{i(k_\parallel z + im\phi)} \quad (3.11)$$

Как видно из (3.11), вектор электрического поля бесселева пучка o-типа в общем случае можно представить как

$$\overline{E}_0 = \overline{E}_{0\parallel} n\cos\theta + \overline{E}_{0\perp}\sin\theta, \quad (3.12)$$

где $\overline{E}_{0\parallel}$ и $\overline{E}_{0\perp}$ – соответственно электрические векторы поляризации бесселева пучка o-типа для направлений параллельно и перпендикулярно оптической оси. Таким образом, здесь выполняется своеобразный принцип суперпозиции бесселевых световых пучков.

Аналогично, из уравнений Максвелла для магнитного поля бесселева пучка o-типа в общем случае также находим

$$\overline{H}_0 = \overline{H}_{0\parallel} n\cos\theta + \overline{H}_{0\perp}\sin\theta. \quad (3.13)$$

4. Световые пучки Бесселя в одноосных кристаллах. Моды *e*-типа

Волновое уравнение для векторов магнитного поля монохроматических световых полей в кристаллах в инвариантной форме можно представить как [21]

$$(\overline{\nabla}^{\times}\varepsilon^{-1}\overline{\nabla}^{\times} - k_0^2)\overline{H}_e = 0. \quad (4.1)$$

где $k_0 = \omega / c$, а магнитную проницаемость μ полагаем равной единице

Для плоских монохроматических необыкновенных волн (волн e-типа) в одноосных негиротропных кристаллах вектор магнитного поля можно записать, как [21]

$$\overline{H}_e = [\overline{n}\overline{c}]. \quad (4.2)$$

Тогда имеем

$$\varepsilon\overline{H}_e = \varepsilon_0\overline{H}_e, \qquad \overline{\nabla}\varepsilon\overline{H}_e = \overline{\nabla}\varepsilon_e\overline{H}_e = 0 \quad (4.3)$$

и волновое уравнение (аналог векторного уравнения Гельмгольца) для необыкновенных плоских волн в одноосном кристалле принимает вид

$$(\overline{\nabla}\varepsilon\overline{\nabla} + k_0^2\varepsilon_0\varepsilon_e)\overline{H}_e = 0. \quad (4.4)$$

Для произвольных полей, являющихся суперпозицией необыкновенных плоских волн, (4.4) также будет удовлетворяться. Суперпозицию плоских необыкновенных монохроматических волн будем называть модами e-типа. Таким образом, уравнение (4.4) может описывать плоские, цилиндрические и другие виды волновых полей e-типа.

Из (4.2, 4.4) и (1.5) следует, что вектор магнитного поля бесселевого пучка e-типа можно представить в виде

$$H_e \parallel [\overline{\nabla}\psi, \overline{c}], \quad (4.5)$$

причем вводимая некоторая скалярная функция ψ должна удовлетворять волновому уравнению

$$(\overline{\nabla}\varepsilon\overline{\nabla} + k_0^2\varepsilon_0\varepsilon_e)\psi = 0. \quad (4.6)$$

Итак, задача нахождения строгих выражений для бесселевых пучков e-типа в одноосных кристаллах сводится к решению скалярного волнового уравнения (1.8). Затем вектор магнитного поля $\overline{H}_e$ вычисляем по формуле

$$H_e = [\overline{\nabla}\psi, \overline{c}]. \quad (4.7)$$

Отметим, что выражения (4.5), (4.6) для векторов электромагнитного поля через скалярную функцию ψ для одноосных кристаллов впервые были получены другим путем Карпенко В.А. [20] (см. также [18]).

Остальные вектора поля следуют из уравнений Максвелла и уравнений связи

$$\overline{D}_e = i\left[\overline{\nabla}, \overline{H}_e\right]/k_0; \quad \overline{E}_e = \varepsilon^{-1}\overline{D}_e. \tag{4.8}$$

Чтобы найти решение уравнения (4.6) для скалярной функции ψ e-типа запишем (4.6) в базисной ортонормированной системе координат $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ кристалла [11, 13]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{n_e^2}{n_o^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k_o^2 n_e^2\right)\psi = 0, \tag{4.9}$$

где орт $\overline{e}_3$ ориентирован вдоль оптической оси $\overline{c}$ кристалла: $\overline{e}_3 = \overline{c}$; $\overline{e}_1 \perp \overline{c}$.

Анизотропное волновое уравнение (4.9) путем изменения масштаба вдоль оптической оси c преобразуем к изотропному виду. С этой целью введем параметр анизотропии $a = n_0/n_e$ и произведем замену переменного: $x_3' = a x_3$, т.е. изменим масштаб вдоль оси $\overline{e}_3$. При этом базисный вектор $\overline{e}_3$ не изменяется.

Повернем масштабированную систему координат $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}'_3)$ вокруг оси $\overline{e}_1$ на угол θ'. Теперь в штрихованной системе координат волновое уравнение для мод e-типа вдоль произвольного направления в одноосном кристалле снова принимает изотропный вид [24]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + k^2\right)\psi = 0. \tag{4.10}$$

Здесь $k = k_0 n_e$. Без потери общности можно считать, что в масштабированной системе координат пучок e-типа распространяется вдоль оси $\overline{e}'_z$. Возьмем решение уравнения (4.10) в виде бегущих волн Бесселя вдоль оси $\overline{e}'_z$ [24]:

$$\psi_m(x', y', z', t) = J_m(k_\perp \rho') e^{i(k_\parallel z' + m\varphi' - \omega t)}. \tag{4.11}$$

Здесь введены обозначения:

$$k_\parallel \in (0; k); \quad k_\perp^2 = k^2 - k_\parallel^2; \quad \rho' = \sqrt{x^2 + y'^2}; \qquad \varphi' = arctg(y'/x). \tag{4.12}$$

Вычисляем градиент функции ψ_m, а затем по формуле (4.7) находим вектор магнитного поля бесселевого светового пучка e-типа [25]:

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{H}}_e = \Big[k_\perp \big[J_{m-1} e^{-i\varphi'}(-\overline{e}_2 + i\overline{e}_1\cos\theta') + J_{m+1} e^{i\varphi'}(\overline{e}_2 + i\overline{e}_1\cos\theta')\big]/2 + \\ + ik_\parallel J_m \overline{e}_1 \sin\theta'\Big] e^{i(k_\parallel z' + m\varphi')}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Здесь θ' – соответственно угол между $\overline{n}$ и $\overline{c}$, а φ' – азимут в масштабированной системе координат.

Заключение

В настоящей работе изложены основные результаты, полученные в Гомельском госуниверситете им. Ф. Скорины за последние годы активно развивающегося научного направления «оптика бесселевых световых пучков». Выведены общие векторные решения, описывающие поляризационные свойства бесселевых и бессель-гауссовых пучков света для различных мод в однородных изотропных средах. Впервые описаны эллиптические моды бессель-гауссовых пучков света.

Найдены общие строгие решения, описывающие бесселевы пучки o-типа в одноосных кристаллах. Показано, что вдоль произвольного направления векторы поля бесселевых мод o-типа можно представить, как суперпозицию мод вдоль и перпендикулярно оптической оси.

Впервые удалось получить строгие аналитические решения, описывающие бесселевые световые пучки e-типа, распространяющиеся в произвольном направлении одноосного кристалла. Основная идея нахождения строгого решения состоит в том, что анизотропное волновое уравнение Гельмгольца для необыкновенных мод путем изменения масштаба вдоль оптической оси c удается преобразовать к изотропному виду. Изучение общего случая распространения бесселевых световых пучков e-типа проводится в новой масштабированной (шрихованной) ортонормированной системе координат. Затем конечные формулы снова преобразуются к системе координат в реальном пространстве. При этом оказывается, что система координат связанная с пучком, в реальном пространстве становится неортогональной. Эта неортогональность пропорциональна параметру анизотропии кристалла $a=n_o/n_e$ и максимальна вблизи угла $\theta=45^0$ относительно оптической оси. Поэтому пучки е-типа по сечению являются эллиптическими.

В настоящее время исследования бесселевых световых пучков во всем мире ведутся широким фронтом. Это связано с тем, что бесселевы световые пучки обладают многими уникальными свойствами. Они позволяют значительно повысить плотность записи информации, применяются в оптических системах, требующих повышенной глубины резкости. Бездифракционность, способность к самовосстановлению и другие свойства уже находят применение в линейной и нелинейной оптике, в системах передачи и обработки информации.

Abstract. The author considers the basic vector solutions describing polarizing properties of the Bessel and Bessel-Gauss light beams for various modes in homogeneous isotropic environments, describes elliptic modes of the Bessel-Gauss light beams.

Литература

1. J. Durnin, J. Opt. Soc. Am. A, **4**, № 4 (1987), 651–654.
2. J. Durnin, J. Jr. Miceli, Phys. Rev. Lett., **58**, № 15 (1987), 1492–1501.
3. G. Indebetouw, J. Opt. Soc. Am. A., **6**, № 1 (1989), 150–152.
4. R. M. Herman, T. A. Wiggins, JOSA. A, **8**, № 6 (1991), 933–972.
5. A. M. Бельский, Вестник БГУ, Сер. 1, № 2 (1995), 8-10.
6. S. R. Mishra, Optics Communs., **85,** № 2, 3 (1991), 159–161.
7. K. Shimoda, Journ. Phys. Soc. Japan, **60**, № 2 (1991), 450–454.
8. S. R. Seshadri, JOSA. A., **15,** № 22 (1998), 2112–2779.
9. S. S. Girgel, S. N. Kurilkina, Proc. SPIE, **4358** (2001), 258–264.
10. F. Gori, G. Guattari, Optics communications, **64**, № 6 (1987), 481–495.
11. D. G. Hall, Optics Letters, **21**, № 21 (1996), 9–11.
12. R. H. Jourdan, D. G. Hall, O. King, G. Wick and S. Rishton, JOSA. B., **14** (1997), 449–453.
13. P. L. Greene, D. G. Hall, JOSA. A, **15,** № 12 (1998), 3020–3027.
14. S. R. Seshadri, JOSA. A., **15,** № 22 (1998), 2112–2779.
15. A. M. Бельский, *Оптика когерентных световых пучков*, Мн.: БГУ, 2000.
16. С. С. Гиргель, Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины, № 6(9) (2001), 146–149.
17. С. С. Гиргель, Там же, 150–154.
18. Н. А. Хило, Е. С. Петрова, Там же, 103–107.
19. V. N. Belyi, N. A. Khilo, E. S. Petrova, A. G. Mashchenko, V. E. Leparskii, XVII International Conference on Coherent and Nonlinear Optics, Proc. SPIE, **4751** (2001), 97–103.
20. В. А. Карпенко, *Ковариантные методы в теоретической физике*, Оптика и акустика. Мн., 1981. 70–73.
21. Ф. И. Федоров, *Теория гиротропии*, Мн.: Наука и техника, 1976.
22. A. Ciattoni, C. Palma, Optics Communications, 224 (2003), 175–183.
23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, *Электродинамика сплошных сред*, М.: Наука, 1982.
24. С. С. Гиргель, Материалы Международной конференции «Лазерная физика и применения лазеров», Беларусь, Минск, 14–16 мая 2003, 78–79.
25. С. С. Гиргель, Там же, 80–81.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 13.12.04