

**Министерство образования Республики Беларусь**

**Учреждение образования  
«Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины»**

**В.Ф. Багинский  
О.В. Лапицкая**

# **БИОМЕТРИЯ В ЛЕСНОМ ХОЗЯЙСТВЕ**

**Гомель  
УО «ГГУ им. Ф.Скорины»  
2010**

**Министерство образования Республики Беларусь**

**Учреждение образования  
«Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины»**

**В.Ф. Багинский  
О.В. Лапицкая**

## **БИОМЕТРИЯ В ЛЕСНОМ ХОЗЯЙСТВЕ**

**Учебное пособие для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по специальностям «Лесное хозяйство», «Лесо-  
инженерное дело», «Садово-парковое строительство»**

**Гомель  
УО «ГГУ им. Ф.Скорины»  
2010**

УДК 630\*9:519.24 (075.8)

ББК 43:22.172я73

Б 144

Рецензенты:

Профессор кафедры лесоустройства и лесной таксации учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», доктор сельскохозяйственных наук, профессор, заслуженный лесовод Республики Беларусь *О.А. Атрощенко*;

Заведующий кафедрой лесоустройства и лесной таксации учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат сельскохозяйственных наук, доцент *В.П. Машковский*;

Главный научный сотрудник Института леса НАН Беларуси, доктор биологических наук *В.Б. Гедых*

**Багинский В.Ф.**

Б 144 Биометрия в лесном хозяйстве: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Лесное хозяйство», «Лесоинженерное дело», «Садово-парковое строительство» / В.Ф. Багинский, О.В. Лапицкая. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2010. - с.

Учебное пособие содержит изложение понятий о биометрии и вариационной статистике в их приложениях к лесному хозяйству. Показаны методы сбора, обработки и анализа биометрической информации в лесном хозяйстве. Описаны распределения случайных величин, методы установления и анализа связей между ними: регрессионный, дисперсионный анализ и др. Рассказано о планировании эксперимента. Изложены типичные случаи применения методов биометрии в лесном хозяйстве и приведены соответствующие примеры из практики.

Для студентов, магистрантов, аспирантов и преподавателей лесохозяйственных и лесоинженерных факультетов высших учебных заведений, научных и инженерно-технических работников лесного хозяйства, лесоустройства и садово-паркового хозяйства, экологов и учителей биологии.

УДК 630\*9:519.24 (075.8)

ББК 43:22.172я73

ISBN 985-434-507-6

©Багинский В.Ф., Лапицкая О.В., 2010

©Оформление ГГУ им. Ф Скорины, 2010

## ВВЕДЕНИЕ

В лесном хозяйстве широко применяются методы лесной биометрии. Без математико-статистической обработки сегодня немислимо проведение лесоводственных исследований. Подавляющее большинство нормативов, применяемых в лесном хозяйстве, разработано с использованием биометрических методов.

Широкое применение компьютеров в лесоустройстве и в лесхозах Беларуси сделало биометрические методы доступными широкому кругу лесоводов. В то же время лесовод не может быть бездумным пользователем компьютерных результатов биометрических измерений и вычислений. Он должен понимать суть изучаемого явления или процесса, разбираться в алгоритме и механизме вычислений, которые выполнил компьютер по заданной программе.

С этой целью в ВУЗах, которые готовят инженеров лесного хозяйства – специалистов для работы в лесхозах, в лесоустройстве, в садово-парковом хозяйстве, а также для лесопатологов, охотоведов и т.д., на втором году обучения читается курс лесной биометрии. Он включает 36 часов лекционных и 34 часа практических занятий, т.е. всего 70 часов.

Для того, чтобы курс биометрии, который в определенной степени требует знания математики, был усвоен, лесоведам в современных вузах преподают обширный курс математики. Этот курс меньше, чем на специализированных математических и технических факультетах, но тоже достаточно широк: математика по количеству отпущенных на ее изучение часов сопоставима с основными лесными дисциплинами: лесоводством, лесоустройством и др., что достаточно для понимания и усвоения курса биометрии. Для организации учебного процесса по курсу биометрии и для ее использования в практике лесного хозяйства требуется современное учебное пособие.

Математические методы в лесном хозяйстве, в т.ч. математическая и вариационная статистика, применяются уже со второй половины XIX века. Вспомним известную школу «форстматематиков», ярким представителем которой в России был А.К. Турский. Как самостоятельная дисциплина математическая статистика стала преподаваться в лесных институтах Советского Союза с 30-х годов прошлого века. Естественно, появились соответствующие учебные пособия. Их авторами с 30-х и до начала 60-х годов были известные ученые А.В. Тюрин, М.Л. Дворецкий, М.Г. Здорик, К.Е. Никитин и другие. Со второй половины 60-х годов и в 70-е годы изданы пособия, написанные О.А. Труллем, И.И. Гусевым, Э.Н. Фалалеевым, П.К. Верхуновым, Л.П.Зайченко, Г.Л. Кравченко и Е.С. Мурахтановым и др. В 1977 вышла последняя книга из этой серии – учебник «Вариационная статистика» Н.Н. Свадова.

Кроме перечисленных пособий студенты пользуются учебниками, где излагается биометрия в общебиологическом и общетехническом плане. Их авторами являются А.К. Митропольский, Г.Ф. Лакин, Н.А. Плохинский, П.В.Рокицкий, Г.Н. Зайцев, В.Л. Вознесенский, Д. Дюче, М.Г. Кенуй,

Е.И.Гурский, Б.Л. Ван дер Ванден и др. Все эти книги, выпущенные в основном 40 и более лет назад, давно стали библиографической редкостью. К тому же учебники и учебные пособия, изданные в 60-70 годы прошлого века и ранее, уже морально устарели. Многие из них сориентированы на довольно скромные знания математики лесоводами, что было характерно для того времени. В то же время чрезмерно математизированное изложение является препятствием для усвоения курса студентами-лесоводами и сегодня. Поэтому требуется, сохранив все то рациональное, что содержится в старых пособиях, подготовить новый курс лесной биометрии.

В последнее десятилетие увидели свет подобные пособия М.В. Устинова (Брянск) и львовских ученых М.П. Горошко, С.И. Миклуша и П.Г. Хомюка, но они практически неизвестны в Беларуси, а львовская книга написана на украинском языке. В конце 70-х годов К.Е. Никитин и А.З. Швиденко выпустили прекрасную книгу «Методы и техника обработки лесоводственной информации». Эта книга предназначена в основном для аспирантов и научных работников. В настоящее время она тоже уже библиографическая редкость, к тому же для студентов отдельные ее разделы несколько сложноваты.

В силу сказанного издание современного пособия по применению биометрии в лесном хозяйстве является актуальным. Скорее всего, следовало бы издать несколько пособий разного уровня сложности, чтобы у студентов и практических лесоводов был выбор доступного ему пособия по уровню подготовки и предъявляемым требованиям, как это было и раньше.

При подготовке настоящего пособия авторы, естественным образом, опирались на общеметодические разработки, которые сделаны в области математической статистики и биометрии и изложены в учебниках А.К. Митропольского, Н.А. Плохинского, П.Ф. Рокицкого, Г.Ф. Лакина, Н.Н. Свалова и других. Особое место при написании пособия заняла монография К.Е. Никитина и А.З. Швиденко, где в современной интерпретации поданы многие вопросы биометрии, обойденные в других изданиях, например, система кривых распределения Джонсона. Поэтому названное издание широко использовано в ссылках в настоящем пособии. Учтены и новые моменты в части оценки выборочных показателей, приводимых М.П. Горошко с соавторами.

Статистические таблицы (величины различных критериев, функции распределения и т.д.) обычно составлены давно и идентичны для всех учебных пособий. Поэтому они перенесены в настоящее пособие без изменений из тех книг, которые обладали лучшим полиграфическим исполнением.

Не претендуя на оригинальность изложения самих формул, их выводов и т.п., что является прерогативой специалистов-математиков, авторы пособия как лесоводы сосредоточили свое внимание на доступности изложения для понимания его лесоводами, на практические приложения к области применения биометрических методов в лесном хозяйстве.

В настоящее время биометрические методы широко применяются магистрантами, аспирантами, научными и научно-техническими работниками при проведении исследований в лесном хозяйстве. Поэтому настоящий курс биометрии помимо того минимума знаний, который необходим студентам

(он определяется учебной программой и регулируется преподавателем), должен удовлетворять и более высокие потребности перечисленной категории пользователей. В силу сказанного основные темы учебного пособия содержат сведения, которые обеспечивают потребность специалистов, возникающую при проведении обработки и анализа экспериментального материала.

Приводимые примеры и иллюстрации взяты в основном из практических задач, которые требовалось решать авторам в своей многолетней научно-исследовательской работе. В отдельных случаях использованы примеры других авторов, на которых сделаны ссылки.

Предлагаемое пособие состоит из 18 тем в соответствии с тематикой лекционных занятий, определяемых учебной программой по лесной биометрии. При подготовке пособия учтен многолетний опыт проведения занятий по лесной биометрии В.Ф. Багинским в Гомельском государственном университете им. Ф. Скорины и Брянской государственной инженерно-технологической академии, а также более чем 40-летний опыт математико-статистической обработки и анализа исходных материалов при проведении научных исследований.

Настоящее учебное пособие будет полезно студентам по вышеперечисленным специальностям, а также магистрантам, аспирантам, преподавателям, научным работникам и сотрудникам проектных учреждений лесного профиля. Этим пособием смогут пользоваться экологи, биологи и специалисты по лесоинженерному делу.

Авторы приносят благодарность рецензентам пособия: сотрудникам кафедры лесоустройства и лесной таксации Белорусского государственного технологического университета, доктору сельскохозяйственных наук, профессору, Заслуженному лесоводу Республики Беларусь О.А. Атрощенко и заведующему кафедрой кандидату сельскохозяйственных наук, доценту В.П. Машковскому, а также главному научному сотруднику Института леса НАН Беларуси, доктору биологических наук В.Б. Гедых за ценные советы и замечания, позволившие улучшить книгу.

# 1. БИОМЕТРИЯ КАК НАУКА

- 1.1 Определение биометрии как специальной дисциплины при подготовке инженеров лесного хозяйства, ее цели и задачи
- 1.2 Особенности биометрии как науки и ее место в ряду других наук
- 1.3 История возникновения и развития математической статистики и биометрии
- 1.4 Лесная биометрия как часть общей биометрии, ее значение для развития лесного хозяйства

## 1.1 Определение биометрии как научной дисциплины, ее цели и задачи

Слово “биометрия” происходит от греческих слов “bios” - жизнь и “metreo” - измеряю, т.е. это наука о планировании и проведении измерений в живой природе, их обобщении и анализе результатов этих измерений.

Явления жизни, как и вообще все явления материального мира, имеют две неразрывно связанные стороны: качественную, воспринимаемую непосредственно органами чувств, и количественную, выражаемую числами при помощи счета и меры.

При исследовании различных явлений природы применяют одновременно и качественные, и количественные показатели. Несомненно, что только в единстве качественной и количественной сторон наиболее полно раскрывается сущность изучаемых явлений. Однако в действительности приходится пользоваться, смотря по обстоятельствам, либо качественными, либо преимущественно количественными показателями, памятуя о том, что качество и количество материи находятся в диалектическом единстве, взаимно переходят друг в друга.

Несомненно, что количественные методы как более объективные и точные имеют преимущество перед качественной характеристикой предметов. Недаром еще в древности достоверность познания природы связывалась с математикой - наукой точной, изучающей количественные отношения и пространственные формы реальной действительности. Опираясь на количественные показатели, можно получить более достоверную информацию о предметах, что позволяет глубже постигнуть их качественное своеобразие.

Количественные методы не ограничиваются одними лишь измерениями или учетом живых существ и продуктов их жизнедеятельности. Сами по себе результаты измерений, хотя и имеют известное значение, еще недостаточны для того, чтобы сделать из них необходимые выводы. Цифровые данные, собранные в процессе массовых испытаний, т.е. измерений или учета изучаемого объекта, - это всего лишь сырой фактический материал, который нуждается в соответствующей математической обработке. Без обработки - упорядочения и систематизации цифровых

данных - не удастся извлечь заключенную в них информацию, оценить надежность отдельных суммарных показателей, убедиться в достоверности или недостоверности наблюдаемых между ними различий. Эта работа требует от специалистов определенных знаний, умения правильно обобщать и анализировать собранные в опыте данные. Система этих знаний и составляет содержание биометрии - науки, занимающейся главным образом вопросами статистического анализа результатов исследований как в области теоретической, так и прикладной биологии, в том числе и в лесном хозяйстве.

## 1.2 Особенности биометрии как науки и ее место в ряду других наук

Одна из характерных особенностей биометрии как науки состоит в том, что она не имеет прямого и непосредственного отношения к вопросам техники измерений или учета живых существ. Это дело частных наук - таких как ботаника, зоология, антропология, лесоведение, дендрология, энтомология, агрономия и др. Они имеют свои объекты исследования и применительно к ним разрабатывают методику измерений и количественного учета изучаемых объектов. В настоящее время широко применяются биометрические способы планирования биологических экспериментов, опытов, полевых исследований. Но главной задачей биометрии по-прежнему остается обработка результатов измерений и учета результатов опытов для того, чтобы по немногим числовым показателям судить о существовании изучаемых явлений. Поэтому с чисто формальной стороны биометрия представляет совокупность математических методов, применяемых к обработке результатов биологических исследований. Эти методы она заимствует преимущественно из области математической статистики и теории вероятностей, составляющих техническую основу биометрии. Следовательно, биометрия - это математическая статистика в приложении к явлениям живой природы.

Сопоставляя названные науки, надо иметь в виду, что математическая статистика и теория вероятностей являются науками сугубо теоретическими, абстрактными. Они изучают статистические совокупности безотносительно к специфике входящих в их состав элементов. Методы математической статистики и лежащей в ее основе теории вероятностей могут быть приложены к самым различным областям знания, включая и гуманитарные науки. Биометрия же - наука эмпирическая, конкретная: она исследует исключительно биологические совокупности, преследуя не математические, а биологические цели.

На этом основании нельзя ставить знак равенства между биометрией и математической статистикой, полностью их отождествлять. Биометрия имеет свой объект исследования, свое место в системе биологических наук: теория вероятностей и математическая статистика - разделы современной математики, а биометрия относится к числу биологических наук. Отношение биометрии к математике аналогично тому, какое суще-



ствуется между биологией и методикой ее преподавания. Не имея собственных методов исследования, которые она заимствует из математики, биометрия занимает особое положение, являясь относительно самостоятельным разделом биологии, возникшим на стыке математических и биологических наук. Биометрия является следствием развития теории вероятностей и математической статистики. Ее часто называют вариационной статистикой.

Теория вероятности имеет дело со случайными явлениями. В научных исследованиях, технике и массовом производстве часто приходится встречаться с явлениями, которые при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта в неизменных условиях протекают каждый раз несколько по-иному. Такие явления называют случайными. Например, при стрельбе результат каждого отдельного выстрела будет случайным. Проводя экспериментальное изучение какого-либо явления и систематизируя результаты исследования (тех же результатов стрельбы) в виде графической зависимости, мы убеждаемся в том, что при достаточно большом количестве экспериментальных точек получается не кривая, а некоторая полоса, т.е. имеет место случайный разброс экспериментальных точек.

Измеряя диаметры и высоты в лесу и нанося полученные значения на график, мы тоже увидим набор точек, но при достаточно большом числе наблюдений вырисовывается некоторая линия, близкая к параболе или к другой функции, имеющей схожий график.

При решении многих практических задач случайными отклонениями точек от кривой можно пренебречь, предполагая, что в данных условиях опыта явление протекает вполне определенно. Выявляется основная закономерность, свойственная данному явлению. По этой закономерности, применяя тот или иной математический аппарат, можно предсказать результат опыта по его заданным условиям.

По мере развития различных отраслей науки становится необходимым изучать случайные явления, с тем чтобы научиться предвидеть действия случайных факторов и учитывать их в практическом решении задач. В лесном хозяйстве такая потребность появилась в конце XIX века, что дало толчок к использованию методов математической статистики и положило начало развитию лесной биометрии.

Математическая наука, изучающая общие закономерности случайных явлений независимо от их конкретной природы и дающая методы количественной оценки влияния случайных факторов на различные явления, называется теорией вероятностей. Основой научного исследования в теории вероятностей является опыт и наблюдение. На теории вероятностей базируется вся статистика - и математическая, и экономическая, и социальная.

Мы живем в век статистики. Едва ли не в каждом своем аспекте явления природы, а также человеческая и прочая деятельность поддаются сейчас измерению при помощи статистических показателей. Сущест-

вует две диаметрально противоположные точки зрения на статистику, широко доступную в настоящее время для населения. Согласно одной из них, публикуемые статистические данные содержат в себе некое смысловое качество, нечто подобное тому, что приписывали числам пифагорейцы, и обладают такой степенью непогрешимости, что их можно принимать на веру безоговорочно. Это, конечно, так же абсурдно, как и другое, еще более распространенное, мнение о том, что можно сфабриковать статистические данные, которые докажут все что угодно, а потому, следовательно, они в действительности ничего не доказывают.

Последнее утверждение нашло отражение в юмористическом виде. Известна злая шутка. Есть три рода лжи: ложь вынужденная или просто ложь, ей есть оправдание; ложь наглая, для которой нет оправдания, и статистика.

Но ничего из сказанного не имеет отношения к математической статистике. Последней нет необходимости лгать вообще. Обе точки зрения ошибочны потому, что они основаны на незнании или непонимании целей, пределов и требований подлинной статистической теории и практики. Математическая статистика - это строгая наука и, как любая наука, она объективна и беспристрастна.

Математическая статистика - это наука о методах количественного анализа массовых явлений, учитывающей одновременно и качественное своеобразие этих явлений.

В большинстве случаев для выявления общей закономерности необходимо большее число наблюдений. Но мало выполнить наблюдения. Необходимо применить специальные способы их обработки. Более того, наблюдения должны быть спланированы и организованы специальным образом, иначе их ценность резко снизится. Методы и правила, необходимые формулы для организации наблюдений и обработки полученного материала дает математическая статистика.

В целом и теория вероятностей, и математическая статистика - это разделы математики. Связи современной биологии и лесного хозяйства с математикой многосторонни, они все больше расширяются. Но не всякие количественные методы, используемые в биологии, составляют содержание биометрии. Нельзя, например, отождествлять биометрию с кибернетикой и с так называемой “математической биологией”, у которых имеются свои, особые задачи, не совпадающие с задачами биометрического анализа совокупностей.

Другой характерной особенностью биометрии как науки является то, что ее методы могут быть приложены не к единичным объектам, не к отдельным результатам наблюдений, а к их совокупности, т.е. к явлениям массового характера. Если мы рассматриваем, например, отдельно взятую особь и сравниваем ее с популяцией, к которой она принадлежит, то можем сказать, что между данной особью и популяцией, как равно и между результатами единичных измерений и всей их совокупности в целом, существует самая тесная связь. Иначе говоря, общее и единичные явления не просто “сосуществуют”, они взаимно обуслови-

вают друг друга. Нельзя представить совокупность без ее членов, как невозможен лес без деревьев определенного ботанического вида или определенной древесной породы. Древесными породами в лесоводстве принято называть древесные виды. Каждый лесовод знает, что некоторая сумма деревьев – это еще не лес. Лес отличается от совокупности деревьев не только количественно, но и качественно. Вот это качественное отличие и должны отражать законы биометрии.

С первого взгляда кажется, что между общим и отдельным, целым и частью нет никакой разницы и что законы, действующие в сфере единичных и массовых явлений, одни и те же. Но это не так. Множество или общее не есть простая арифметическая сумма входящих в ее состав единиц. В сфере массовых явлений, т.е. в совокупностях, действуют свои, присущие им статистические законы, которые лишь в общих чертах характеризуют единичные явления. Также и законы, присущие единичным явлениям, не отражают в полной мере общих закономерностей, проявляющихся лишь в сфере статистических совокупностей.

В этом противоречивом единстве и заключается внутренняя связь между частью и целым, между единичными явлениями и их совокупностью. Биометрия помогает выявлять эту связь и оценивать значение отдельных факторов в свете общих закономерностей, присущих совокупности в целом.

Наконец, нельзя не отметить еще одну характерную черту биометрии - ее своеобразный язык знаков, символов, уравнений, графиков и формул. Все эти условные обозначения, предназначенные для “экономного” выражения мысли, биометрия заимствует из математики. Известно, что математическая логика отличается краткостью и точностью доказательных формулировок, убедительностью выводов. Благодаря символике удастся сравнительно простыми и точными средствами выразить содержание сложных и многообразных явлений природы, что значительно облегчает понимание присущих им закономерностей.

Графики, уравнения и формулы, поскольку они заключают в себе наиболее существенное и типичное в явлениях, служат своего рода математическими моделями этих явлений. Математическое моделирование в данном случае аналогично схематическим построениям в виде рисунков, графиков и иных изображений, широко используемых в педагогической и научно-исследовательской работе. В наш век сплошной компьютеризации именно математическое моделирование является основным методом описания выявленных законов и закономерностей в живой природе, в том числе и в лесных науках: лесоведении, лесоводстве, лесной таксации, защите леса, лесной генетике и селекции и т.д.

Разумеется, любые схемы и модели дают лишь некоторое подобие реальной действительности. Но именно в этом и заключаются их большие методические возможности. Достаточно облечь мысли в форму символов и знаков, геометрических фигур и уравнений, как это дает

широкие возможности для глубокого и всестороннего познания явлений, быстрого движения на пути к истине.

Но символы и вообще биометрические показатели приобретают определенный смысл лишь тогда, когда они соответствуют содержанию выражаемого ими процесса, находятся в тесной связи с конкретными задачами биологического исследования. В противном случае биометрическая символика не только не оправдывает себя, но может привести исследователя к ошибкам и заблуждениям.

Дело в том, что в краткости и точности числовых характеристик, в удобстве выражать биологические явления языком математических формул и уравнений заключены не только большие методические возможности, но и опасность отрыва от конкретных явлений, а это ведет к ошибкам, создает видимость истины там, где ее на самом деле нет. Не следует выражать математическими формулами или графиками то, что очевидно само по себе. Во многих случаях биометрические данные, сведенные в статистические таблицы, оказываются настолько убедительными, что не нуждаются ни в какой дополнительной обработке.

Посмотрим на две таблицы, показывающие ход роста сосновых древостоев.

Таблица 1.1 - Динамика средних высот соснового древостоя в кисличном и сфагновом типах леса

Возраст, лет	Средняя высота в разных типах леса, (м)	
	кисличный, I <sup>a</sup> класс бонитета	сфагновый, V класс бонитета
20	10,2	3,6
40	19,1	7,1
60	25,4	10,2
80	29,9	12,9
100	33,0	15,0

Из таблицы 1.1 сразу видно, что рост сосняка кисличного намного интенсивнее, чем сосняка сфагнового. Здесь можно привести сравнение по методикам биометрии, но результат заранее ясен. Посмотрим теперь другие материалы. Рассмотрим динамику двух однородных древостоев, растущих в одинаковых условиях, но отличающихся тем, что в одном из них провели рубки ухода, т.е. изредили древостой. В обоих участках определили среднюю высоту. Результаты измерений приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 - Изменение средней высоты в неизреженном и изреженном сосняке мшистом

Возраст, лет	Средняя высота, м	
	неизреженный древостой	изреженный древостой
20	8,3	8,3
40	14,4	14,6
60	19,5	19,4
80	23,2	23,7
100	25,7	26,1

Из таблицы 1.2 вытекает, что изреженный древостой имеет несколько среднюю большую высоту, но различия небольшие. Поэтому без дополнительного анализа судить о том, что изреженные древостои имеют большую среднюю высоту чем те, где рубки ухода не проводили, нельзя. Чтобы дать ответ на этот вопрос, надо обратиться к соответствующим биометрическим методам и оценить степень достоверности наблюдаемых в опыте различий. Методика такой оценки будет показана в дальнейшем.

Из сказанного отнюдь не следует, что нужно как-то ограничивать применение математических методов в лесоводстве. Речь идет не об ограничении, а о правильном использовании этих методов в лесных исследованиях. Сама по себе биометрия не ведет к ошибкам и заблуждениям: они возникают при неумелом, механическом использовании биометрических показателей без учета их конструктивных особенностей и теоретического обоснования. В работе лесоведа в равной мере неприемлемы как биометрическое жонглирование, превращающее работу исследователя в бесплодную и вредную “игру в циферки”, так и примитивизм в оценке числовых показателей, ведущий на деле к отказу от применения математических методов в лесном хозяйстве. Истина, как это всегда бывает, заключена не в крайностях, а в разумном подходе к делу.

### **1.3 История возникновения и развития математической статистики и биометрии**

Биометрия сама по себе наука относительно молодая. Первые опыты ее применения относятся к работам Борелли, который на рубеже XVII и XVIII веков делал математические расчеты движения животных. В начале XVIII века французский ученый Реомюр (1683-1757) (вспомним, что есть температурная шкала Реомюра) искал математические законы строения пчелиных сотов.

Но как полноценная наука биометрия появилась лишь к концу XIX века. Термин “биометрия” был введен в науку английским ученым-

антропологом Фр. Гальтоном (1822-1911) в 1889 году для обозначения количественных методов, применяемых в области биологических исследований. В дальнейшем Дункер (1899) предложил другое название - "вариационная статистика", которое тоже вошло в обиход как выражающее более точное содержание данного предмета. В настоящее время употребляются оба эти термина, хотя буквальный смысл их неодинаков. Слово "биометрия" (от лат. *bios* - жизнь, *metron* - мера) означает производство биологических измерений, а термин "вариационная статистика" (от лат. слов *variatio* - изменение, колебание и *status* - состояние, положение вещей) понимается как описание наблюдений, их математическая обработка. Гораздо более длительную историю имеет как общая статистика, так и математическая или вариационная статистика.

Развитие статистики началось в эпоху античности, т.е. эта наука имеет древние корни. Например, использование среднего значения было хорошо известно еще при жизни Пифагора (VI в. до н.э.), а упоминания о статистических обследованиях встречаются и в библейские времена. Статистика постепенно развивалась там, где в ней возникала необходимость. В первую очередь статистические методы начали применяться для анализа экономики и явлений общественной жизни, и лишь позже они проникли в биологию. Так, Исаак Ньютон (1642-1727), чей вклад в открытие дифференциального и интегрального исчисления был выдающимся событием в математике, а его теория всемирного тяготения и «ньютоново яблоко» известны любому старшекласснику, является, возможно, наиболее заметной фигурой в области развития современной статистики, хотя сам Ньютон вряд ли слышал когда-либо о существовании этой науки. Другие математики, чьи имена известны прежде всего благодаря работам в области чистой математики, косвенно сделали для развития статистики больше, чем многие из тех ученых, которые непосредственно специализировались на этой науке. Двумя наиболее выдающимися представителями таких ученых-математиков являются Абрахам де Муавр (1667-1754) и Карл Гаусс (1777-1855).

Что касается самих ученых-статистиков, то стоит упомянуть бельгийца Адольфа Кетле (1796-1874), который первым применил современные методы сбора данных. Возможно, вам покажется несколько неожиданным, что и знаменитая английская медицинская сестра середины XIX века (крымская война 1854-55 гг) Флоренс Найтингейл (1820-1910) всю свою жизнь была горячей сторонницей применения статистики. Напомним, что высшей международной наградой медицинским сестрам, спасающим солдат на войне, является медаль Флоренс Найтингейл. Ею награждены и многие советские медицинские сестры – участницы Великой Отечественной войны 1941-1945 гг. Ф. Найтингейл, работавшая впоследствии на руководящих должностях, доказывала, что администратор может иметь успех только в том случае, если он в своей деятельности будет руководствоваться данными, получаемыми с помощью статистики, и что законода-

тели и политики часто терпели неудачи из-за того, что их статистические познания были недостаточны.

Двумя другими учеными, внесшими значительный вклад в развитие статистики, являются два англичанина - Фрэнсис Гальтон (1822-1911) и Карл Пирсон (1857-1936). Гальтон, родственник Чарльза Дарвина (1809-1882), серьезно заинтересовался проблемой наследственности, к анализу которой он вскоре применил статистические методы. Гальтон и Пирсон внесли значительный вклад в развитие теории корреляции, которую мы детально рассмотрим ниже. Наиболее известным ученым в области статистики в двадцатом веке являлся Рональд Фишер (1890-1962). Фишер продуктивно работал с 1912 по 1962 г., и многие его исследования оказали существенное воздействие на современную статистику.

В двадцатом веке статистические методы официально введены в Соединенных Штатах для обучения во всех колледжах. Там читались небольшие курсы статистики. В течение первых тридцати лет этого века постепенно возрастало значение статистики в исследовании проблем психологии. При этом отметим, что в данный период психология как наука не была самостоятельной и часто рассматривалась лишь как один из разделов философии.

Применение математической статистики не обошло и лесную отрасль. В лесном хозяйстве нашей страны (Россия, СССР) математическая статистика стала использоваться с конца XIX века в основном благодаря трудам известного лесоведа и таксатора профессора А.К. Турского. Уже в 20-30 годы прошлого века математическая статистика стала неотъемлемой частью исследований в лесном хозяйстве.

Одной из причин широкого применения статистических показателей в последние годы является все возрастающая легкость обработки больших массивов чисел. Современные компьютеры позволяют в короткое время проанализировать огромное количество статистических данных, что раньше было невозможно.

Для внедрения математики в биологию и лесное хозяйство в конце XIX и начале XX века имелись серьезные основания. Одним из них был переход от описательного метода изучения явлений жизни к экспериментальному. Хотя и при описательном подходе возможно установление математических закономерностей (примером могут быть законы движения небесных тел), однако преобладает в этом случае качественная оценка. Эксперимент же неизбежно требует количественного выражения явлений и процессов. Создание физиологии, генетики, радиобиологии и других экспериментальных областей биологии повлекло за собой разработку многочисленных математических приемов и методов исследования. Большую роль сыграли и чисто практические причины. Разработанные методы стали широко применяться в зоологии, ботанике, лесоводстве, лесной таксации и других биологических науках.

Наконец, важнейшим обстоятельством, определившим использование математических и математико-статистических методов, явилось установ-

ление того факта, что многим биологическим явлениям свойственны статистические закономерности, обнаруживаемые при изучении совокупностей, но неприменимые к отдельным единицам этих совокупностей.

Когда физики перешли от изучения поведения отдельных физических тел к изучению поведения множеств молекул, электронов, они вступили в область действия статистических законов. На этой основе создалась особая область физики - статистическая физика, изучающая свойства и поведение систем, состоящих из огромного количества отдельных частиц. В основе многих физических явлений, таких, как радиоактивный распад, термодинамические явления и некоторые другие, лежат статистические закономерности. С их открытием закономерности, установленные эмпирически, например законы термодинамики, получили более глубокое обоснование и были выведены из статистических вероятностных законов.

Физики в начале XIX века долго не могли примириться, что в микромире действуют статистические законы. Ранее казалось, что в физике все детерминировано, т.е. на однозначное действие наступает однозначный результат. Квантовая механика это отвергла. Даже великий Альберт Эйнштейн (1879-1955) долго не мог воспринять такое, неоднократно повторяя: "Неужели господь Бог играет с нами в кегли". Большинство великих физиков верили и верят в Бога.

Примерно такое же положение наблюдается и сейчас в ряде областей биологии. Когда зоологи, ботаники перешли от изучения отдельных "типичных" представителей вида к изучению многих особей одного вида, они обнаружили массовые явления статистической природы. Рыбы, рачки, моллюски, сосны, коловоротки, водоросли, инфузории и другие животные и растения характеризуются изменчивостью, вариацией по самым разнообразным признакам. Такой же вариацией обладают и организмы, культивируемые человеком: колосья пшеницы различаются количеством зерен в колосе, весом отдельных зерен; звери одного вида имеют разную массу, у них варьирует экстерьер и окрас. Весьма изменчивыми объектами являются лесные насаждения. Даже в однородном древостое мы видим большое разнообразие деревьев: по высоте, диаметру, форме кроны и т.д.

При изучении биологических совокупностей, являющихся типично статистическими, оказалось целесообразным применить методы математической статистики, которую в приложении к биологии стали называть биологической статистикой. Еще ее называют вариационной статистикой.

Поле для приложения статистических методов в биологии очень значительно, так как многие экологические, генетические, цитологические, микробиологические, радиобиологические явления - массовые по своей природе. В них участвуют не одна особь или клетка, не одна  $\alpha$ -частица, не одна бактерия или вирусная частица, не одно дерево, а множества, т.е. совокупности клеток,  $\alpha$ -частиц, бактерий, особей вида, семей, деревьев и т.д. Осуществление событий в таких совокупностях



может быть оценено вероятностями, а анализ их требует применения статистических методов.

Статистические методы существенно необходимы и при постановке экспериментов, так как только с их помощью можно установить, зависит ли наблюдаемое различие между опытными и контрольными деланками леса от влияния изучаемого фактора или же оно чисто случайно, т.е. определяется многими другими, не контролируемыми и не поддающимися учету факторами. Понимание и учет статистических закономерностей помогают экспериментатору составить методически обоснованный план опытов, правильно их провести и, наконец, сделать из них объективные выводы. При этом надо помнить, что никакая математическая и статистическая обработка не поможет, если опыты были проведены неправильно или данные собраны небрежно.

Роль математики и математической статистики в биологии особенно возросла в связи с развитием теории информации и кибернетики в целом и многих связанных с ними областей математики, среди которых главное место занимают теория вероятности, математическая статистика и математическая логика. Применение компьютеров на порядки ускорило и расширило применение статистических методов в биологии вообще и в лесоводстве в частности.

Использование математики в современной биологии не ограничивается только статистическими методами. Поэтому биометрия (или биоматематика, как ее иногда называют) шире, нежели биологическая статистика. Она использует также приемы и методы из других областей математики: дифференциального и интегрального исчисления, теории чисел, матричной алгебры и т.д.

Внедрение математики в биологию первоначально выражалось в использовании отдельных математических и математико-статистических методов для изучения тех или иных биологических вопросов и обработки данных, полученных из природы или в лаборатории. Такие вопросы, как изменчивость морфологических, физиологических и экологических признаков животных и растений и установление влияния на них внешних и внутренних факторов, количественный учет и процессы, происходящие в популяциях, сходство и различия между видами, подвидами и иными систематическими категориями, рост индивидуальный и рост популяций, могут изучаться лишь с помощью математических и математико-статистических методов. Более того, в различных областях биологии (генетика, эволюционное учение, селекция, физиология), а также практически во всех лесных науках: лесоводстве, лесной таксации и др. соответствующие биологические процессы или явления теперь выражаются в математической форме.

Таким образом, пройдя длительный путь развития, математическая статистика и биометрия сегодня предстают перед нами как стройные и высокоразвитые науки, имеющие большое практическое значение.

#### 1.4 Лесная биометрия как часть общей биометрии и ее значение для развития лесного хозяйства

Нас, как лесоводов, при изучении биометрии больше всего интересует тот ее раздел, который называется “лесная биометрия”.

Лесная биометрия - это раздел биометрии, содержанием которого является планирование и организация количественных экспериментов в лесоведении, лесоводстве, лесной таксации и в других лесных дисциплинах, обработка и анализ полученных результатов, используя методы математической статистики.

Лесная биометрия достаточно развитая наука. Для описания леса, лесных биогеоценозов, отдельных элементов лесного насаждения используются и дают важные практические результаты многие математические подходы, применяющиеся в общей биометрии.

Методы лесной биометрии широко используются при анализе процессов в природных явлениях, свойственных деревьям и древостоям, а также отдельным участкам леса. В качестве примера можно привести анализ наследуемости признаков деревьев и древостоев, оценка эффективности различных лесохозяйственных мероприятий.

Лесная биометрия - необходимый методический инструмент для проведения научных исследований в лесу, при разработке различных нормативных и справочных материалов. Например, все лесоводы пользуются сортиментными и объемными таблицами для учета леса на корню, применяют специальные таблицы для учета готовой лесопродукции, измеряя длину сортимента и его диаметр в верхнем отрезе и т.д. В этих таблицах приведены усредненные величины, полученные на основе обработки методами биометрии большого экспериментального (его еще называют первичным или исходным) материала. Далеко не каждое бревно определенной длины и диаметра имеет объем точно совпадающий с тем, который приведен в справочнике для искомых параметров длины и диаметра. Но, пользуясь методами лесной биометрии, ученые получили объемы с достаточной степенью приближения к реальности, и точность определения увеличивается при возрастании числа измерений.

На этом небольшом примере, а их очень много, мы видим, что ни лесная наука, ни лесохозяйственная практика не могут обойтись без использования в своей работе лесной биометрии. Методы лесной биометрии широко применяются также при обработке лесоустроительного материала в геоинформационной системе «Лесные ресурсы» с помощью компьютерных программ в системе «СОЛИ», а также при анализе данных аэро- и космической съемки.

В лесной биометрии широко применяются методы математического анализа, математическое моделирование. В настоящее время наиболее рациональным является применение биометрических методов с использованием компьютеров. Практически сегодня все вычисления проводятся только на компьютерах.

В то же время, чтобы правильно использовать методы лесной биометрии, необходимо хорошо знать лесоводство, лесную таксацию, лесные культуры и другие дисциплины, где применяют эти методы. Без хорошего знания той дисциплины, в которой мы работаем, биометрические методы получения корректного результата не гарантируют. Механическое, бездумное жонглирование цифрами, сведенными в модели, пусть даже и обработанными статистическими методами, недопустимо, т.к. может привести к ложным выводам.

Прежде чем выводить модель, надо представить общую биологическую закономерность. Например, известно, что дерево растет вверх, диаметр дерева не может уменьшаться и т.д. Это простейшие примеры, где все очевидно. Но есть много случаев, когда бездумное применение статистических моделей приводит даже при анализе роста деревьев к отрицательным величинам. В отношении приведенных примеров ошибку выявить легко, но далеко не все закономерности столь очевидны. Именно поэтому, начиная работу с материалом, который будет обработан биометрическими методами, надо очень хорошо знать свой предмет: лесоводство, таксацию, лесную селекцию и т.д. В дальнейшем при изучении разных методов биометрии мы это рассмотрим более подробно на конкретных примерах.

Очень часто ставят равенство между лесной биометрией и математической или вариационной статистикой. Следует помнить, что математическая статистика шире биометрии, а тем более, лесной биометрии, т.к. охватывает весь круг природных явлений живой и неживой природы, добавляя сюда технику, общество и экономику.

Когда мы в дальнейшем будем говорить о соотношениях математической статистики и лесной биометрии, то должны иметь в виду, что объектом применения статистических методов у нас будут деревья, древостой, лесные биогеоценозы и т.д. Вариационная статистика широко используется в исследованиях не только для оценки и анализа результатов измерений, но и для планирования эксперимента.

Биометрия как наука не стоит на месте. Здесь разрабатываются новые подходы и совершенствуются старые способы. Это расширяет круг решаемых задач в лесном хозяйстве.

Обобщая сказанное, можно сделать следующие выводы.

- Лесная биометрия широко используется в лесном хозяйстве.

- Без знания лесной биометрии невозможно понять суть и значение многих нормативов и величин, широко применяемых в лесном хозяйстве.

- Лесная биометрия - составная часть методики научных исследований в лесном деле. Любому исследователю ее обязательно надо знать и знать хорошо.

В дополнение ко всему отметим, что это интересная и захватывающая наука. Она имеет свою строгую логику, свои законы. В то же время лесная биометрия непростая наука, требующая для своего освоения серьезной работы и хорошей общебиологической, лесоводственной и математической подготовки.

## 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СОВОКУПНОСТИ

2.1 Статистические совокупности и статистические наблюдения. Статистические выборки

2.2 Генеральная и выборочная совокупность и их объем

2.3 Методы сбора и обработки информации в лесной биометрии

2.4 Дедуктивный и индуктивный методы в лесной биометрии

### 2.1 Статистические совокупности и статистические наблюдения. Статистические выборки

Изучение биологических явлений проводится не по отдельным наблюдениям, которые могут оказаться случайными, нетипичными, неполно выражающими сущность данного явления, а на множестве однородных наблюдений, что дает более полную информацию об изучаемом объекте. Например, изучая лес, скажем ельник в определенных условиях места произрастания, мы не ограничиваемся измерениями 1-2 или 5-10 деревьев, а проводим замеры на всей пробной площади, где растет не меньше 200 еловых стволов, т.е. изучаем ту их совокупность, которая уже составляет лес.

Некоторое множество относительно однородных предметов или объектов, объединяемых по тому или иному признаку для совместного изучения, называют статистической совокупностью. При этом совершенно не обязательно, чтобы совокупность состояла из множества особей одного вида и возраста, например из однородных деревьев сосны. Она может быть образована и в результате многочисленных испытаний, т.е. проб, наблюдений и т.п., проводимых на одном и том же индивидууме. Например, статистической совокупностью будут данные наблюдений за выработкой условных рефлексов у одной собаки или кошки, фенологические наблюдения за одним или несколькими деревьями дуба и т. д.

Таким образом, совокупность объединяет какое-то число однородных наблюдений или регистраций. Совокупностями являются деревья в древостое, популяции муравьев, заготовленные во время охоты беличьи шкурки, растения на опытных участках. Понятие совокупности применимо не только к животным или растениям. Такими же совокупностями являются молекулы газа в некотором объеме, население города и т.д.

В состав совокупности входят различные **члены**, или **единицы**: для популяции животных - каждое отдельное животное, для стада коров единицей является каждая корова, для совокупности шкурок - каждая шкурка, для совокупности семян сосны - каждое семечко, для древостоя – дерево, при изучении дерева – его клетки и т. д.

Общее свойство изучаемого предмета называется его признаком. Так, при изучении лесного насаждения признаками будут древесный вид, возраст деревьев и древостоев, размер, форма или цвет семян, особенности вегетации (у дуба есть рано или поздно распускающиеся формы) и т. д. Число единиц

совокупности называют **объемом совокупности** и обозначают латинской буквой N. Единица совокупности может характеризоваться определенными признаками, например: коровы – удоями за лактацию, весом, мастью; молекулы газа – скоростями их движения; семена сосны – формой, цветом, весом; деревья - толщиной, высотой и т. д.

Каждый изучаемый признак принимает разные значения у различных единиц совокупности, он меняется в своем значении от одной единицы совокупности к другой. Это различие между единицами совокупности называется **вариацией** или **дисперсией**, т.е. рассеянием. Мы говорим - “признак варьирует”. Это означает, что он принимает различные значения у разных членов совокупности, например у коров данной породы, семян одного вида, деревьев одного вида и т.п.

Элементы, входящие в состав совокупности, называются ее членами, или вариантами. Последний термин произошел от латинского *varians* - изменяющийся. Варианты - это отдельные наблюдения или некоторые числовые значения признака. Так, если обозначить признак через X (большое), то его значения или варианты будут обозначаться через x (малое), т.е. как  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots x_k$ .

Общее число вариантов, входящих в состав данной совокупности, называется ее **объемом** и обозначается буквой N или  $\sum n$ . Саму же варьирующую величину, т.е. величину, изменяющуюся под влиянием многих случайных причин и могущую принимать разные значения, называют **случайной переменной  $n_i$** . Варианты являются ее числовыми значениями. Здесь значок *i* - порядковый номер варианты.

В то же время, несмотря на различия между вариантами, входящими в совокупность, последняя обладает внутренней однородностью. Члены совокупности сходны по ряду важных признаков. Беличьи шкурки неодинаковы по размерам, качеству меха, окраске, но все они - шкурки особей одного и того же вида - белки обыкновенной. Зерна пшеницы отличаются друг от друга по весу и другим химическим и физическим признакам, но все они - зерна пшеницы, а не ячменя, хотя обе культуры могли быть выращены на одном поле. Деревья варьируют по размеру, но все они одного вида, например, сосны. Желуди дуба отличаются по размерам, весу, цвету, но они семена одного древесного вида – дуба черешчатого и т.д.

Чаще всего, в состав совокупностей входят отдельные особи. Так, например, при характеристике плодоносящих деревьев сосны на лесосеменной плантации за единицу совокупности можно взять каждое дерево. Однако единицей совокупностей может быть не само дерево, а некоторая его характеристика. В данном случае допустимо взять урожай шишек или семян за определенные годы. Тогда при общем количестве деревьев на лесосеменной плантации, скажем 200 штук, количество вариантов, получаемых за несколько лет семян, составит 600, 800 или другую величину.

Можно изучать вариацию того или иного признака во времени даже на одном дереве. Как известно, размер семян и их вес величина измен-

чивая в зависимости от ботанических и абиотических факторов. Изучая их изменение на одном дереве за ряд лет, тоже получаем статистическую совокупность, которая изучается методами биометрии. Такой же совокупностью является время распускания почек на одном и том же дереве, но в разные годы. Совокупностью будет длина и вес иголок сосны на одной ветке и т.д.

Таким образом, сумма наблюдений или измерений есть тоже совокупность. Каждое отдельное наблюдение, при котором устанавливается значение случайной переменной, является единицей этой совокупности.

Совокупность может состоять из других, более частных совокупностей. Так, совокупность из всех диких животных одного вида распадается на частные совокупности – отдельные популяции. В пределах одной популяции можно выделить еще более частные совокупности, например, потомство определенных самцов или самок. Изучая древостои сосны, их можно разделить по областям, лесхозам или лесорастительным районам. Во всех случаях мы сталкиваемся с постоянными различиями как внутри отдельных частных совокупностей, так и между ними.

## 2.2 Генеральная и выборочная совокупность и их объем

Наиболее общую совокупность называют **генеральной**. Это теоретически бесконечно большая или, во всяком случае, приближающаяся к бесконечности совокупность всех единиц или членов, которые могут быть к ней отнесены. Так, если бы можно было описать все особи данного вида, например все деревья сосны в лесах Беларуси, то они составили бы генеральную совокупность.

Генеральная совокупность может состоять из такого большого количества единиц, что изучить их всех нет возможности. Поэтому практически приходится иметь дело со сравнительно небольшими **выборочными** совокупностями. Так, зоолог, изучающий в лесу тот или другой вид животных, отлавливает несколько экземпляров и по ним стремится сделать вывод обо всех особях вида. Лесовод закладывая пробную площадь, где всего-то 200 деревьев, делает выводы о всей совокупности.

Вопрос о том, в какой степени по выборочной совокупности можно судить о генеральной, принадлежит к числу важнейших теоретических и практических вопросов в биологической статистике. Он будет изложен ниже.

Задачей изучения всякой совокупности является получение статистических (или, как иногда говорят, биометрических) характеристик, или показателей. Они позволяют судить о данной совокупности в целом, о различиях внутри нее и об отличии ее от других, сходных с ней или близких к ней совокупностей. Совокупность становится статистической именно тогда, когда в ее описание вносится количественный метод. Применение количественного метода изучения совокупности и позволяет

получать для нее ряд статистических показателей. С их помощью мы получаем основную информацию о совокупности.

Чтобы выборочная совокупность как можно полнее отражала генеральную, необходимо учитывать следующие основные положения.

1. Выборка должна быть вполне представительной, или **типичной**, т.е. чтобы в ее состав входили преимущественно те варианты, которые наиболее полно отражают генеральную совокупность. Поэтому перед тем как приступить к обработке выборочных данных, их внимательно просматривают и удаляют явно нетипичные варианты. Например, при измерении длины колосьев нельзя включать в выборку испорченные головней или оборванные колосья, поскольку они нетипичны для такого рода выборки. При изучении хода роста деревьев в высоту надо исключить деревья, сломанные бурей, поврежденные огнем и т.д.

2. Выборка должна быть **объективной**. При образовании выборки нельзя поступать по произволу, включать в ее состав только те варианты, которые кажутся типичными, а все остальные браковать. Доброкачественная выборка производится без предвзятых мнений, по методу жеребьевки или лотереи, когда ни одна из вариантов генеральной совокупности не имеет никаких преимуществ перед остальными - попасть или не попасть в состав выборочной совокупности. Иными словами, выборка должна производиться по принципу случайного отбора, без каких бы то ни было субъективных изъятий на ее состав. Например, если мы хотим для определения средней высоты измерить 20 деревьев ели, то нельзя их выбирать по своему вкусу, исключая, скажем, низкие угнетенные стволы. Надо измерять высоту у каждого 10 или 20 и т.д. елового дерева. При этом надо учитывать ограничения, упомянутые выше в п.1, например, исключать деревья, сломанные ветром.

3. Выборка должна быть качественно **однородной**. Нельзя включать в состав одной и той же выборки данные, полученные на особях разного пола, вида, возраста или физиологического состояния, так как заведомо известно, что эти факторы по-разному сказываются на величине и функциональном состоянии признаков, по которым может быть образована выборочная совокупность. Неоднородный по составу материал не дает верной информации об изучаемых явлениях. Например, нельзя объединять в одну пробную площадь древостои разных типов леса, хотя бы они росли рядом, скажем сосняк брусничный и сосняк вересковый. Все эти условия может соблюсти только специалист, хорошо знающий не только биометрию, но и предмет своего исследования. В нашем случае это лесовод.

Эмпирические, или выборочные, совокупности могут иметь самый различный объем. В зависимости от числа наблюдений принято различать **малые** выборки, содержащие не более 30 вариантов, и выборки **большие**  $> 30$ , включающие в свой состав до 100-200 единиц совокупности и больше. Верхний предел здесь не ограничен. Принципиальной разницы между большой и малой выборками нет. Различать их прихо-

дится на том основании, что сравнительная оценка биометрических показателей, вычисляемых на малых выборках, находится в зависимости от числа наблюдений, о чем будет рассказано ниже.

Схематически совокупности можно выразить следующей схемой (рисунок 2.1).



Рисунок 2.1. Схема подразделения совокупностей

Качественная однородность совокупности определяется целью исследования. Варьирование по учетному признаку определяется единицей отсчета, которая должна быть не больше размера класса, разряда. В лесоводстве размеры разрядов или классов обычно принимается равной одной двенадцатой амплитуды ряда распределения, но допускаются в пределах  $1/8 - 1/16$ .

Таким образом, можно сделать вывод, что совокупность статистическая - это совокупность предметов, явлений, вещей, качественно однородных и варьирующих по учетному признаку: отсюда название - вариационная статистика.

Генеральная статистическая совокупность - некая философская категория, всеобъемлющая совокупность предметов, явлений, вещей, которая может рассматриваться как конечной, так и бесконечной, но обязательно качественно однородной и варьирующей по учетному признаку.

Выборочная (частичная) статистическая совокупность - это часть генеральной совокупности, удовлетворяющая требованиям репрезентативности.

### 2.3 Методы сбора и обработки информации в лесной биометрии

Выбор правильных методов сбора и обработки информации определяет результат исследования. Наиболее полно они разработаны К.Е.Никитиным и А.З.Швиденко, и мы здесь будем придерживаться этих методов.

Определенная научная или производственная задача, которая ставится в соответствии с очередными потребностями и планами развития отрасли, может быть решена на основе накопленной информации или для ее решения может потребоваться сбор (полный или частичный) новой информации. В обоих случаях в большинстве лесоводственных задач на



разных этапах используют нормативно-справочную информацию; иногда доля ее в общем количестве информации и влияние на конечные результаты весьма существенны.

Если имеющейся информации достаточно, то на ее основе формулируют соответствующую гипотезу и разрабатывают модель, которую проверяют эмпирически при помощи статистических методов. Если же такой информации недостаточно, то принимают решение о конкретных путях исследования, которые определяются целью работы, финансовыми и трудовыми возможностями, имеющимися в наличии средствами сбора и обработки информации.

Одним из основных моментов при организации наблюдения является разработка правильной методики. Надо помнить, что ошибки, допущенные в методике сбора первичного материала, не могут быть потом исправлены никакой камеральной обработкой и вызовут или неточности, или ошибки в выводах.

Как известно, существует два основных способа наблюдений по охвату единиц изучаемого объекта: сплошное обследование всех единиц изучаемой совокупности и частичное обследование, когда наблюдению подвергается лишь часть единиц изучаемой совокупности. В лесном хозяйстве обычно ограничиваются частичным (выборочным) обследованием. Выборку производят для получения характеристики целого, подлежащего изучению. Та совокупность, которая подлежит изучению, называется общей, или генеральной, а отобранные из нее единицы наблюдения представляют частичную, или выборочную, совокупность. Относительная часть, которую составляет число единиц с данным значение признака от общего числа единиц совокупности, называется в генеральной совокупности - долей, а в выборочной - частностью.

Как сплошное, так и несплошное наблюдение по способу производства может быть;

- По связи с объектом - непосредственное, экспедиционное, корреспондентское и отчетное;
- По времени производства - непрерывное, по мере возникновения явления (например, фенологическое); периодическое (повторное) - через определенные промежутки времени и единовременное или однократное;
- По источникам - собственное наблюдение, устный и письменный (анкетный) опрос и по документальным материалам – литературным, служебным и архивным данным.
- По особенностям отбираемых единиц:
  - ❖ отбор средних типичных единиц, применяемый в лесной таксации;
  - ❖ отбор случайных единиц, производимый по специальному плану, который является в статистике основным;
  - ❖ по виду самого отбора:
    - ❖ бесповторное, когда отобранная единица после производства наблюдений над ней не возвращается в генеральную совокупность;

❖ повторное, когда обследованная единица возвращается в генеральную совокупность и может снова попасть в отбор.

• По принципу взятия единиц - случайный, типический (по группам, однородным по какому-либо признаку) и механический. Отбор можно производить или из всей совокупности, а также из ограниченной совокупности. В последнем случае единицы с крайними значениями признака не принимаются во внимание, отбор может вестись и из частных совокупностей, на которые общая совокупность разбита на основе количественных (например, ступени толщины) или же качественных (например, классы роста деревьев) признаков. Частичное наблюдение методом случайного отбора, при котором каждая единица изучаемого объекта обладает одинаковой с другими возможностью попасть в выборку, обеспечивает полную объективность наблюдения.

При работах в лесу случайность (объективность) отбора осуществляется применением механического отбора по принципу бесповторной выборки. В этом случае любая единица совокупности может попасть в выборку только один раз.

Принцип выборочного метода теоретически обоснован выдающимся русским математиком П.Л. Чебышевым (1821 – 1894), доказавшим, что при достаточно большой выборке выборочная средняя может быть как угодно близка к генеральной средней. Отсюда вытекает, что частость признака в выборочной совокупности может быть как угодно близка к доле этого признака в генеральной совокупности. Другими словами - достаточно большая выборка правильно воспроизводит особенности и свойства генеральной совокупности и тем лучше, чем относительно больше выборка.

Отбор единиц можно производить по методу случайной выборки, когда из совокупности наудачу, вслепую (например, по жребии) отбирают нужное число единиц. Это довольно сложно, а в условиях леса практически неприменимо. Поэтому материал наблюдения при исследованиях в лесном деле собирают путем механического отбора.

Сущность этого способа состоит в том, что всю совокупность механически разбивают на число частей, одинаковых по размеру или количеству единиц, соответствующих числу наблюдений, и в каждой части наудачу выбирают единицу для наблюдения. Можно разбить и на число частей, в несколько раз меньшее количества наблюдений. В этом случае из каждой части нужно взять наудачу не по одной единице, а во столько раз больше, во сколько нужно для наблюдения количество единиц больше числа механически образованных частей или групп.

Например, при изучении качества семян (плодов) всю партию семян можно механически разбить на несколько частей или групп, одинаковых по количеству или по весу семян, и из каждой такой части или группы выбрать наудачу партию семян для наблюдения. При отборе модельных деревьев всю совокупность стволов на пробной площади (200–300 шт.) делят по ступеням толщины (через 2–4 см) и отбор делают внутри этих ступеней.

Есть несколько широко применяемых способов отбора.

1. С п о с о б п о л о с о к . Поперек обследуемой площади (например, лесосеки), через одинаковое расстояние закладывают ленты одной и той же ширины, например, 1, 2 или 10 м, со сплошным обследованием на каждой. Площадь всех полосок или лент, выраженная в процентах от всей площади обследования, даст процент выборки. Величина процента выборки зависит от величины обследуемой площади (чем больше площадь, тем меньше может быть процент выборки) и степени колеблемости изучаемого признака: чем больше степень изменчивости признака, тем больше должна быть выборка. Поэтому число лент в разных случаях может быть разное. Значит, до составления методики нужно иметь представление о размерах обследуемых площадей и примерной изменчивости признака. Последнее определяется или по литературным данным, или по материалам лесхоза, или же путем предварительной закладки опыта. Число единиц наблюдения  $N$  (в данном случае - число лент, обеспечивающих результат с намеченной точностью) можно определить по формулам:

$$N = \frac{V^2}{p^2} \quad \text{или} \quad N = \frac{\sigma^2}{m^2},$$

где  $V$  - коэффициент изменчивости;

$\sigma$  - среднее квадратическое отклонение значений признака единиц от их среднего значения;

$m$  - намеченная точность в единицах измерения признака;

$p$  - намеченная точность, или точность опыта, %.

Методы нахождения  $V$ ,  $\sigma$ ,  $m$ ,  $p$  будут рассмотрены ниже.

Зная необходимое число лент и длину обследуемой площади, расстояние между центрами лент можно получить делением длины обследуемой площади на запроектированное число лент.

При невозможности предварительно подсчитать необходимое число лент надо брать не менее 5-10 лент и установить расстояние между ними делением длины обследуемой площади на число этих лент. Каждую ленту целесообразно разделить на три-пять частей, одинаковых по длине, которые и будут сложными единицами наблюдения, состоящими из ряда единиц совокупности (деревьев).

При обследовании лесных культур лентами могут служить ряды культур: один, два и больше в ленте. Количество отобранных рядов деревьев в лентах, выраженное в процентах от всего числа рядов на обследуемой площади, представляет процент выборки.

2. С п о с о б п л о щ а д о к . Площадки строго одинакового размера и формы закладывают через одно и то же расстояние одна от другой. Ширина и длина площадок в разных случаях может быть разной, т. е. площадки могут быть квадратными (например, 1×1, 2×2 м), прямоугольными (например, 1×2, 2×3, 2×4 м), круговыми и т.д.. Площадки размещают по площади или рядами, когда они лежат в один ряд, т. е. на одной

линии как в продольном, так и в поперечном направлении, или же в шахматном порядке. Это зависит от наблюдателя. Расстояние измеряется от центра площадок.

Такой способ применяют, например, при учете естественного возобновления. При учете культур площадками за учетные площадки принимают посадочные или посевные места. Последние для наблюдения можно отбирать или целыми полосами, расположенными через одинаковые расстояния друг от друга, или же отдельными площадками, когда в пределах полосы обследуют не все площадки, а лишь через одно и то же их количество, например - каждую пятую, каждую десятую и т.д., независимо от того, какой по своему состоянию она окажется.

Если число площадок  $N$ , необходимых для получения результата с заданной точностью, уже известно, то расстояние  $l$  между центрами площадок в м определяется по формуле

$$l = \sqrt{\frac{\Pi}{N}},$$

где  $\Pi$  - размер обследуемой площади, м<sup>2</sup>.

Наметив визиры (ходовые линии обследования), расположенные друг от друга на вычисленном расстоянии  $l$ , каждый из них разбивают на отрезки длиной тоже в  $l$  метров; в конце этих отрезков (или только справа, или только слева, или только на самом визире) закладывают площадки, где бы в натуре они ни пришлось, пусть даже на дороге или на прогалине. Передвигать их нельзя.

Так же можно закладывать ямы для определения зараженности почв, например майским хрущом, площадки на стволе для изучения степени заселенности и поражения вредителями-насекомыми и т.п.

Обследуемый участок предварительно можно разбить на типические части, однородные по какому-либо признаку, и каждую типическую часть обследовать отдельно (типическая выборка). Но разбивку целого на типические части для их характеристики можно производить камерально - по материалам наблюдения. Например, обследуя большую неоднородную площадь лесных культур ее следует разделить на относительно однородные части.

**3. Способ визиров.** На обследуемой площади через одно и то же расстояние один от другого пробивают визиры. На каждом визире учетные единицы (площадки, экзemplяры и т. п.) для наблюдения можно отбирать двумя способами.

- В каждую энную (например, десятую, двадцатую и т.д.) по ходу, но только всегда или слева, или только справа, независимо от того, какой по своему состоянию окажется отобранная единица наблюдения. Следует заметить, что принцип отбора энной (пятой, десятой и т.д.) по порядку единицы наблюдения можно применять, например, и при отборе веток деревьев для изучения плодоношения и в ряде других случаев; при сплошных перечетах - отбор для более детального изучения каждого энного дерева подряд. Так берут модельные и учетные деревья.

- Учетные единицы намечают через определенное число метров, например - 10; 20; 50 м и т.д. - в зависимости от величины обследуемой площади. Здесь обследуется та единица, которая окажется как раз в конце каждого такого отрезка визира или в ближайшей к этой точке. При этом соблюдается правило отбора, указанное в предыдущем пункте. Число отрезков, на которое будут разбиты все визиры, равняется числу отбираемых единиц наблюдения. Следовательно, зная необходимое число единиц наблюдений, задавшись расстоянием между визирами, можно подсчитать число и общую длину визиров и разделить последнюю на принятое число единиц наблюдения. В результате получим требуемое расстояние по визирю между отбираемыми единицами, или иначе - длины отрезков в конце которых и производится наблюдение. Отобранные таким путем деревья носят название модельных, если они срубаются, и учетных - если они не срубаются.

Описанным приемом можно отбирать деревья для изучения процента выхода деловой древесины, процента зараженных деревьев и т.д., подвергая глазомерному наблюдению (описанию), скажем, каждое десятое дерево. Для детального изучения со срубкой дерева можно брать, например, каждое двадцатое, сороковое и т.д., исходя из того, какое количество деревьев требуется для детального обследования.

- Задачей наблюдения может стоять выявление влияния на объект наблюдения, например на дерево, окружающей среды, скажем, сомкнутой биогруппы, открытого места, полога леса и т.д. Эти особенности среды могут также влиять на характер возобновления, на состав и состояние живого напочвенного покрова, на плодоношение разных растений, на рост и развитие леса и т.д. Тогда учетные площадки одного и того же размера закладывают в этих типических условиях, влияние которых требуется изучить; они нередко подвергаются повторным периодическим наблюдениям, например через каждые 5 или 10 лет.

При сборе материала следует создать такой фундамент из точных и бесспорных фактов, на который можно было бы опираться, с которым можно было бы сопоставлять результаты других исследователей; Поэтому необходимо анализировать не отдельные факты, а всю совокупность относящихся к рассматриваемому вопросу фактов, без единого исключения, в их связи и без вырывания отдельных фактов и цифр из общей связи явлений.

При производстве наблюдений важным является разработка формы записи данных наблюдения с четким перечнем всех признаков, подлежащих учету, и указанием единиц и точности измерения. От качества формы записи зависит и полнота получаемых сведений. Форма записи может быть списочная, когда в ведомость заносятся данные наблюдений по каждой единице наблюдения в порядке обследования, и карточная, когда все данные о каждой единице наблюдения заносятся в отдельную карточку или бланк. Характерным примером здесь будет карточка таксации модельного дерева. Карточная система записи удобнее в том отношении,

что сильно облегчает камеральную обработку при сводке и группировке материала по разным признакам. В настоящее время все чаще для записи используют носители информации для компьютеров, которые вставляют в специальные устройства. В этом случае информация сразу вводится в ПК, исключая ее набор, что многократно ускоряет процесс обработки информации.

Перед началом исследований разрабатывается методика производства наблюдения: уточняется единица наблюдения, если она сложная, определяются ее размеры и форма (ленты, пробные площадки и площади); устанавливается точность конечного результата и необходимое количество единиц наблюдения, способ производства наблюдения, отбора единиц; оформление единиц наблюдения в натуре; сроки наблюдений и единицы измерений. Составляется календарный план работ и смета расходов.

Обобщая изложенное о проведении наблюдений, можем сделать такое заключение.

- Наблюдение является опытной основой статистического исследования.

- Для того, чтобы по данным выборки можно было бы с определенной степенью уверенности делать заключения о совокупности, выборочное наблюдение должно быть правильно организовано. Здесь решают два основных вопроса:

- какое число наблюдений является достаточным;

- какие единицы совокупности должны быть выбраны для наблюдения, т.е. что (кто) будет составлять выборку.

Первый вопрос может быть решен с помощью таблицы достаточно больших чисел, которая приводится во многих пособиях по статистике, или с применением специальных формул. Они будут описаны ниже.

- Отбор единиц для наблюдения может быть спланирован различным образом в зависимости от состава совокупности и сведений о ней.

- Если совокупность варьирует не в слишком широких пределах и если выборка составляет не менее 20% объема совокупности, применяют простой случайный отбор единиц или простое выборочное наблюдение. Для этого удобно пользоваться таблицей случайных чисел.

- В лесном хозяйстве воспользоваться таблицей случайных чисел в натуре технически тяжело и практически часто невозможно. Поэтому здесь пользуются систематическим выборочным наблюдением. Например, если предстоит взять 10%-ную выборку деревьев из 800 штук, то случайным порядком выбирают первое, положим 5 дерево, и после этого берут каждое следующее через 10 номеров, т.е. за номерами: 15, 25, 35 и т.д., кончая номером 795.

- Если имеются сведения о том, что совокупность в своих частях неодинакова, например с более высоким уровнем явления в одних частях чем в других, целесообразно послойное выборочное наблюдение. Например, известно, что запас древостоев меньше варьирует в пределах

классов возраста. Тогда для получения статистических характеристик величины запаса всю совокупность древостоев расчлняют на группы по возрасту. Получим слои совокупности, для каждого из которых берут независимую выборку и вычисляют ее характеристики. Статистическая обработка материалов опыта послойной выборки несколько сложнее.

Но только наблюдениями и их статистической обработкой не ограничивается сбор информации в лесоводственных и иных исследованиях. Очень часто в дополнение к наблюдениям ставится эксперимент. В совокупности наблюдение и эксперимент практически исчерпывающие источники первичной информации в лесном хозяйстве.

Наблюдения обычно не требуют вмешательства в нормальное функционирование объекта. Во многих лесоводственных исследованиях они являются единственно возможными, например, фенологические наблюдения, изучение роста деревьев и древостоев, приживаемости лесных культур и др. Однако определенная “пассивность” наблюдения по отношению к объекту исследования не предполагает отсутствия плана или системы: наблюдение как метод научного познания предполагает наличие строгого плана. Хорошей иллюстрацией планируемых наблюдений являются выборочные методы инвентаризации лесных ресурсов на больших территориях, которые проводятся во многих странах.

Эксперимент предполагает активное и целенаправленное воздействие на изучаемый объект или явление, определенную управляемость условий его проведения. Соотношение роли наблюдения и эксперимента достаточно сложное. В научном познании задача наблюдения обычно более скромна и сводится чаще к описанию и анализу наблюдаемых явлений и процессов. В эксперименте сильнее теоретическая сторона, уровень осмысливания наблюдаемых факторов; эксперимент располагает средствами активного вмешательства в ход событий. Однако в лесном хозяйстве, особенно при изучении природных объектов, наблюдение часто играет более важную роль, чем эксперимент.

Для удобства классификации можно выделить обычный модельный эксперимент и математически спланированный или экстремальный. Обычный модельный эксперимент отличается выделением изучаемых связей и изоляцией их от внешних воздействий; при этом он может быть однофакторным и многофакторным. Например, берем сеянец, помещаем его в искусственную среду и исследуем влияние на его рост некоторого удобрения. Если же этот сеянец наблюдать в естественных условиях, то надо учесть и осадки, и температуру и другое, т.е. много факторов, а не одно удобрение. Математическое планирование эксперимента (многофакторное) позволяет оптимизировать сам процесс исследования: заранее выбрать наилучшую (с точки зрения цели работы) математическую модель, применить последовательную стратегию и скорректировать направления исследований после каждого этапа и т.д.

При любом методе сбора информации ее обработку и использование строят по схеме: информация - гипотеза - модель - проверка соответ-

ствия модели исходной информации и объекту, для которого разработана модель (рисунок 2.2).

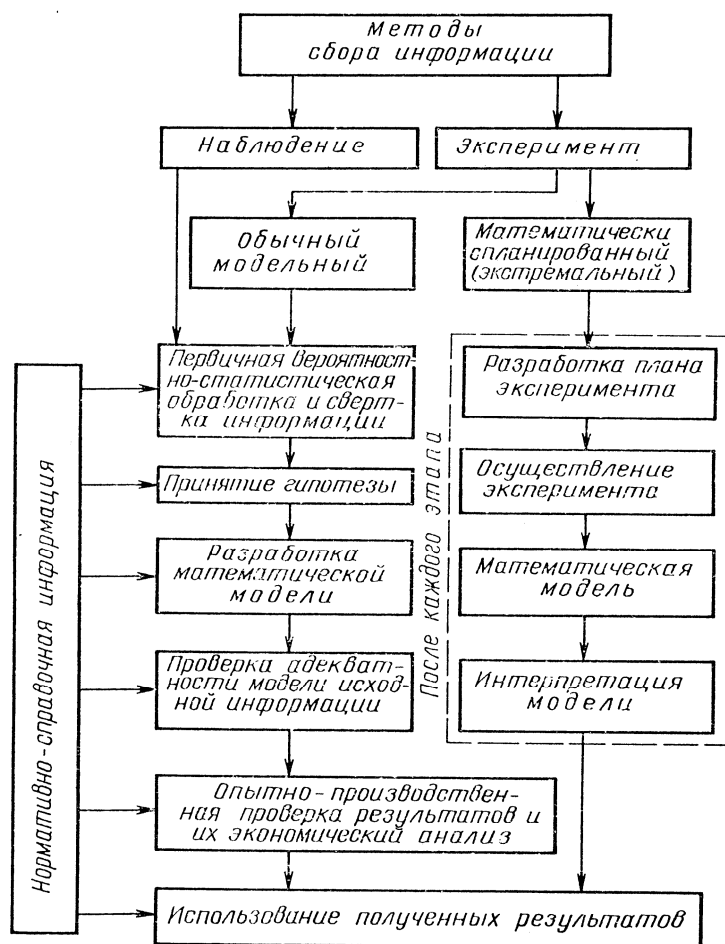


Рисунок 2.2 Упрощенная схема движения лесоводственной информации (по К. Е. Никитину и А. З. Швиденко)

Следует подчеркнуть важность последнего этапа, нередко недооцениваемого. Возможность применения модели в конкретной ситуации требует обязательного доказательства, которое может быть вероятностно-статистическим, если в процессе исследования не нарушались основные статистические предпосылки организации сбора информации, или эмпирическим, т.е. на основе дополнительно собранной контрольной информации.

В основе получения первичной численной информации лежит, как правило, процесс измерения - нахождения значений физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств. В настоящее время существует два подхода к измерительному процессу: классический и информационный. В большинстве задач лесного дела выполняются основные предпосылки классического подхода к измерениям: измеряемая величина предполагается неизменной на протяжении времени измерений и характеризуется одним значением, для которого можно указать интервал неопределенности, т.е. ошибку измерений; вре-



мя измерения практически не ограничено; внешние условия и факторы, влияющие на результат измерения, учтены полностью. Информационная модель измерительного процесса трактует измерение как случайный процесс, т.е. позволяет оценивать качество измерения величин, меняющихся во времени.

Измерение может быть прямым и косвенным. В первом случае изучаемую величину измеряют непосредственно, во втором - наблюдают не изучаемую величину, а другую, которая с ней связана и которую проще измерить. Так, объем растущих деревьев обычно определяют измерением их диаметра и высоты, а объемный прирост находится путем измерения радиального прироста, энергии роста и т.д. Переход к величине, являющейся предметом изучения, происходит при помощи математических моделей связи. Более подробно это будет изложено ниже.

## 2.4 Дедуктивный и индуктивный методы в биометрии

В лесной биометрии применяют как дедуктивный (от общего к частному), так и индуктивный методы исследований.

Дедуктивный метод применяется, когда, хотя бы ориентировочно, известны общие закономерности изменения случайной величины. Так, мы знаем центральную предельную теорему, доказанную русским математиком и механиком А. Ляпуновым (1857 – 1918) в 1901 году, которая гласит, что распределение суммы независимых случайных величин ( $i=1, 2, \dots, n$ ) стремится к нормальному распределению при неограниченном увеличении  $N$ , если все величины имеют конечные средние и дисперсии и ни одно из них по своему значению резко не отличается от других. Руководствуясь этой теоремой, можно рассматривать распределения, скажем диаметров стволов в древостое, как частный случай проявления названной закономерности и использовать кривую нормального распределения для прогноза строения древостоя, определяя параметры конкретного древостоя по проведенным наблюдениям.

Но в лесном хозяйстве чаще приходится использовать индуктивный метод исследований, т.е. от частного к общему. Выше уже упоминалось, что при статистических наблюдениях в биологии практически всегда имеют дело с выборками и по результатам их судят о совокупности. Таким образом, вариационная статистика (биометрия) применяет метод индукции, когда обобщения делают, изучив отдельные случаи. Правомочность этого метода основана на использовании важнейших понятий и положений теории вероятностей. В качестве примеров можно привести уже упомянутые зависимости между диаметрами и высотами в насаждении. Сделав анализ ряда выборок из древостоев разных древесных пород, отличающихся также и возрастом, мы придем к выводу, что в одном случае для аппроксимации и прогноза следует использовать уравнение параболы 2 порядка, в другом случае - 3 порядка, в третьем - некоторую более сложную кривую. Названную закономерность мы получаем, проанализиро-

вав ряд частных случаев (отдельных насаждений), т.е. идем от частного к общему, применяя индуктивный метод.

Индуктивное заключение, как общий логический процесс, идущий от большой и малой посылки, имеет такую форму:

**Б о л ь ш а я п о с ы л к а :** эти коричневые желуди (отборный образец) из данного хранилища.

**М а л а я п о с ы л к а :** эти желуди находятся в хранилище.

**З а к л ю ч е н и е :** все желуди в хранилище коричневые.

Очевидно, что заключение, сделанное с индуктивной аргументацией шире, чем посылки. В заключении добавляется нечто новое, расширяющее знания об изучаемом явлении. Это потенциальное расширение знаний требует осторожности. Оно может быть плодотворно, но существует некоторая опасность получить необоснованные и ложные выводы.

Логическим основанием индуктивного заключения является предположение о единообразии в системе фактов, относящихся к посылкам и заключению. Это предположение, называемое по-разному - единообразием в природе, статистической устойчивостью опыта, ограничением независимой вариации в природе, - всегда представляет как бы невысказанную посылку индукции.

Если бы единообразие в естественных процессах не проявлялось, природе был бы свойственен полный хаос. При этом никакое нагромождение фактов не могло бы оправдать индукцию. Нельзя было бы ничего сказать об условиях за пределами опыта. Но в природе существует определенное единообразие в поведении отдельных единиц, составляющих то или иное массовое явление. Однако это единообразие в природе не столь строго, чтобы можно было сделать точную оценку массового (общего) явления наблюдаемых единиц. Поэтому статистические заключения о свойствах генеральных совокупностей по выборочным всегда имеют вероятностный характер, т.е. делаются с определенной степенью безошибочности и никогда не делаются с полной достоверностью.

Следует отметить, что конструкция выборочных оценок оказывается более предпочтительной даже в тех случаях, когда все единицы, составляющие то или иное явление, могут быть измерены, т.е. относятся к ограниченным генеральным совокупностям. Это положение, затронувшее различные виды генеральных совокупностей, нуждается в более широком пояснении.

На практике встречаются обследуемые генеральные совокупности конечные и бесконечные. Примером первой может служить выборочное обследование, допустим, бюджетов семей в определенном городе. С бесконечными совокупностями имеют дело при различных экспериментальных исследованиях, когда вопрос заключается не в том, чтобы получить точный результат в данном эксперименте, но главным образом в оценке того, каковы будут результаты массового применения данного процесса (в % от обследованных единиц) - биологического, технологического или экономического.

Предположим, производится оценка степени повреждаемости подростка на нескольких десятках лесосек при применяемой технологии лесосечных работ. В этом случае генеральная совокупность бесконечна, ибо для оценки не столь важно, сколько повреждено подростка на конкретных лесосеках, как то, сколько его будет повреждаться при подобных условиях на всех других лесосеках, не исследованных в опыте. Здесь научный эксперимент становится как бы “механизмом” получения случайной выборки.

Возможны обстоятельства, когда полезно прибегнуть к особой логической конструкции - гипотетической генеральной сверхсовкупности. Иногда мы можем располагать сведениями даже сплошного обследования реально существующей совокупности, и все же бывает полезно рассматривать эти данные как выборку из некоторой сверхсовкупности. Так поступают, когда не только нужны полученные факты, но и необходимо выявить общую закономерность, по отношению к которой статистический материал представляется лишь частным случаем.

Предположим, что из статистических обследований за 2005 – 2010 годы рождаемости в стране установлено, что 52% из числа родившихся составили мальчики. Этот материал получен путем сплошного обследования и характеризует явление однозначно. Однако, если нас интересует результат и за пределами обследованных лет или проверяется заключение о том, что мальчиков всегда рождается больше, тогда полученные данные следует рассматривать как выборку из некоторой бесконечной сверхсовкупности различных возможных пропорций рождений по полу. На основе таких сведений, пользуясь методами статистики, представляется возможным исследовать, приемлемо ли предположение о более частой рождаемости мальчиков. Заметим, что определяемая таким образом сверхсовкупность не ограничена ни численностью, ни территорией, в которой произведен эксперимент.

Из приведенных примеров видно, что в биометрии (в т.ч. в лесной биометрии) применяются оба метода (индуктивный и дедуктивный), но преобладает индуктивный.

### **3. ГРУППИРОВКА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ**

- 3.1 Количественный и качественный анализ массовых явлений
- 3.2 Систематизация и группировка исходных данных
- 3.3 Составление рядов и таблиц распределения
- 3.4 Прогнозирование случайной величины

#### **3.1 Количественный и качественный анализ массовых явлений**

При рассмотрении массовых явлений, когда имеем дело с большими массивами информации (деревья в лесу, партии семян, явления общественной жизни и т.д.) их анализ может быть качественный или (и) количественный.

Качественный анализ изучаемого явления или процесса заключается в выделении некоторых его характерных свойств, особенностей, признаков, качественно отличающихся между собой внутри рассматриваемой совокупности. Например, мы изучаем смешанное насаждение, состоящее из сосны и березы. Заложили пробную площадь, на которой насчитали 180 деревьев сосны и 110 березы. Для дальнейшего использования этого материала необходимо сделать предварительный качественный анализ. В нашем случае разделить деревья по главному качеству - принадлежности к разным ботаническим видам, т.е. на сосну и березу. Приведенный пример прост. В реальности бывает, что сделать качественный анализ трудно, для чего применяются специальные методы, которые рассматриваются ниже.

Но качественного анализа часто бывает недостаточно, чтобы понять некоторое явление или процесс, дать ему корректное математическое описание. В этом случае необходимо использовать количественные методы исследования.

Проведение качественного и количественного исследования начинается с планирования и постановки эксперимента. В лесном хозяйстве исследование часто заключается в проведении измерений на некоторых выделенных участках леса (пробных площадях) или в измерении части дерева. Возможны и другие варианты экспериментов, что мы уже отмечали выше и к чему еще вернемся при изложении настоящего курса.

При научном или практическом исследовании некоторого явления или процесса требуется выяснить его природу, закономерности изменения во времени или связь с некоторыми параметрами. Для этого недостаточно повести наблюдение или поставить эксперимент. Вывести искомые законы и закономерности изучаемого явления, получить правильные выводы из наблюдений можно только в том случае, если будет сделан корректный количественный и качественный анализ проведенных наблюдений, или, как их еще называют, случайных явлений.

Наиболее часто для анализа используются количественные методы. Здесь смотрят наличие сходства или различия, пользуясь определенными числовыми критериями.

### 3.2 Систематизация и группировка исходных данных

Любой анализ проведенных наблюдений начинается с систематизации наблюдений. Первым ее этапом является группировка исходных данных или вариантов. При постановке эксперимента группировку предусматривают уже на этапе сбора экспериментального материала, т.е. на этапе наблюдений.

Например, замеряя высоты в 6-8-летних культурах сосны, можем записывать отдельно каждое измерение как приведено ниже.

Высоты в м: 0,8; 1,5; 3,1; 2,2; 0,4; 1,1; 1,6; 1,4; 1,9; 2,0; 1,8; 2,4; 2,7; 2,9; 0,9

Анализ приведенных величин, хотя их относительно немного, в представленном виде затруднен. При больших массивах информации анализ отдельных измерений перерастает в большую проблему. Для ее решения результаты наблюдений, как правило, систематизируют. Систематизация заключается в группировке измеренных величин: толщины или высоты деревьев, веса животных, размера и веса семян и т.п. Для группировки наблюдений выделяют классы (при измерениях деревьев их называют ступени), по которым разносят измеренные величины. В приведенном примере целесообразно выделить следующие классы высот:

0 - 0,50; 0,51 - 1,0; 1,01 - 1,50; 1,51 - 2,00; 2,01 - 2,50; 2,51 - 3,0; 3,01 - 3,50

Тогда запись измерений можно будет свести в таблицу (таблица 3.1).

В таблице не обязательно показывать сам интервал, достаточно привести значение его середины.

Таблица 3.1 – Распределение высот в молодняке сосны

Степень высоты, м	Число деревьев
0,25	1
0,75	2
1,25	3
1,75	4
2,25	2
2,75	2
3,25	1
Итого	15

Данные, сведенные в таблицу, дают более наглядное представление о высоте культур сосны на исследуемом участке. К тому же обработку материала легче проводить, когда имеем систематизированные данные. Поэтому именно такая табличная форма наиболее часто используется при проведении исследований в лесном хозяйстве.

При упорядочении (систематизации) полученных данных легко обработать их математически и вывести статистические показатели, которые будут исчерпывающе характеризовать изучаемую совокупность. Проблема систематизации и группировки занимает большое место в статистике. Ошибочная группировка данных может привести к неправильным выводам о существе изучаемого явления.

Наиболее проста группировка при качественном анализе.

Так, если кора осины отличается по окраске, то распределение деревьев с разной корой может быть выражено в процентах от общего количества измеренных деревьев, как это показано в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Распределение деревьев осины по цвету коры

Цвет коры	Количество деревьев	Процент от общего количества
Темно-серый	160	40
Светло-серый	200	50
Зеленый	40	10
Итого	400	100

Частным случаем качественной вариации является альтернативная, когда в совокупности можно выделить только две группы. У членов одной группы присутствует определенное качество (или признак), у членов другой группы его нет. Так, при исследовании сосновых культур, пораженных корневой губкой, мы делим деревья по альтернативному признаку: здоровые и больные.

### 3.3 Составление рядов и таблиц распределения

При проведении наблюдений в лесном хозяйстве чаще всего имеют дело с непрерывным дискретным (прерывистым) распределением изучаемой величины. Так, измеряя толщину дерева, мы меряем каждое дерево. Их совокупность представляет собой некоторый ряд распределения, у которого есть минимальная и максимальная величина. Для примера в таблице 3.3 приведены результаты измерения 120 деревьев сосны II класса бонитета в типе леса сосняк мшистый возрастом 100 лет.

Для того, чтобы придать опытным материалам определенную наглядность и извлечь из них необходимую статистическую информацию о наблюдаемом признаке, материалы наблюдения подвергают группировке. Сгруппированные материалы именуют статистическими таблицами или статистическими рядами.

Таблица 3.3 - Результаты измерений диаметра 120 деревьев сосны на высоте 1,3 м

№ дерева	Диаметр, см	№ дерева	Диаметр, см	№ дерева	Диаметр, см	№ дерева	Диаметр, см	№ дерева	Диаметр, см
1	23	25	28	49	24	73	25	97	44
2	32	26	40	50	28	74	32	98	27
3	19	27	32	51	27	75	46	99	23
4	28	28	15	52	34	76	31	100	19
5	24	29	27	53	29	77	36	101	28
6	19	30	38	54	36	78	28	102	32
7	25	31	30	55	30	79	35	103	24
8	22	32	26	56	44	80	43	104	44
9	29	33	24	57	37	81	24	105	30
10	27	34	21	58	24	82	48	106	20
11	23	35	31	59	20	83	32	107	29
12	20	36	20	60	31	84	23	108	34
13	30	37	28	61	27	85	25	109	28
14	36	38	28	62	28	86	37	110	26
15	42	39	17	63	22	87	12	111	17
16	24	40	34	64	13	88	42	112	33
17	32	41	20	65	28	89	28	113	29
18	38	42	29	66	41	90	26	114	21
19	40	43	16	67	18	91	47	115	36
20	33	44	33	68	26	92	9	116	30
21	35	45	37	69	36	93	39	117	32
22	20	46	24	70	33	94	25	118	40
23	16	47	16	71	28	95	51	119	20
24	39	48	40	72	11	96	48	120	15

Статистическим рядом или рядом распределения называют ряд значений признака, размещенных в порядке возрастания или убывания, с указанием числа повторений.

Значения признака, сведенные в ряд, называют классовыми вариантами, а число повторений их в классах - численностями, или частотами классов. При измерении деревьев в лесу классы обычно называют ступенями толщины или ступенями высоты.

Статистический ряд значений измеренного признака получают путем определения величины класса или интервала, размещения классов и распределения в них всех единиц наблюдения.

Величину интервала (k) определяют по формуле:

$$k = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{t}, \text{ где}$$

$X_{\max}$  и  $X_{\min}$  - соответственно наибольшее и наименьшее значение признака или вариант;  $t$  – число принимаемых классов.

В качестве  $k$  принимают круглое число, ближайшее к полученному частному. При этом действительное число классов определится как частное от размаха вариант ( $X_{\max} - X_{\min}$ ) на округленное значение интервала. В качестве полученного частного принимают также круглое число. Округление делается всегда в большую сторону.

При проведении биометрических исследований оптимальным количеством классов при наличии большой выборки считается 12. Допустимо увеличивать или уменьшать это количество в зависимости от объема наблюдений. Если ряд наблюдений относительно невелик (40-60 измерений), а разница между  $X_{\min}$  и  $X_{\max}$  невелика, то его целесообразно сузить, т.к. в противном случае ряд распределения окажется размытым, в некоторых классах может не оказаться измеренных величин.

Обычно рекомендуемое число классов равно  $12 \pm 3$ , т.е. колеблется от 9 до 15. В отдельных случаях допустимо уменьшить количество классов до 8, как исключение – до 7. Меньшее и большее количество классов принимать не рекомендуется, если это не связано со специфическими особенностями эксперимента.

Границы и срединные значения классов лучше устанавливать следующим образом. В качестве среднего значения первого класса принимают число кратное классовому промежутку  $k$ , ближайшее к наименьшей (в возрастающем ряду) или наибольшей (в убывающем ряду) вариантам ряда распределения. Срединные значения последующих классов получают путем последовательного прибавления величины интервала.

Нижние границы классов определяют путем вычитания половины величины интервала из срединных значений каждого класса, а верхние границы - путем прибавления этой половины.

В целях исключения перекрытия верхней границы предыдущего класса с нижней границей последующего класса, входящих в первый и второй классы, нижние границы классов увеличивают на некоторую величину, равную точности измерения признака. Можно также верхние границы классов уменьшить на ту же величину, но первый вариант используют чаще. Именно так получаем значения границ классов. Например, при измерении диаметров по 4 см классам (ступеням) толщины или высоты величина увеличения (уменьшения) обычно равна 0,1 см, для высот 0,1 м. Например, ступень толщины, равная 24 см, будет иметь пределы от 22,1 см до 26,0 см. Как вариант может быть от 22,0 см до 25,9 см, но первый пример предпочтительней.

Проиллюстрируем изложенное на конкретном примере. Возьмем данные измерений 120 диаметров сосны, приведенные в таблице 3.3.

В нашем примере наименьший измеренный диаметр равен 9 см (дерево №92), наибольший – 51 см (дерево №95). Разница составляет 42 см. Величина классового интервала для оптимального случая составит  $k = 42/12 = 3,5$



см. Округлив его в большую сторону, получим величину классового интервала (ступень толщины) равную 4 см.

Руководствуясь изложенными правилами установления первого и последнего классов, получаем соответственно первый класс, равным 8 см (ближайшее число к 9, кратное 4) и последний в 52 см – ближайшее число к 51 см.

Так как величины диаметров, лежащих на границе классового промежутка, можно отнести к любому из соседних классов (например, дерево диаметром 22 см можно отнести к классовому промежутку со серединой класса и 20 см, и 24 см), то целесообразно нижние границы классов увеличивать на 0,1 см. Можно аналогично верхние границы классов уменьшать на 0,1 см, но, как отмечено выше, первый вариант удобнее. В этом случае классовый интервал со серединой 20 см будет равен 18,1-22,0 см, а со серединой в 24 см соответственно 22,1-26,0 см. В этом случае дерево толщиной 22 см однозначно будет отнесено к ступени толщины 20 см.

После установления классов разносим измеренные диаметры по классам или, как их называют в лесном деле, по ступеням толщины. При этом применяют символические отметки для учтенных деревьев от 1 до 10 – запись “конвертом”. Вид этой символической записи показан в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Символическая запись вариант

Величина вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	20 и т.д.
Символы	·	··	···	···	···	·┘	┘	□	▧	⊗	⊗·	⊗··	⊗···	...	⊗ ⊗

Разнесенные варианты (численности) толщин деревьев с указанием классов показаны в таблице 3.5.

Таблица 3.5 – Таблица распределения диаметров 120 стволов сосен

Ступени толщины (классы), $X_i$ , см	Численности (число деревьев), $n_i$ , шт.
8	1
12	3
16	8
20	14
24	20
28	27
32	17
36	12
40	9
44	5
48	3
52	1
Итого ( $\Sigma$ )	120

Вариационный ряд, рассмотренный нами в качестве примера, является одновершинным по распределению. Это значит, что он имеет один модальный класс. Возможны случаи, когда в вариационном ряду обнаруживается несколько модальных классов, и тогда полигон является многовершинным. Наиболее простой причиной многовершинности, особенно при очень растянутых рядах, является недостаточное количество вариантов в изученной совокупности. При малом числе особей в некоторых классах вариационного ряда может вообще не быть ни одной варианты. Вариационный ряд окажется с перерывами, а вариационная кривая - разорванной на части.

Однако, если и при большом числе особей в изучаемой совокупности наблюдается дву- или многовершинность, причину этого надо искать в самом экспериментальном материале. Последний в таком случае обычно представляет собой смешение двух качественно различных совокупностей, которые или находились в резко отличных условиях внешней среды, или принадлежат к разным типам, например, к древостоям разных поколений. Соединение в одном ряду особей разных древостоев может дать внешнюю картину дву- или многовершинности. Известно, например, что абсолютно разновозрастные древостои ели или кедра сибирского дают многовершинное распределение. Поэтому в один вариационный ряд помещают лишь деревья одного поколения.

Правда, возможны случаи, хотя они относительно немногочисленны, когда дву- или многовершинность определяется свойствами самих изучаемых признаков и поэтому характеризует вполне однородный материал. Определение этой однородности или неоднородности – прерогатива специалиста: лесоведа или биолога.

### 3.4 Прогнозирование случайной величины

Случайные величины и их прогнозирование являются основным объектом изучения в биометрии. Прогнозирование случайных величин основано на теории вероятности.

Теория вероятности – это одна из дисциплин математики. Подробно ее изучают на математических, физических и некоторых технических факультетах. В настоящем пособии описаны лишь некоторые положения теории вероятности, взятые из соответствующих учебников, приведенных в списке литературы. Объем изложения в данном виде хотя и невелик, но позволяет лесоводу и биологу в достаточной мере разбираться в основных понятиях, которые будут излагаться при дальнейшем изучении биометрии.

Одним из основных понятий этой теории является вероятность. **Вероятностью события А** называют отношение числа случаев, благоприятствующих появлению данного события к числу всех возможных случаев. Обозначим вероятность буквой  $P$  с указанием в скобках индекса события, в нашем случае события А. Ее определяют по формуле:

$$P(A)=n/N, \text{ где}$$

$n$  – число случаев, благоприятствующих событию  $A$ ;

$N$  – общее число случаев.

Так, если в урне содержится 5 одинаковых перемешанных шаров, причем 2 из них черные, а 3 – белые, то вероятность вынуть наудачу белый шар равна  $P(A)=3/5=0,6$ , а вероятность вынуть черный шар  $P(B)=2/5=0,4$ .

Вероятность изменяется от нуля до единицы. Вероятность, равная нулю, указывает, что событие является невозможным; вероятность, равная единице, означает, что событие единственно возможное или достоверное.

Если появление одного события исключает появление другого события, их называют **несовместными**.

В указанном примере события  $A$  и  $B$  – несовместные. Сумма вероятностей несовместных событий равна единице  $P(A)+P(B)=1$ .

События называют **равновозможными**, если ни одно из них не является более возможным, чем другие. Вероятности таких событий одинаковы.

В лесобиологических работах вероятность чаще всего установить невозможно, так как вся изучаемая генеральная совокупность и ее состав неизвестны, например, число деревьев разной толщины в большом участке леса. В таких случаях получают аналог вероятности на основе опыта, т.е. в выборочной совокупности. Для этого подсчитывают число испытаний, в которых событие практически появилось и относят его к общему числу испытаний.

Это отношение называют относительной частотой события и выражают формулой:

$$W(A)=\frac{n}{N}, \text{ где}$$

$n$  – число появлений события;

$N$  – общее число испытаний.

Длительные наблюдения показали, что при одинаковых условиях испытаний и достаточно большом их числе относительная частота в различных опытах изменяется мало, причем тем меньше, чем больше объем выборки. Она колеблется (варьирует) около некоторого постоянного числа. Это замечательное свойство относительных частот называется **устойчивостью относительной частоты**, или статистической устойчивостью.

Очень характерный пример связан с рождением людей разного пола. Раньше мы приводили пример с рождением мальчиков. Сейчас возьмем вероятность рождения девочек и приведем ее в качестве примера устойчивости относительной частоты. По месяцам за некоторый год, начиная с января, она характеризуется следующими значениями:

0,486; 0,489; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473. По мальчикам величины будут зависимы от рождения девочек, т.к. сум-

марная вероятность рождения лиц обоего пола почти равна 1,0. Правда, есть еще гермафродиты, но их очень мало, и этим показателем обычно пренебрегают.

Постоянное число, около которого варьируют относительные частоты, является вероятностью появления события. Таким образом, если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности.

Относительные частоты в указанном примере колеблются около числа 0,482, которое можно принять за приближенное значение вероятности рождения девочек.

Следует обратить внимание, что такое суждение о вероятности на основе относительной частоты тем надежнее, чем больше число испытаний или объем выборки.

Наиболее простым и убедительным примером для подтверждения этого положения является бросание монеты. Многократные опыты с монетой, в которых подсчитывали число появления герба, дали следующий результат:

число бросаний: 4040; 12000; 24000;  
относительная частота: 0,5069; 0,5016; 0,5005;  
Вероятность появления герба равна 0,5.

Нетрудно представить или испытать на опыте, что при малом числе наблюдений, например, при 6 бросаниях, такое приближение относительной частоты к вероятности, как правило, не получить.

Проведя анализ случайных величин необходимо выполнять ряд требований. О некоторых из них мы уже упоминали.

#### *Требования репрезентативности:*

А) выборочная совокупность должна характеризовать собой генеральную с определенной точностью;

Б) выборочная совокупность должна быть свободной от субъективных представлений о генеральной.

Иначе говоря, удовлетворять требованиям репрезентативности - значит всесторонне и соответственно характеризовать генеральную совокупность.

В зависимости от числа наблюдений (N) выборочная совокупность может называться большой или малой. Границей здесь является N, равное 30 наблюдениям.

#### *Основные этапы изучения статистических совокупностей:*

1. Составление программы, важнейшими элементами которой является цель и задачи исследования.

2. Составление методики исследования, которая содержит выбор и обоснование места, времени и учетного признака на объекте исследования. Способы учета, необходимое число наблюдений, форма записи, вы-

бор инструмента и единица отсчета, способы последующей обработки материалов исследования - все это предмет методики исследований.

3. Производство наблюдений, измерений или учета.

4. Первичная обработка результатов наблюдения.

5. Моделирование изучаемого явления.

6. Дополнительное производство наблюдений, доводка модели и исследование с помощью модели, повторная обработка результатов исследования.

7. Систематизация и анализ полученных данных.

Эта последовательность в общих чертах соблюдается как в научных исследованиях, так и при решении производственных задач. В этой последовательности необходимо выполнять и индивидуальное задание, не упуская из виду цели и физического смысла результатов исследования, которые предопределены заданием.

**Правила вычисления результатов.** Правила вычисления результатов представлены согласно принципу Крылова-Брадиса (П.М. Крылов – 1879-1955 – советский математик) и приводятся в сокращении.

Правила 1-5. При сложении и вычитании, умножении и делении, возведении в квадрат или куб, извлечении корня квадратного или кубического, при использовании логарифмов - в результате нужно сохранять столько десятичных знаков после запятой, сколько их имеет “слагаемое” с наименьшим количеством десятичных знаков.

Правило 6. Для промежуточного результата, получаемого по правилам 1-5, необходимо сохранить одну дополнительную “запасную” цифру; в конечном результате ее отбрасывают.

Правило 7. Если исходные данные имеют разное количество десятичных знаков или значащих цифр, то их надо предварительно округлить с сохранением одной “запасной” цифры.

Правило 8. Если результаты должны быть получены с  $n$ -значащими цифрами, то исходные данные следует брать с  $n+1$  значащей цифрой.

Одним из существенных условий правильно и хорошо организованного вычислительного процесса является аккуратность и тщательность записи.

Курс биометрии не предусматривает детального изучения теории вероятности. В то же время те студенты, которые намерены в будущем заняться научной работой, могут факультативно проработать соответствующий материал из учебников по теории вероятностей. Некоторые из них приведены в списке литературы.

## 4. СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 4.1 Статистические показатели вариационного ряда
- 4.2 Средние величины
- 4.3 Средние арифметические и способы их вычисления
- 4.4 Другие виды средних величин

### 4.1 Статистические показатели вариационного ряда и их классификация

Важным показателем статистического ряда является его размах. Это наиболее простой показатель, показывающий разность между наибольшими и наименьшими величинами (их еще называют лимитами) в исследуемом вариационном ряду, т.е.

$$L = x_{\max} - x_{\min},$$

где  $L$  – размах ряда,

$x_{\max}$ ,  $x_{\min}$  – максимальная и минимальная величины (лимиты).

Простота вычисления размаха ряда распределения, его наглядность и очевидность способствовали широкому употреблению этого показателя во многих исследованиях в лесном хозяйстве. Так, в лесной таксации при изучении строения древостоя размах ряда распределения – это обязательный показатель.

В биометрии размах ряда и лимиты определяются при сведении данных наблюдений или измерений в статистические совокупности, т.е. в вариационные ряды. Каждый вариационный ряд и его графическое изображение – это как бы «сгущение» исходного фактического материала, превращение его в наглядную формулу. Однако для полного анализа наблюдаемого явления или для хозяйственной оценки древостоя этого недостаточно. Дело в том, что размах ряда и лимиты подвержены значительным колебаниям от одной частичной совокупности к другой. Поэтому использование этого показателя ограничено. Следовательно, необходимо получить еще и характеристики для совокупности, которые были бы выражены более общими цифровыми показателями. С их помощью можно сравнивать разные ряды, что затруднительно сделать с помощью лимитов.

Например, если известно, что вариационный ряд распределенных деревьев в древостое по толщине у одного насаждения имеет размах от 8 до 44 см, а в другом от 12 до 52 см, то, казалось бы, можно сделать вывод о более высоком качестве деревьев второго насаждения, т.е. что во втором насаждении они толще. Однако лимиты не указывают на то, как распределяются по изученному признаку отдельные члены совокупности. Вот почему для характеристики совокупности нужны такие показатели, которые отражали бы свойства всех ее членов.

Вариационные ряды могут различаться по значению признака, вокруг которого концентрируется большинство вариантов, т.е. по величине мо-

дального класса или ступени. Значение этого признака отражает центральную тенденцию, которая типична для данного ряда. Но частоты в ряду отличаются по степени вариации, т.е. по величине отклонения от центральной тенденции ряда.

Соответственно этому статистические показатели разделяются на две группы: показатели, которые характеризуют центральную тенденцию, или уровень ряда, и показатели, измеряющие степень вариации.

К первой группе относятся различные средние величины: мода, медиана, средняя арифметическая, средняя геометрическая. Ко второй - вариационный размах (коэффициент вариации), среднее абсолютное отклонение, среднее квадратическое отклонение, или варианса, дисперсия, коэффициенты асимметрии и эксцесса. Существуют еще и другие показатели.

## 4.2 Средние величины и способы их вычисления

Измеренные значения различных биологических совокупностей, в т.ч. в лесном хозяйстве, представляют собой варьирующие математические величины. Чтобы получить точную и объективную характеристику варьирующей величины, прибегают наряду с построением статистических таблиц, графиков и диаграмм к так называемым статистическим показателям.

Среди них наибольшее распространение и применение находит величина среднего значения исследуемого признака. Она дает суммарную характеристику любого признака, указывая на то типичное и устойчивое в явлении, что наиболее полно выражает его содержание. Так, например, принято говорить о среднем диаметре и средней высоте насаждения, о среднем весе семян, среднем размере охотничьих животных и т.д. При этом не всегда требуется вникать в глубокий смысл, который содержит понятие средней величины.

Ряды распределения численностей, приведенные ранее, показывают, что варианты концентрируются около некоторого центрального их значения. Следовательно, можно найти такое значение варианты или абстрактное среднее число, которое будет наиболее представительной характеристикой данной статистической совокупности.

Показатели центральной тенденции характеризуются различными средними величинами: средней арифметической, средней квадратической, средней геометрической, средней гармонической, модой и медианой. Назначение средних величин состоит в том, чтобы отразить какое-нибудь одно свойство совокупности, например, среднюю высоту, средний диаметр, средний запас древесины на 1 га изучаемого участка леса.

***Тот признак или то свойство совокупности, которое остается неизменным при замене индивидуальных значений их средним значением, называется определяющим свойством.*** Средняя должна отразить определяющее свойство так, чтобы образуемая с ее помощью

выборочная абстрактная числовая совокупность при равенстве чисел по величине определенных свойств не отличалась от общей совокупности. Из этого требования средней вытекает следующее ее общее определение. *Средняя есть величина признака, характеризующая индивидуумы в абстрактной уравненной совокупности, замещающей реальную совокупность, но при этом сохраняющей неизменным ее определяющее свойство: общую длину, массу, объем и т.д.*

К этому определению мы будем обращаться каждый раз, когда будем обсуждать реальное содержание различных средних.

Поясним сказанное примером. Допустим, мы желаем узнать средний объем дерева в еловом древостое II класса бонитета в возрасте 50 лет. Для этого выбираем некоторую выборочную частичную совокупность (закладываем одну или несколько пробных площадей), где определяем средние значения этих выборочных совокупностей. При этом методически все необходимо сделать так, чтобы средние величины выборочной совокупности соответствовали средним величинам исследуемых ельников в генеральной совокупности. Методы корректного определения этих средних величин рассмотрены ниже.

### 4.3 Средняя арифметическая и способы ее вычисления

Средняя арифметическая – наиболее часто употребляемый статистический показатель. Она является центром тяжести распределения. Средняя арифметическая была бы значением величины в точке равновесия кривой численностей, если бы модель кривой была сделана в виде массивной формы.

Среднюю арифметическую генеральной совокупности обычно обозначают  $M$ , а ее выборочную оценку, т.е. среднюю арифметическую выборочных наблюдений –  $\bar{X}$  (или  $\bar{I}$ ). Она имеет то же наименование, что и варианты.

Средняя арифметическая получается от деления суммы численностей всех вариантов ( $n_1, n_2, \dots, n_n$ ) на их число ( $N$ ), т.е.

$$\bar{X} = (n_1 + n_2 + \dots + n_n) / N = (\Sigma n) / N, \quad (4.1)$$

где  $N$  - сумма численностей вариантов;  $\Sigma$  - знак суммирования.

Здесь  $\bar{X}$  (и в последующем его применении) без указания пределов суммирования означает, что должно быть произведено суммирование всех измеренных (наблюденных) вариантов ряда от 1 до  $N$ . Для вариантов (предположим, что это длина всходов сосны, см) 3, 4, 4, 4, 5

$$\bar{X} = (3 + 4 + 4 + 4 + 5) / 5 = 20 / 5 = 4 \text{ см}$$



Реальный смысл средней арифметической и ее главное назначение лучше уяснить, если данное выше определение всем средним применить к рассматриваемому примеру ее расчета.

Благодаря полученной средней возможно реальную совокупность высоты саженцев сосны из  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$  ( $N = 5$ ), заменить абстрактной выровненной совокупностью из  $\bar{X}, \bar{X}, \bar{X}, \bar{X}, \bar{X}$  ( $N = 5$ ), не изменяя при этом определяющего свойства, выражаемого  $\Sigma X$  и также  $N \bar{X}$ , откуда получено  $\bar{X} = (\Sigma n)/N$ .

Для ряда, разделенного на классы, т.е. для вариационного ряда, среднюю арифметическую вычисляют как взвешенную величину:

$$\bar{X} = (n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_n x_n) / (n_1 + n_2 + \dots + n_n) = (\Sigma n x_i) / N, \quad (4.2)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - классовые варианты (срединные значения классов);  $n_1, n_2, \dots, n_n$  - частоты соответствующих классов;  $N$  - общее число вариантов (объем ряда) или общее число наблюдений.

Группируя варианты рассмотренного примера по их величине, получим следующий ряд:

$$\begin{array}{l} x_i : 3 \quad 4 \quad 5 \\ n_i : 1 \quad 3 \quad 1 \\ \bar{X} = (1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5) / 5 = 4 \text{ см} \end{array}$$

Если случайная величина выражена не в виде простого набора чисел или в виде таблицы, а задана аналитически, то применяются следующие формулы вычисления средней арифметической:

$$\text{Для непрерывной средней величины } \bar{O} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x) dx \quad (4.3)$$

$$\text{Для дискретной } \bar{X} = \sum_{i=1}^k x_i f(x_i) = \sum_{i=1}^k x_i p_i \quad (4.4)$$

В дальнейшем рассмотрим другие формулы вычисления арифметической средней, основанные на использовании ее основного свойства. Это свойство состоит в том, что сумма отклонений всех вариантов от арифметической средней равна нулю. Оно вытекает из содержания средней арифметической как центра тяжести ряда. Сумма вариантов, которые больше средней  $\bar{X}$ , равна сумме вариантов, которые меньше ее.

**Значение средней арифметической и ее сущность.** Средняя арифметическая, как и некоторые другие средние, известна давно. Она широко используется при исследовании совокупностей в науке, технике, биологии и лесном хозяйстве.

Средняя арифметическая является обобщающей величиной, которая впитывает в себя все особенности исследуемой совокупности или ряда распределения. Она отражает уровень всей совокупности в целом, дает свободную, обобщенную характеристику изучаемого признака.

Цифровое значение средней арифметической как таковое может не встретиться ни в одном конкретном случае в совокупности. Может оказаться, что ни одна варианта не будет ей равной. Например, мы измеряем толщину деревьев с округлением до 1 см: 8, 15, 16, 17...30 см. Средняя арифметическая измеренной совокупности может составить дробное число, например, 25,6. В измеренной совокупности ни одного такого замера нет. Еще более разительный пример можно привести, если проанализировать приплод (количество) щенков в помете волков. В среднем может оказаться, что там 4,2 щенка. Ясно, что число волчат дробным быть не может. В этом смысле средняя арифметическая является абстрактной величиной. Но в то же время она и конкретна.

Средняя арифметическая выражается в тех же единицах измерения, что и варианты ряда. При ее определении отклонения со знаком (+) и (-) взаимопогашаются, отменяются случайные колебания, отклонения от центральной тенденции, от уровня вариационного ряда и выступает общий закон явления. Вскрывается то типичное, что характерно для всей совокупности в целом.

В то же время нужно предостеречь от возможных ошибок в понимании средней арифметической. Средняя арифметическая характеризует всю совокупность в целом, а не отдельные члены совокупности. Среднее число щенков в помете волков 4,2 относится только ко всей группе изученных животных. Каждая же отдельная волчица приносит целое число волчат в помете. Обычно их бывает от 2 до 6-8.

Следует помнить, что средняя арифметическая имеет смысл только по отношению к качественно однородной совокупности. Так, нельзя вычислять средний вес животных разного возраста или средний объем деревьев разных древесных видов.

При изучении лесной таксации будет показано, как отдельные ученые ошибались в определении закономерностей измерения формы стволов. Они считали, что форма стволов зависит от возраста дерева. Этот вывод был получен из-за объединения в одну группу молодняков и старых насаждений. На самом деле оказалось, что форма ствола зависит от возраста лишь до 40-50 лет, а дальше при неизменной высоте остается относительно стабильной. Ошибка была доказана выдающимся белорусским ученым-таксатором Ф.П. Моисеенко (1894-1979). Он показал, что надо изучить каждую возрастную группу отдельно и для них вычислить  $\bar{X}$ .

Поскольку средняя арифметическая относится к конкретной совокупности, переносить ее на явления, выходящие за рамки этой совокупности, нельзя. В отдельных случаях, если такое все же требуется, то должен быть сделан специальный анализ изучаемого явления, и лишь по его результатам следует принять решение о правомерности такого перенесения.

В дальнейшем мы увидим, что особое место в вариационной статистике занимает вопрос о том, каким образом на основе данных о той или иной частной совокупности можно делать выводы о других совокупностях подобного же рода.

Наконец, средняя арифметическая относится лишь к отдельным изучаемым признакам и не может быть автоматически перенесена на их сумму.

#### 4.4 Другие виды средних величин

##### Средняя геометрическая

При изучении среднего темпа роста изучаемого признака средняя арифметическая не пригодна. Вместо нее вычисляют среднюю геометрическую  $\overline{M}_g$  (или  $\overline{X}_g$ ). Ее определяем по формуле:

$$\overline{\tilde{O}}_g = \sqrt[n]{\tilde{O}_1 \tilde{O}_2 \tilde{O}_3 \dots \tilde{O}_n}, \quad (4.5)$$

где  $X_1, X_2, \dots, X_n$  - темпы роста (величины, показывающие, во сколько раз увеличивался признак от периода к периоду);  $n$  - число периодов.

При  $n > 2$  формулу удобнее применять в логарифмическом виде:

$$\lg \overline{\tilde{O}}_g = \frac{1}{n} (\lg \tilde{o}_1 + \lg \tilde{o}_2 + \dots + \lg \tilde{o}_n). \quad (4.6)$$

Если данные, для которых вычисляют среднюю геометрическую, представлены разными численностями ( $n_i$ ) в пределах выделенных классов ( $x_i$ ), то применяется формула:

$$\lg \overline{\tilde{O}}_g = (n_1 \lg \tilde{o}_1 + n_2 \lg \tilde{o}_2 + \dots + n_n \lg \tilde{o}_n) / N \quad (4.7)$$

Исходя из содержания формул (4.5) и (4.6), среднюю геометрическую называют также средней логарифмической, так как ее логарифм есть арифметическая средняя логарифмов составляющих величин.

Применение средней геометрической поясним следующим примером. Пусть на лесокультурную площадь в сосняке мшистом высажен 1-летний саженец сосны. Измерим его объем в  $\text{см}^3$  в момент посадки (1 год), а также в 5, 10, 15 и 20 лет. Пусть эти объемы составят соответственно 8, 560, 2800 и 11200 и 22400  $\text{см}^3$ . Тогда отношения объемов сеянцев через соседние равные промежутки времени (5 лет) будут следующие

$$x_1 = \frac{560}{8} = 70; \quad x_2 = \frac{2800}{560} = 5; \quad x_3 = \frac{11200}{2800} = 4; \quad x_4 = \frac{22400}{11200} = 2.$$

Число рассмотренных периодов у нас равно 4, т.е.  $N = 4$ .

По формуле (3.1) вычислим среднюю геометрическую:

$$\overline{\tilde{O}}_g = \sqrt[4]{70 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt[4]{2800} \approx 7,274.$$

Это означает, что объем нашего сеянца сосны от 1 до 20 лет увеличивается в среднем за каждый период в 7,274 раза. Действительно, используя среднюю геометрическую, получаем в 20 лет объем стволика  $X_5 = 8 \cdot 2800 = 22400 \text{ см}^3$ .

Если бы мы вычислили здесь среднюю арифметическую из наших 5 сосенок, то она составила бы  $7594 \text{ см}^3$  и характеризовала бы объем стволика в возрасте примерно 15 лет, что не отвечает сути изучаемого процесса, т.к. дает объем ствола к концу 4 периода, равный  $7594 \text{ см}^3 \cdot 5 = 30376 \text{ см}^3$ , что на 36% больше фактических данных.

Для средней геометрической характерно равенство произведений из первоначальных данных измерений  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  и из геометрических средних  $\overline{X}_g, \overline{X}_g, \dots, \overline{X}_g$ , представленных  $n$  раз.

Вспомним, что для средней арифметической величины характерно постоянство суммы вариантов.

### Средняя квадратическая

Основная цель измерения диаметров деревьев в древостое – это определение запаса древесины. Для вычисления запаса надо знать сумму площадей поперечных сечений измеренных деревьев ( $g_i$ ), а затем воспользоваться соответствующей формулой, куда  $\sum g_i$  входит как множитель. Эта формула описана в курсе лесной таксации, изучаемой на 3 курсе. Сумму площадей сечений деревьев в древостое можно определить, умножив число деревьев на площадь сечения среднего дерева. Известно, что площадь сечения дерева на высоте 1,3 м приравнивается к площади круга, и ее находят по формуле  $g_i = \pi d_i^2 / 4$ , где  $\pi = 3,14159$ ,  $d_i$  – диаметр на высоте 1,3 метра. Нам необходимо выяснить, какую величину должен представлять средний диаметр, чтобы он был репрезентативным показателем для достижения указанной цели.

Анализ, сделанный путем использования здесь  $\overline{X}$ , показывает, что применение средней арифметической величины в этом случае неприемлемо, а необходимо вычислить среднюю квадратическую. Ее находят по формуле:

$$\overline{x}_{кв} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum x_i^2 n_i} . \quad (4.8)$$

В качестве иллюстрации сказанного рассмотрим определение объема среднего дерева в древостое сосны возрастом 100 лет (II класса бонитета), который измерен нами ранее и приведен в таблицах 3.1, 3.3. Результаты расчетов показаны в таблице 4.1. В этой же таблице представим исходные данные и для нахождения средней арифметической:  $\frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$ .

Средний арифметический диаметр будет равен:

$$D_a = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{3440}{120} = 28,7 \text{ (см)}$$

Таблица 4.1 – Определение среднего диаметра для совокупности 120 деревьев сосны

Ступени толщины (классы), $X_i$ , см	Численности (число де- ревьев), $n_i$ , шт.	Площадь сече- ния ступеней толщины, $g_i = \frac{x_i^2 \cdot \pi}{4}$ , см <sup>2</sup>	$g_i n_i$ , см <sup>2</sup>	$x_i n_i$ , см
8	1	58,27	58,3	8
12	3	113,10	339,3	36
16	8	201,86	1614,9	128
20	14	314,16	4398,2	280
24	20	452,39	9047,8	480
28	27	615,75	16625,2	756
32	17	804,25	13672,3	544
36	12	1017,88	12214,6	432
40	9	1256,64	11309,8	360
44	5	1520,53	7602,6	220
48	3	1809,56	5428,7	144
52	1	2704,78	2704,8	52
Итого ( $\Sigma$ )	120	-	85016,3	3440

Средний квадратический диаметр, который определим через среднюю площадь сечения, по правилам, принятым в лесной таксации. Формула для его нахождения соответствует средней квадратической (формула (4.8)):

$$g_{cp} = \frac{D_{\text{нб}}^2 \cdot \pi}{4}; \quad D_{cp} = 2\sqrt{\frac{g_{\text{нб}}}{\pi}} \quad (4.9)$$

Средняя площадь сечения равна:

$$g_{cp} = \frac{\sum g_i n_i}{\sum n_i} = \frac{85016,3}{120} = 708,5 \text{ см}^2$$

Тогда

$$D_{cp} = 2\sqrt{\frac{708,5}{3,1416}} = 2\sqrt{225,5} = 2 \cdot 15 = 30 \text{ см}$$

Как видим, средний диаметр, который пригоден для нахождения запаса через среднюю площадь сечения и определенный через среднюю геометрическую, больше, чем среднеарифметический. Допустим, что среднее дерево в этом древостое имеет высоту ( $h$ ) 26 м, а коэффициент формы ( $f$ ), т.е. отноше-

ние объема ствола к объему цилиндра, имеющего с данным стволом одинаковые высоту и диаметр на высоте 1,3 м – 0,46.

Объем дерева ( $V$ ) в этом случае определяется по формуле  $V = ghf$ . При этом все величины следует представить в одной размерности. Так как объем дерева обычно находят в  $\text{м}^3$ , то и все составляющие приведенной формулы выразим в м. Тогда объем дерева, имеющего среднеквадратический диаметр ( $V_1$ ) будет равен

$$V_1 = \frac{3,1416 \cdot 0,3^2 i}{4} \cdot 26i \cdot 0,46i = 0,84 \text{ м}^3.$$

При использовании среднеарифметического диаметра объем дерева ( $V_2$ ) составит

$$V_2 = \frac{3,1416 \cdot 0,287^2 i}{4} \cdot 26i \cdot 0,46i = 0,77 \text{ м}^3.$$

Как видим, в последнем случае данный показатель занижен почти на 9%. Истинный запас исследованного древостоя ( $M$ ) равен произведению числа стволов ( $\sum n_i = N$ ) на объем среднего дерева, т.е.  $M = V_{cp} \cdot N$ . Для нашего примера  $M = 0,84 \text{ м}^3 \cdot 120 = 101 \text{ м}^3$ . Если же для расчетов брать среднеарифметический диаметр, то получим  $M = 0,77 \text{ м}^3 \cdot 120 = 92 \text{ м}^3$ , т.е. недобор составил  $9 \text{ м}^3$ . При средней биржевой цене древесины сосны в докризисные времена на мировом рынке 200 тыс. руб. /  $\text{м}^3$ , недобор составит 1800 тыс. рублей. Это для сравнительно небольшого участка леса, т.е. для пробной площади в 0,3-0,4 га. На 1 га недобор будет уже от 4,5 до 6 млн. рублей.

Таким образом, для получения истинного значения площади сечения или объемов всех деревьев посредством среднего дерева и числа деревьев диаметр среднего модельного дерева следует находить как среднюю квадратическую величину. В лесной таксации именно так и поступают. Поэтому средняя квадратическая величина нашла широкое распространение в лесном хозяйстве.

### Средняя гармоническая

Эта величина применяется для вычисления средней характеристики признаков, которые представляют собой отношение двух других варьирующих величин. Среднюю гармоническую определяют по формуле:

$$\overline{X}_h = N / (\sum 1/x), \quad (4.10)$$

$$\text{или} \quad \overline{X}_h = N / (\sum n/x), \quad (4.11)$$

где  $n$  - веса отдельных значений.

В практике лесного хозяйства эта величина применяется очень редко.

### Мода и медиана

Модой ( $M_o$ ) называют наиболее часто встречающуюся варианту. В нормально распределенных совокупностях мода численно равна средней арифметической.

В положительно асимметричных рядах мода больше средней арифметической ( $\dot{i}_o > \bar{\delta}$ ), а в отрицательно асимметричных рядах она меньше средней арифметической ( $\dot{i}_i < \bar{\delta}$ ).

Найдем моду в нашем примере, приведенном в таблице 4.1.

$X$	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	Итого
$n_i$	1	3	8	14	20	27	17	12	9	5	3	1	120

Мода в приведенном ряду составляет наиболее представленный класс 28см. Средняя арифметическая здесь  $\bar{x} = 28,7$  см, т.е.  $\dot{i}_i < \bar{\delta}$ . Следовательно, ряд имеет небольшую положительную асимметрию.

Общая формула для вычисления моды ( $M_o$ ) следующая:

$$M_o = x_{M_o} + \frac{C(n_{M_o} - n_{M_o-1})}{2n_{M_o} - n_{M_o-1} - n_{M_o+1}}, \quad (4.12)$$

где  $x_{M_o}$  – середина модального (наиболее представленного) класса;

$C$  – величина класса;

$n_{M_o}, n_{M_o-1}, n_{M_o+1}$  – частоты соответственно модального класса; предшествующего модальному классу; класса, следующего за модальным.

Эта формула, учитывающая величину классового промежутка, более точна, т.к. наибольшее количество деревьев может быть сдвинуто вправо или влево от середины класса.

Тогда мода для нашего ряда равна:

$$M_o = 28 + \frac{4(27 - 20)}{2 \cdot 27 - 20 - 17} = 28 + \frac{4 \cdot 7}{54 - 37} = 28 + \frac{28}{17} = 28 + 1,7 = 29,7 \approx 30 \text{ см.}$$

Медианой ( $M_e$ ) называют значение признака, занимающее срединное положение в ряду и делящее все распределение на две равные по численности части.

Среди значений: 5 6 7 8 9  $M_e = 7$ .

Для вариационного ряда

$$M_e = X_o + k [S_1 - S_2] / n, \quad (4.13)$$

где  $X_o$  - значение нижней границы класса, в котором содержится половина накопленных частот;

$k$  - интервал;

$S_1=N/2$ ;

$S_2$  - накопленная частота, предшествующая группе, в которой находится медиана.

Для нашего ряда диаметров сосны (таблица 4.1) медиану вычислим следующим образом

$X_i$	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52
$n_i$	1	3	8	14	20	27	17	12	9	5	3	1
$\Sigma n$	1	4	12	26	46	73	90	102	111	116	119	120

$$M_e = 26 + 4[(73 - 46)/27] = 26 + 4 \cdot 1 = 30 \text{ см}$$

В данном примере мода и медиана совпали. Это обычное явление для симметричных распределений. В сильной степени асимметричные ряды имеют несовпадающие значения моды и медианы.

Мода и медиана являются характеристиками центральной тенденции выборки. Они не имеют своего аналога в генеральной совокупности и поэтому рассматриваются как показатели относительного характера.

### Верхняя и нижняя средние

В практике иногда встречаются другие виды средних. Применительно к лесохозяйственным объектам, иногда возникает необходимость применения «верхней» или «нижней» средней. Их применяют тогда, когда требуется оценить часть явления. В лесной таксации «верхнюю» среднюю вычисляют при определении верхней высоты, т.е. когда надо найти среднюю высоту самых толстых деревьев. Их может быть 50, 100, 200 или 5, 10, 20 % от всей совокупности и т.д. «Нижнюю» среднюю обычно вычисляют для определения запаса, вырубаемого при проведении уходов низовым способом.

Обобщение описанных средних величин сделано в таблице 4.2, где приведены формулы для их вычислений при малом и большом числе наблюдений. Пояснение символов было дано выше.

Как видно из таблицы 4.2, средняя геометрическая (средняя логарифмическая) равна корню  $n$ -й степени из произведения значений случайной величины, средняя гармоническая есть обратная величина среднего арифметического величин, обратных  $X_i$ ; средняя квадратическая получается как корень квадратный из среднего значения квадрата  $X_i$ . Как показали советские ученые-таксаторы К.Е. Никитин (1908-1986) и А.З.Швиденко, все названные виды средних могут быть получены из формулы

$$\bar{X} = \frac{1}{n} (x_1^a + x_2^a + \dots + x_n^a)^{1/a}. \quad (4.14)$$



Здесь при  $a=1$  имеем  $\bar{X}$  - среднее арифметическое,  $a=2$  – квадратическое ( $\bar{X}_g$ );  $a=-1$  - гармоническое ( $H$ ), при  $a=0$  – геометрическое ( $G$ ), причем по своей величине  $H \leq G \leq \bar{X} \leq \bar{X}_g$ .

Таблица 4.2 – Основные виды средних, применяемых в лесном деле (по К.Е. Никитину и А.З. Швиденко)

Средняя	Формулы для вычисления средних	
	Малая выборка (невзвешенные средние)	Большая выборка (взвешенные средние)
Арифметическая	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i$
Геометрическая	$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ $\lg G = \frac{1}{n} \sum \lg x_i$	$G = \sqrt[n]{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}}$ $\lg G = \frac{1}{n} \sum n_i \lg x_i$
Гармоническая	$H = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$	$H = \frac{n}{\sum n_i \frac{1}{x_i}}$
Квадратическая	$\bar{X}_g = \sqrt{\frac{1}{n} \sum x_i^2}$	$\bar{X}_g = \sqrt{\frac{1}{n} \sum x_i^2 n_i}$
“Верхняя”, $x_{i+1} \geq x_i$	$\bar{X}_\rho = \frac{1}{\rho} \sum_{i=n-\rho}^n x_i$	$\bar{X}_\rho = \frac{1}{\rho} \cdot \left( \sum_{i=[\rho]+1}^k x_i n_i - A \right)^*$
“Нижняя”, $x_{i+1} \geq x_i$	$\bar{X}_f = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^f x_i$	$\bar{X}_f = \frac{1}{f} \cdot \left( \sum_{i=1}^{[f]-1} x_i n_i + B \right)^{**}$

$$* A = \frac{1}{2} \left[ 2x_{[\rho]+1} - c - \frac{c}{n_{[\rho]}} \left( \rho - \sum_{i=[\rho]+1}^k n_i \right) \right] \left( \rho - \sum_{i=[\rho]+1}^k n_i \right)$$

$$** B = \frac{1}{2} \left[ 2x_{[f]-1} + c - \frac{c}{n_{[f]}} \left( f - \sum_{i=1}^{[f]-1} n_i \right) \right] \left( f - \sum_{i=1}^{[f]-1} n_i \right)$$

Наконец, «верхние» и «нижние» средние представляют собой средние арифметические из  $\rho$  наибольших ( $x_{n-\rho}, x_{n-\rho+1}, \dots, x_n$ ) или  $f$  наименьших ( $x_1, x_2, \dots, x_f$ ) значений случайной величины. в частном случае, при  $\rho$  и  $f$ , равным 1, получаем просто наибольшее и наименьшее значения выборки. В формулах для определения  $\bar{X}_\rho$  и  $\bar{X}_f$  предполагается, что исходные данные записаны в порядке возрастания значений  $x_i$ . Для ряда распределения, где условие  $x_{i+1} > x_i$  соблюдается автоматически, индексы  $[\rho]$  и  $[f]$  обозначают номера классов ряда распределения, в которые попадают соответственно  $n - \rho$ -е и  $f$ -е наблюдения.

Выбор того или иного вида среднего определяется целью работы и характером изучаемого явления. Например, если признак  $x_i$  представляет

численную характеристику некоторого элемента совокупности (объем или объемный прирост дерева, выработка бригады и др.), а  $\sum x_i$  - численную характеристику совокупности в целом, то наиболее предпочтительна средняя арифметическая величина  $\bar{X}$ . С другой стороны,  $\bar{X}$  в определенном смысле аннулирует положительные и отрицательные отклонения отдельных значений  $x_i$  от  $\bar{X}$ . Поэтому, если средняя величина вычислена для наблюдений, несущих в себе случайные ошибки, и эти ошибки подчиняются нормальному закону распределения (т.е. можно предполагать, что положительные и отрицательные отклонения уравниваются), то опять-таки наилучшая – средняя  $\bar{X}$ . Если влияние ошибок несимметрично, то часто более пригодна средняя геометрическая. Этот же тип среднего применяют в тех случаях, когда нужно определить скорость изменения (например, темпы роста) изучаемого показателя и пр.

Для примера возьмем данные, приведенные А.З. Швиденко, по анализу прироста по запасу в некотором древостое. Пусть  $M_0, M_1, \dots, M_n$  – запасы древостоев в возрасте  $A_0, A_1, \dots, A_n$ . Требуется определить относительное среднее изменение запаса древостоя в периоде от  $A_0$  до  $A_n$  лет.

Образуем величины  $x_1 = M_1/M_0, x_2 = M_2/M_1, \dots, x_n = M_n/M_{n-1}$ , представляющие относительное изменение запаса в каждом из отдельных интервалов времени  $[A_1, A_0], \dots, [A_n, A_{n-1}]$ . Произведение  $x_1, x_2, \dots, x_n$  дает нам общее изменение запаса в периоде  $[A_0, A_n]$ . Если в этом периоде относительное изменение запаса по отдельным периодам постоянно, то должно выполняться равенство  $G^n = x_1 x_2 \dots x_n$ , откуда следует необходимость использования средней геометрической величины, т.е.

$$\Delta M = \sqrt{\frac{M_1}{M_0} \cdot \frac{M_2}{M_1} \dots \frac{M_n}{M_{n-1}}} - 1 = \sqrt{\frac{M_n}{M_0}} - 1.$$

Иногда целесообразно среднюю геометрическую вычислять для «загрязненных» выборок, т.е. для ситуаций, когда одно или несколько выборочных значений сильно отличаются от основной массы.

Среднюю квадратическую (как и другие виды степенных средних) можно применять в тех случаях, когда в некоторой многомерной совокупности средний элемент устанавливают по одному (обычно наиболее важному) признаку, причем для этого элемента нужно указать средние по другим признакам. Например, в однородных древостоях дереву среднего (арифметического) объема соответствует средний квадратический диаметр. Это явление объясняется просто: изменение объема пропорционально изменению не диаметра, а его квадрата.

«Верхние» («нижние») средние применяют в тех случаях, когда нужно оценить интенсивность части явления или процесса. В лесочетных задачах обычное применение «верхней» высоты – это определение высоты  $n$  самых толстых деревьев на 1 га; могут представлять практи-

ческий интерес размеры определенной части наиболее мелких сеянцев в питомнике (в связи с достижением стандартных размеров) и т.д.

Как статистику положения, медиану обычно применяют в тех случаях, когда требуется обеспечить минимум абсолютной величины отклонений между исходными данными и используемым показателем. Например, логично потребовать соблюдение такого условия для показателя, отражающего среднюю продолжительность жизни деревьев в разновозрастном лесу. Мода представляет интерес, когда устанавливают некоторое типическое свойство явления или объекта: цвет желудей, урожайность семян на плюсовых деревьях и т.д.

Квантили являются обобщением понятия медианы. Если разделить частоты распределения на  $k$  равных частей, то  $k-1$  значение случайной величины, соответствующее точкам деления, называется квантилями распределения. При  $k=2$  единственный квантиль будет медианой, при  $k=4$  средняя из точек деления будет медианой, а первая и третья - нижним и верхним квантилями. Аналогично девять значений случайной величины, делящих частоты распределения на 10 частей, называют децилями. Знание трех-четырех квантилей дает хорошее представление о распределении случайной величины. Квантилем  $x_p$  или  $x_{1-\alpha}$ , соответствующим заданной вероятности  $p$ ,  $p=1-\alpha$ , называют такое значение случайной величины, для которого  $P(x < x_p) = p = 1 - \alpha$ .

Обобщая изложенное, отметим, что в лесном деле наибольшее применение находят средняя арифметическая и средняя квадратическая. Остальные средние применяют редко.

## 5. ПОКАЗАТЕЛИ ВАРИАЦИИ

5.1 Вариация как явление и ее источники

5.2 Типы варьирования

5.3 Характеристики вариационных рядов и их вычисление через моменты

5.4 Асимметрия, эксцесс, коэффициент вариации

### 5.1 Вариация как явление и ее источники

Ряд распределения характеризуется несколькими параметрами. Одним из них являются рассмотренные выше средние значения. Они характеризуют то значение вариационного ряда, относительно которого в определенном смысле располагаются все другие численные значения, присущие данному ряду распределения случайной величины.

В то же время существуют другие важные характеристики рядов случайных величин. В их числе одной из основных является размах (диапазон) случайных величин от минимальной до максимальной. Эта величина характеризует вариабельность, или изменчивость, ряда распределения. Приведем пример (таблица 5.1).

Таблица 5.1 – Ряды распределения числа деревьев ели по диаметру на высоте 1,3 м и их средние значения

№ классов	Средние значения классов (ступени толщины), см ( $x_i$ )	Число деревьев (численность) и их средние арифметические значения по вариантам опыта					
		Ряд 1		Ряд 2		Ряд 3	
		$n_i$	$x_i n_i$	$n_i$	$x_i n_i$	$n_i$	$x_i n_i$
1	8	2	16	-	-	-	-
2	12	3	36	-	-	-	-
3	16	13	208	10	160	-	-
4	20	13	260	20	400	7	140
5	24	23	552	21	504	25	600
6	28	32	896	25	700	33	924
7	32	40	1280	35	1128	65	2080
8	36	24	864	38	1368	42	1512
9	40	19	760	30	1200	22	880
10	44	12	528	16	704	6	264
11	48	7	336	4	192	-	-
12	52	5	260	1	52	-	-
13	56	4	224	-	-	-	-
14	60	3	180	-	-	-	-
Итого, $\sum n_i$	-	200	6400	200	6400	200	6400
Среднее значение, $\bar{x}$	-	-	32,0	-	32,0	-	32,0

В таблице 5.1 приведены 3 ряда распределения числа стволов ели по диаметру. Их количество одинаково – по 200 деревьев. Средние арифметические всех рядов тоже равны – по 32 см. Но ряды существенно отличаются. Средние показатели это выявить не могут. Так, среднеквадратическое значение этих рядов равно соответственно 37,5 см; 37,3 см; 36,6 см, т.е. практически одинаковы, т.к. разница в 0,4 см в древостоях с диаметрами такого размера при проведении замеров с помощью мерной вилки в производственных условиях лежит в пределах точности измерений.

В то же время даже наглядно видно, что ряды существенно отличаются между собой. Первый ряд имеет наибольший размах распределения, а третий – наименьший. В первом ряду крайние варианты отклоняются от средней на 6 классов в нижнюю сторону и на 8 в верхнюю, а всего ряд имеет 15 классов, или ступеней, толщины. В третьем случае соответствующие величины равны 3 и 3, а размах ряда соответствует 7 классам. Второй ряд распределения занимает промежуточное положение между 1 и 3 рядами.

Чтобы дать более полную характеристику рядов распределения случайной величины, введена характеристика их вариации, или изменчивости, которая характеризует степень рассеяния случайной величины относительно среднего значения. Для выражения вариации используют специальные величины: коэффициент вариации, среднее квадратическое отклонение, дисперсию и другие, которые рассматриваются ниже.

Возникает естественный вопрос – каковы же причины вариации. Основная причина состоит в том, что по своей природе любые биологические объекты, даже принадлежащие к однородной совокупности, отличаются друг от друга. Деревья одного вида, одного возраста, растущие в одинаковых условиях роста имеют разную высоту и толщину, что вызвано как генетическими свойствами каждой особи, так и некоторыми особенностями их территориального размещения: в тени более крупных деревьев, на микроповышении или микропонижении и т.п. Подобные примеры можно привести для любых биологических объектов: люди даже одной расы и национальности отличаются по росту, животные одного вида имеют разный вес и т.д. Основная причина этому, как уже было отмечено, - наличие биологического (в первую очередь генетического) разнообразия.

Изменчивость происходит и из-за ошибок измерений. Добиться абсолютной точности измерений очень трудно (и дорого), а часто и не нужно. Практику устраивает некоторый уровень точности, его-то и выдерживают. Например, при пересчетах деревьев их измеряют по ступеням толщины. Точность измерений может повышаться, если это потребуется в отдельных случаях. Так, в условиях рынка повышаются требования к точности оценки объема древесины, особенно для ее наиболее ценной части. При проведении измерений помимо допустимых погрешностей в измерениях возможны и ошибки, особенно при массовых замерах. Хотя ошибки измерений и являются одной из причин варьирования, но эта причина не столь значима как естественная биологическая изменчивость.

## 5.2 Типы варьирования

Получаемые в результате наблюдений значения наблюдаемого признака называют **вариантами**. Варианты в биологических объектах обнаруживают разнообразие (или варьирование) изучаемого свойства. Например, деревья отличаются друг от друга по диаметру, высоте, объему, санитарному состоянию. Причины этого показаны выше.

В зависимости от характера изучаемого признака различают варьирование непрерывное, прерывистое (дискретное) и атрибутивное. Непрерывное и дискретное варьирование присуще количественным признакам, а атрибутивное – качественным.

При **непрерывном** варьировании отдельные значения признака выражают мерой протяженности, объема и т.д. Отдельные варианты могут иметь любое, но изменяющееся в определенных пределах значения меры. Толщина деревьев в древостое, например, от самого тонкого до самого толстого может принимать самые различные значения меры протяженности. Только в зависимости от цели исследования (измерения) выражают ее в классах толщины: в несколько сантиметров, в целых сантиметрах, в десятых или сотых долях сантиметра.

При **дискретном** варьировании отдельные значения признака выражают отвлеченными числами, чаще всего целыми. Например, число всходов сосны на учетной площадке обладает дискретным варьированием, т.к. они, равно как и число семян в навеске, выражаются целыми числами.

При **атрибутивном** варьировании значения признака выражают в качественных показателях. Это может быть степень окраски, консистенции, поврежденность или устойчивость, а также форма, вид и т.д. Количественно эти признаки выражают в абсолютных числах, долях единицы, процентах, баллах и т.д. Например, различают цвет коры на деревьях, форму кроны деревьев (шаровидная, пирамидальная и т.д.), густота раствора, степень повреждения деревьев вредителями: сильная, слабая и др.

Частным случаем атрибутивного варьирования является альтернативное, при котором значения признака рассматривают в альтернативной форме, т.е. противопоставляя здоровые больным, сильные – слабым, окрашенные – неокрашенным, присутствующие – отсутствующим и т.д. В альтернативной форме можно представить и количественные признаки, противопоставляя, например, высокие деревья в древостое низким, господствующие деревья – угнетенным, здоровые – сухим или усыхающим.

## 5.3 Характеристики вариационных рядов и их вычисление. Пределы и размах вариации

Основными показателями вариационного ряда кроме среднего значения являются абсолютное и относительное значение его пределов, выражаемое величиной дисперсии и коэффициента вариации.

Одним из показателей амплитуды вариации служат так называемые лимиты (от лат. Limes - предел, граница), т.е. значения минимальной и максимальной вариант выборочной совокупности. Этот показатель (Lim) указывает фактические границы вариабельности признака. Поэтому его обычно приводят наряду с другими биометрическими показателями в сводных статистических таблицах. Значение лимитов заключается в их конкретности.

Величина вариации может быть оценена и по разности между максимальной и минимальной вариантами совокупности. Этот показатель получил название размаха вариации. Например, пределы первого распределения ( $n_1$ ), которое только что рассматривалось (таблица 5.1, вариант 1), равны:  $\min=8$  и  $\max=60$  единицам, откуда размах этого ряда равен  $60-8=52$ . Второй ряд ( $n_2$ ) имеет пределы вариации от 16 до 52 единиц, его размах равен  $52-16=36$  единиц. Наиболее низким этот показатель оказывается в третьем ряду ( $n_3$ ), размах которого равен 24 единицам:  $44-20=24$ .

Рассмотренные показатели вариации вполне объективны и просты. Но в силу присущих им недостатков они мало пригодны для измерения вариабельности признаков. Дело в том, что эти показатели неустойчивы: они зависят от многих случайных причин и при повторных выборках могут резко менять свое значение. Главный же недостаток указанных показателей заключается в том, что они не отражают существенные черты варьирования.

Из сказанного следует, что лимиты и пределы вариации, хотя и дают определенное, конкретное представление о величине изменчивости признаков, не могут служить основным мерилем вариабельности биологических величин. Поэтому здесь применяют другие показатели, описываемые ниже.

### Среднее линейное отклонение

Для измерения вариации можно использовать центральный момент первого порядка как одну из характеристик вариационного ряда, представляющую сумму отклонений вариант от средней арифметической, отнесенную к общему числу вариант данной совокупности.

$$\Delta = \frac{\sum |x - \bar{X}|}{n} \quad (5.1)$$

Этот показатель, называемый средним линейным отклонением, может иметь значение только при условии, что отклонения вариант от средней арифметической берутся без учета знаков, так как в противном случае  $\sum (x - \bar{X}) = 0$ .

Используем этот показатель для характеристики взятого нами примера.

В таблице 5.2 показано вычисление  $\Delta$  для третьего ряда распределения ( $n_3$ ), имеющего наименьший размах. Полученное значение ( $\Delta=1,36$ ) необходимо сравнить с другим подобным показателем, иначе его трудно оценить. Вычислим  $\Delta$  для первого ряда ( $n_1$ ), имеющего наибольший размах вариации. Ход вычисления показан в таблице 5.3. Вспомним, что среднее значение для наших рядов равно 32 см.

Таблица 5.2 – Вычисление линейного отклонения для ряда распределения числа стволов по диаметру в сосновом древостое – третий вариант

Ступени толщины (варианты) ( $x_i$ )	Число деревьев (частоты), ( $n_i$ )	$x_i n_i$	$ x_i - \bar{x}$	$n_i(x_i - \bar{x})$	Вычисления
20	7	140	12	84	$\Delta = \frac{\sum n_i  x_i - \bar{x} }{\sum n_i} = \frac{822}{200} = 4,11$
24	25	600	8	200	
28	33	924	4	132	
32	65	2080	0	0	
36	42	1512	4	168	
40	22	980	8	176	
44	6	264	12	72	
Сумма	200	6400	-	822	

Таблица 5.3 – Вычисление линейного отклонения для ряда распределения числа стволов по диаметру в сосновом древостое – первый вариант

Ступени толщины (варианты) ( $x_i$ )	Число деревьев (частоты), ( $n_i$ )	$x_i n_i$	$ x_i - \bar{x}$	$n_i(x_i - \bar{x})$	Вычисления
8	2	16	24	48	$\Delta = \frac{\sum n_i  x_i - \bar{x} }{\sum n_i} = \frac{1252}{200} = 6,26$
12	3	36	20	60	
16	13	208	16	208	
20	13	260	12	156	
24	23	552	8	184	
28	32	896	4	128	
32	40	1280	0	0	
36	24	864	4	96	
40	19	760	8	152	
44	12	528	12	144	
48	7	336	16	112	
52	5	260	20	100	
56	4	224	24	96	
60	3	180	28	84	
Сумма	200	6400	-	1252	



Сравнивая первый результат (4,11) со вторым (6,26), видим, что ряд, у которого больше амплитуда изменчивости, имеет и больший показатель вариации, выражающийся величиной линейного отклонения. При меньшем размахе вариационного ряда и показатель вариации оказывается меньше. В то же время описанный показатель имеет существенные недостатки. Так, для ряда №3 от средней арифметической отклоняются три класса, а в первом ряду уже восемь. Следовательно, амплитуда изменчивости первого ряда в 2,66 раза больше, чем третьего. Если среднее отклонение для третьего ряда равно 4,11, то для первой совокупности оно должно быть в 2,66 раза больше, т.е.  $4,11 \cdot 2,66 = 10,9$ . На самом же деле этот показатель равен 6,26. Разница составляет  $10,9 - 6,26 = 4,64$ , или 74,1 %, т.е. она довольно велика. Следовательно, среднее линейное отклонение не может быть достаточно точным показателем вариации, не говоря уже о том, что этот показатель теряет всякий смысл, если брать не модули отклонений, а учитывать знаки отклонений вариант от средней арифметической, так как сумма отклонений будет близка к нулю.

### Среднее квадратическое отклонение

Чтобы преодолеть недостатки линейного отклонения, принято отклонения вариант от средней арифметической возводить в квадрат и сумму квадратов отклонений относить к общему числу наблюдений, т.е. к объему выборки. Полученный таким образом показатель служит центральным моментом второго порядка, он характеризует дисперсию или рассеяние вариант около средней арифметической. Этот показатель, называемый дисперсией, или вариансой, обозначается греческой буквой  $\sigma^2$  (сигма малая в квадрате)<sup>1</sup> и выражается следующей формулой:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (\delta_i - \bar{x})^2}{\sum n_i} = \frac{1}{\sum n_i} \cdot \sum (\delta_i - \bar{\delta})^2 \quad (5.2)$$

Для непрерывной случайной величины, заданной аналитически, дисперсию находят по формуле:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \bar{x})^2 f(x) dx \quad (5.3)$$

---

<sup>1</sup> В литературе Западной Европы и в ряде отечественных публикаций дисперсию принято обозначать латинской буквой  $s^2$ , а буквой  $\sigma$  обозначают среднее квадратическое отклонение теоретических распределений. В отдельных случаях в дальнейшем, когда мы заимствовали некоторые формулы у других авторов, сохранена и их символика, т.е. использована буква  $S^2 = \sigma^2$ .

При возведении отклонений вариант от средней арифметической в квадрат их сумма не превращается в нуль, так как и положительные и отрицательные отклонения получают один и то же положительный знак. Кроме того, большие отклонения от средней, будучи возведены в квадрат, получают и больший «удельный вес», оказывая большее влияние на величину показателя вариации.

Однако, возводя отклонения вариант от средней арифметической в квадрат, мы, таким образом, искусственно увеличиваем и самый показатель вариации. Чтобы преодолеть это, вместо дисперсии берут корень квадратный из указанного отношения:

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sum n_i}} = \pm \sqrt{\frac{1}{x_n} \sum (x_i - \bar{x})^2} \quad (5.4)$$

Полученный таким образом показатель называется средним квадратическим отклонением. Иногда его называют основным отклонением, или просто (для краткости) сигмой. Знаки «плюс» и «минус» (+, -), поставленные перед радикалом, указывают на то, что данный показатель в равной мере характеризует отклонения вариант от средней арифметической как в сторону больших (+), так и в сторону меньших (-) значений. В дальнейшем в целях экономии эти знаки опущены, т.к. подразумевается, что они стоят впереди этого показателя.

Среднее квадратическое отклонение, как и средняя арифметическая, относится к величинам именованным и выражается в тех же величинах, что и признак. Выборка, в которой рассеяние вариант около средней арифметической больше, характеризуется и большей величиной среднего квадратического отклонения и, наоборот, при меньшей вариабельности признака среднее квадратическое отклонение оказывается меньшим.

В лесном хозяйстве чаще всего используют  $\sigma$  вместо  $\sigma^2$ . Преимущество среднего квадратического отклонения против дисперсии объясняется практическим удобством: в случае использования  $\sigma$  мы имеем меру рассеяния, выраженную в тех же величинах, что и среднее значение.

По сравнению со средним линейным отклонением среднее квадратическое отклонение более точно характеризует вариабельность признаков. Для подтверждения приведенного утверждения вычислим величину  $\sigma$  для 1 и 3 ряда распределения числа стволов по диаметру, которые показаны в таблице 5.1, и сравним ее с линейным отклонением. Техника этого вычисления показана в таблице 5.4.

На основе данных таблицы 5.4 выполним вычисления по формуле (5.2)

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{200} \cdot 21878} = \sqrt{109,39} = 10,5 \text{ (см)}; \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{200} \cdot 6240} = \sqrt{31,2} = 5,6 \text{ (см)}.$$

Таблица 5.4 – Вычисление среднеквадратического отклонения для ряда распределения числа стволов по диаметру. Среднее значение ( $\bar{D}$ ) равно 32,0 см

Ступени (классы) толщины, $x_i$	Вычисления по вариантам							
	Ряд №1				Ряд №3			
	$n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$	$n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
8	2	-24	576	1152	-	-	-	-
12	3	-20	400	1200	-	-	-	-
16	13	-16	256	3328	-	-	-	-
20	13	-12	144	1872	7	-12	144	1008
24	23	-8	64	1472	25	-8	64	1600
28	32	-4	16	512	33	-4	16	528
32	40	0	0	0	65	0	0	0
36	24	4	16	384	42	4	16	832
40	19	8	64	1216	22	8	64	1408
44	12	12	144	1728	6	12	144	864
48	7	16	256	1782	-	-	-	-
52	5	20	400	2000	-	-	-	-
56	4	24	576	2880	-	-	-	-
60	3	28	784	2352	-	-	-	-
Итого	200	-	-	21878	200	-	-	6240

Сравнивая между собой  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , видим, что они более адекватно отражают вариацию рядов, чем  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ .

Из теоретической статистики известно, что вариация генеральной совокупности больше вариации выборки, взятой из данной генеральной совокупности, в среднем в  $\frac{\sum \ddot{i}_i}{\sum n_{i-1}}$  раз. Для упрощения символов обозначим  $\sum n_i = N$ . На этом основании в формулу (5.4) следует внести поправку, взяв в качестве множителя подкоренного выражения величину  $\frac{n}{n-1}$ . В результате формула (5.4) преобразуется следующим образом:

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i} \quad (5.5)$$

Величина  $(N-1)$  называется числом степеней свободы. Она показывает, что в ограниченной совокупности (а любая выборка всегда имеет ограниченный объем) все варианты свободы принимать любые значения, кроме одной, значение которой определяется разностью между суммой всех остальных вариантов и объемом выборки. В таких случаях говорят, что одна варианта не имеет степени свободы. Так, если  $\sum n_i$  равна  $a$ ,  $\sum n_{i-1} = b$ , то одна из вариантов равна  $n_k = \sum n_i - \sum n_{i-1}$ .

Например, если четыре каких-то значения варьируют неограниченно, то их число степеней свободы  $4-0=4$ . Когда же вариация этих значений ограничена каким-нибудь объемом, например величиной, равной 100, то три варианты ( $n_1, n_2, n_3$ ) могут принимать любые значения, скажем, 27, 16, 15, или 59, 3, 37, то четвертая варианта ( $n_4$ ) будет иметь только одно значение, а именно

$$n_4=100-(27+16+15) = 100-58 = 42, \text{ или } 100-(59+3+37)=100-99=1,$$

т.е. она не имеет степени свободы. В этом случае остается только три степени свободы:  $4-1=3$ .

В любой эмпирической совокупности всегда имеется один член, не имеющий свободы вариации. Поэтому число степеней свободы для любой выборки равно  $(N-1)$ . В больших совокупностях разница между  $N$  и  $(N-1)$  неощутима, т.е. она заметно не сказывается на величине вариации и среднего квадратического отклонения. На выборках же малого объема эта разница сказывается на величине указанных показателей. Поэтому при вычислении среднего квадратического отклонения на малых выборках рекомендуется пользоваться формулой (5.5).

### **Способы вычисления среднеквадратического отклонения**

Способов вычисления среднеквадратического отклонения вариационного ряда как и других его показателей (статистик) есть несколько. В настоящее время для вычисления статистик разработаны компьютерные программы. Они сразу дают искомый результат, но исследователь, работающий с вариационным рядом, должен понимать суть изучаемого явления. Поэтому необходимо знать алгоритм проводимых вычислений, что мы сейчас и рассмотрим.

Одним из наиболее простых способов является, так называемый, прямой или длинный. Его рационально использовать для небольшого числа наблюдений, не сгруппированных в вариационный ряд. Работа выполняется следующим образом. После того как вычислена средняя арифметическая, нужно определить отклонение от нее каждой варианты, т.е. найти значения  $x_1 - \bar{X}$ ,  $x_2 - \bar{X}$ ,  $x_3 - \bar{X}$  и т.д. Затем каждое отклонение возводится в квадрат и, если варианта повторяется, квадраты отклонений умножаются на соответствующие частоты, и результаты суммируются. Полученная сумма  $\sum \delta(\delta - \bar{\delta})^2$  делится на общее число наблюдений без единицы  $(n-1)$ , и из частного извлекается квадратный корень.

Возьмем для примера небольшую совокупность и вычислим для нее среднее квадратическое отклонение. Например, учитывая естественное возобновление на 10 учетных площадках, мы насчитали следующее число семян: 91, 82, 76, 65, 54, 102, 94, 78, 88, 96. Их сумма ( $\sum n_i$ ) равна 750.

Средняя арифметическая этих значений составит  $750/10 = 75$  семян. Вычисление  $\sigma$  для данного ряда показано в таблице 5.5.

Таблица 5.5 – Вычисление среднего квадратического отклонения для количества семян на учетных площадках. Среднее значение равно 75 шт

№ п/п	$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	Вычисления
1	91	-16	256	$\sigma^2 = \frac{1}{750} \cdot 2516 = 3,35$ $\sigma = \sqrt{3,35} = 1,83 \text{ шт.}$
2	82	-7	49	
3	76	+1	1	
4	65	-10	100	
5	54	-21	421	
6	102	+27	729	
7	94	+19	361	
8	78	+3	9	
9	88	+13	169	
10	96	+21	421	
Итого	750	-	2516	

При вычислениях на компьютере абсолютная величина чисел не имеет значения. При расчетах вручную очень крупные или очень мелкие величины удобнее увеличивать или уменьшать на 1-3 или более порядков, а итог соответственно корректировать.

При наличии больших совокупностей вычисление статистических показателей вариационного ряда чаще всего осуществляют с помощью вспомогательных величин, которые именуют моментами.

### Понятие о моментах распределения

Моментом называют среднее отклонение классовых вариантов от средней величины или от любого числа.

Моменты называют начальными, если они вычислялись от условного начала, и центральными, если вычислялись от средней ряда  $\bar{X}$ . Начальные моменты обозначают буквой  $m$  с индексами, указывающими на порядок момента или на степень отклонений:  $m_0$  - нулевой,  $m_1$  - первый,  $m_2$  - второй,  $m_3$  - третий и  $m_4$  - четвертый - начальные моменты. Это означает соответственно: среднее отклонение нулевой, первой степени, средний квадрат, средний куб отклонений и т.д. Причем  $m_0=1$ , так как все отклонения в нулевой степени равны единице, и, следовательно, сумма произведений их на частоты равна общему числу частот.

Центральные моменты обозначают буквой  $\mu$  с теми же индексами:  $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  и т.д. - соответственно нулевой, первый, второй, третий и четвертый центральные моменты. Причем,  $\mu_0 = 1$ ;  $\mu_1 = 0$ , что легко проверить, пользуясь данным понятием моментов.

## Вычисление начальных моментов

Для вычисления моментов есть несколько способов. Обычно в практике применяют способ произведений и способ сумм. При проведении расчетов на компьютерах можно разрабатывать алгоритм по любому из названных способов. Более просто программируется способ произведений. Поэтому мы рекомендуем использовать именно этот способ.

Способ произведений. Техника и расчеты начальных моментов по способу произведений видны из таблице 5.6, где мы продолжаем рассматривать ряд распределения 120 деревьев сосны, показанный в таблицах 3.1 и 4.1.

В 1-м столбце таблицы вписаны классовые варианты исследуемого признака  $x_i$ , а во 2-м - соответствующие им частоты  $n_i$ . Эти два столбца цифр представляют собой исследуемый вариационный ряд. В 3-м столбце вписывают условные отклонения классовых вариантов от условной средней  $M'$ . В исследуемом ряду распределения  $M'$  принято равным 32 см. Эти отклонения находят по формуле:

$$x_k = (X - M') / k, \quad (5.6)$$

где  $k$  - величина интервала. В рассматриваемом ряду  $k=4$  см.

Для центрального класса условное отклонение равно нулю, так как значение варианта  $X$  и условного начала  $M'$  здесь одинаковы. Начиная расчет отклонений от центрального класса, получим для классов, находящихся в стороне значений вариант меньших  $M'$  ряд чисел со знаком минус ( $-1, -2, -3, -4$  и т.д.), а для классов, находящихся в стороне значений вариант, которые больше  $M'$  - со знаком плюс ( $+1, +2, +3, +4$  и т.д.).

В столбцы 4-7 вписывают произведения найденных отклонений в первой, второй, третьей и четвертой степенях на частоты. Эти произведения рекомендуется находить последовательно по строкам, умножая в каждой из них число предыдущего столбца на одно и то же число - т.е., на отклонение  $x_k$ . Благодаря этому создаются условия для проверки чисел, помещенных в столбцах 4-7.

Таблица 5.6 – Вычисление начальных моментов по способу произведений для ряда распределения диаметров стволов сосны

Ступени толщины (классы) $x_i$	Число деревьев (частоты) $n_i$	Отклонение от условной средней ( $M'=32$ см) $x_k$	$n_i x_k$	$x_k^2$	$n_i x_k^2$	$x_k^3$	$n_i x_k^3$	$x_k^4$	$n_i x_k^4$	$x_{k+1}$	$(x_{k+1})^4$	$n(x_{k+1})^4$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
8	1	-6	-6	36	36	-216	-216	1296	1296	-5	625	625
12	3	-5	-15	25	75	-125	-375	625	1875	-4	256	768
16	8	-4	-32	16	128	-64	-512	256	2048	-3	81	648
20	14	-3	-42	9	126	-27	-378	81	1134	-2	16	224
24	20	-2	-40	4	80	-8	-160	16	320	-1	1	20
28	27	-1	-27	1	27	-1	-27	1	27	0	0	0
32= $M'$	17	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	17
36	12	1	12	1	12	1	12	1	12	2	16	192
40	9	2	18	4	36	8	72	16	144	3	81	729
44	5	3	15	9	45	27	135	81	405	4	256	1280
48	3	4	12	16	48	64	192	256	768	5	625	1875
52	1	5	5	25	25	125	125	625	625	6	1296	1296
Итого	120	-	$\frac{+62}{-162}$ $\Sigma -100$	-	638	-	$\frac{+536}{-1668}$ $\Sigma -1132$	-	8654	-	-	7674

Используя результаты вычислений, показанных в таблице 5.6, проведем расчеты моментов.

$$m_1 = \frac{\sum n_i x_{ki}}{\sum n_i} = -100/120 = -0,833;$$

$$m_2 = \frac{\sum n_i x_{ki}^2}{\sum n_i} = 638/120 = 5,317;$$

$$m_3 = \frac{\sum n_i x_{ki}^3}{\sum n_i} = -1132/120 = -9,433;$$

$$m_4 = \frac{\sum n_i x_{ki}^4}{\sum n_i} = 8654/120 = 72,117.$$

Моменты обычно вычисляют с точностью до 0,001. Учитывая, что при их нахождении может быть допущена ошибка, обычно проводят проверку счета по формуле:

$$m_4' = m_0 + m_1 + 6m_2 + 4m_3 + m_4, \quad (5.7)$$

где  $m_4'$  – четвертый начальный момент, который вычислен, если начальное значение ( $M'$ ) сдвинуто на один разряд ниже. В нашем примере этот сдвиг сделал начальным значением величину  $x_i = 28$  (см. таблицу 5.6). На-

помним, что  $m_0 = 1$ , а  $m_4' = \frac{\sum n_i(x_{ki} + 1)}{\sum n_i} = \frac{7674}{120} = 63,950$ ,  $m_4' = 1 - 3,332 + 31,908 - 37,732 + 72,117 = 63,961$ .

Из приведенных вычислений видно, что  $m_4'$ , вычисленный по данным таблицы 5.6 и по формуле (5.7) практически одинаковы: разницу в 0,011 или 0,17 % можно отнести за счет округлений при расчете моментов.

Вычислив начальные моменты, приступаем к нахождению центральных моментов.

Начальные моменты как таковые не представляют самостоятельного интереса в силу условности выбора начального значения ( $M'$ ). Их в основном используют для вычисления центральных моментов. Это бывает делать гораздо удобнее, чем вычислять центральные моменты непосредственно через среднее значение ( $\bar{x}$ ) и среднее квадратическое отклонение ( $\sigma$ ) по формуле:

$$M_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})n_i, \quad (5.8)$$

где  $M_k$  – центральный момент порядка  $k$ ;

$k = 1, 2, 3, 4, \dots$

Символы  $x_i, \bar{x}, n_i, N = \sum n_i$  описаны выше.

Вычисления центральных моментов через начальные выполняют по формуле:

$$M_k = \sum_{i=0}^k C_k^j m_{k-j} (-m_1)^j, \quad (5.9)$$

где  $C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ , т.е.  $C_k^j$  – это число сочетаний с  $k$  по  $j$ ;

$k!, j!, (k-j)!$  – факториалы приведенных величин, т.е.  $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$ .

Используя (5.9) получаем формулы для **вычисления центральных моментов**:

$$\mu_0 = 1; \quad \mu_1 = 0; \quad \mu_2 = m_2 - m_1^2; \quad (5.10)$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3; \quad (5.11)$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4. \quad (5.12)$$

Для проверки центральных моментов ряда распределения применяют формулы:

$$\mu_3 = m_3 - 3\mu_2m_1 - m_1^3; \quad (5.13)$$

$$\mu_4 = m_4 - 4\mu_3m_1 - 6\mu_2m_1^2 - m_1^4. \quad (5.14)$$



Приведем теперь вычисления центральных моментов для нашего распределения 120 деревьев сосны, используя вычисленные выше начальные моменты.

Получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 1; \mu_1 = 0; \\ \mu_2 &= 5,317 - (-0,833)^2 = 5,317 - 0,694 = 4,623; \\ \mu_3 &= -9,433 - 3(-0,833) \cdot 5,317 + 2 \cdot (-0,833)^3 = -9,433 + 13,287 - 1,156 = 2,698; \\ \mu_4 &= 72,117 - 4 \cdot (-0,833) \cdot (-9,433) + 6 \cdot (-0,833)^2 \cdot 5,317 - 3 \cdot (-0,833)^4 = 72,117 - 31,431 + 22,136 - 1,444 = 61,378. \end{aligned}$$

Проверка (формулы (5.13), (5.14)):

$$\begin{aligned} \mu_3 &= -9,433 - 3 \cdot 4,623 \cdot (-0,833) - (-0,833)^3 = -9,433 + 11,553 + 0,578 = 2,698; \\ \mu_4 &= 72,117 - 4 \cdot 2,698 \cdot (-0,833) - 6 \cdot 4,623 \cdot (-0,833)^2 - (-0,833)^4 = 72,117 + 8,990 - 19,248 - 0,481 = 61,378. \end{aligned}$$

Проверка показала, что центральные моменты вычислены правильно.

Моменты можно вычислять также по способу сумм. В прежние времена, когда вычисления проводили вручную, этот способ считали предпочтительным из-за меньшего количества вычислений. При расчетах на компьютере используют в основном способ произведений. Это вызвано более простым алгоритмом расчетов по способу произведений против способа сумм. Последний способ требует много сложных логических условных переходов, что реализовать на компьютере труднее, чем организовать простой счет даже больших чисел.

Хотя способ сумм не рекомендуется для современных вычислений, но его традиционно описывают в пособиях по биометрии. Здесь тоже описан этот способ в том виде как он приведен в учебнике советского ученого-таксатора Н.Н.Свалова (1925-2002), который есть в списке литературы. Технику вычислений покажем на примере ряда распределения высот сосны (таблица 5.7).

Вычисление начальных моментов по способу сумм начинается с вписывания в качестве исходных данных классовых вариантов и соответствующих им численностей (частот). Следующие за частотами столбцы нумеруют, они предназначены для суммирования частот в определенной последовательности, которая изложена ниже. Последние два столбца таблицы не нумеруют – в них помещают вычисленные значения, необходимые для проверки верности проведенных вычислений.

Таблица 5.7 – Вычисление начальных моментов по способу сумм для ряда распределения высот сосны

	$X$	$n_i$	(1) $\sum n_i$	(2) $n_{i+1} = n_{i-1} + n_i$	(3)	(4)	(5)	$(x_k+1)$	$n_i$ $(x_k+1)^2$ (из табл. прил. 2)
b	20	1	1	1	1	1	1	-6	1296
	21	2	3	4	5	6	7	-5	1250
	22	2	5	9	14	20	27	-4	512
	23	3	8	17	31	51	-	-3	243
	24	4	12	29	-	-	-	-2	64
	25	2	14	43	-	-	-	-1	2
	26	13	27 $k_2$	-	-	-	-	0	0
условн. средняя	$M'=27$	14 $k_1$	-	-	-	-	-	+1	14
a	28	25	53 $k_3$	-	-	-	-	+2	400
	29	18	28	38	-	-	-	+3	1458
	30	10	10	10	10	-	-	+4	2560
$\Sigma$		94	$\Sigma a 91 \alpha$	48 $\alpha$	10 $\alpha$	-	-	-	7789
			$\Sigma b 70 b$	103 b	111 b	78	35		
	$S = \alpha + b$	$s_1 161$	$s_2 151$	$s_3 121$	$s_4 78$	$s_5 35$	$m_4^* = \sum n_i (x_i + 1)^2 / \sum n_i$		
	$d = \alpha - b$	$d_1 - 21$	$d_2 - 55$	$d_3 - 101$	$d_4 - 78$	$d_5 - 35$	$m_4^* = 7799 / 94 = 82,968$		

Проверка суммирования (сумм  $a$  и  $b$ ) приведена в таблице 5.8.

Таблица 5.8 – Проверка суммирования  $a$  и  $b$

$a_1 = 38 + 53 = 91$	$b_1 = 43 + 27 = 70$	$b_2 = 60 + 43 = 103$	$m_0 = 1,000$ $4m_1 = 0,892$ $6m_2 = 29,550$ $4m_3 = -38,936$ $m_4 = 90,457$ <b>82,963</b>
$a_2 = 10 + 38 = 48$	$b_3 = 51 + 60 = 111$	$b_4 = 27 + 51 = 78$	

Проверка  $N = k_1 + k_2 + k_3 = 27 + 14 + 53 = 94$

Начальные моменты:  $m_1 = 21 : 94 = 0,223$

$m_2 = (161 + 2 \cdot 151) / 94 = 463 / 94 = 4,925$

$m_3 = [21 + 6(-55) + 6](-101) / 94 = -915 / 94 = -9,734$

$m_4 = 161 + 14 \cdot 151 + 36 \cdot 121 + 24 \cdot 78 / 94 = 8503 / 94 = 90,457$

Затем против частоты, соответствующей условной средней  $M'$ , проводим черту через все нумерованные столбцы таблицы, разделяя последнюю на две части - верхнюю и нижнюю. В столбцах 2, 3, 4, 5 добавляем сверху и снизу от проведенной общей черты дополнительные

черточки в возрастающем количестве 1, 2, 3, 4 и т.д. Таким образом, получается фигура из черточек в виде треугольника.

Составление таблицы состоит в следующем. Численности первого и последнего класса (в нашем ряду 1 и 11-го) вписывают в те же строки, т.е. первого и последнего классов, во все столбцы незанятые чертой. Каждое последующее число столбца (1), ..., (5) получают как сумму двух чисел, одно из которых стоит рядом с образуемым числом слева, а другой – над ним (в верхней части таблицы) или под ним (в нижней части таблицы). Строки, занятые черточками, не заполняют. Внизу каждого столбца выписывают суммы верхней и нижней частей таблицы.

Одну из этих вспомогательных сумм, находящуюся в стороне вариант, значения которых больше условной средней  $M'$  обозначают буквой  $a$ , а другую сумму – буквой  $b$ . Алгебраические суммы этих вспомогательных сумм обозначают буквой  $s$ , а разности их буквой  $d$  (в столбцах 1, 2, 3, 4, 5 будем иметь соответственно  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  и  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ ).

Правильность суммирования в 1-м столбце проверяют, сложив наибольшие числа верхней и нижней частей этого столбца с частотой, стоящей против начального значения. Сумма этих трех чисел должна равняться объему ряда. В примере расчета, приведенном в таблице 5.7, имеем  $27+14+53=94$ .

Проверка суммирования во 2-м и следующем столбцах состоит в сложении последнего наибольшего числа верхней или нижней части проверяемого столбца с последним числом предыдущего столбца, расположенным строкой выше (при проверке нижней суммы) или строкой ниже (при проверке верхней суммы).

Проверка сумм  $a$  и  $b$  приведена в таблице 5.8.

Начальные моменты вычисляют по формулам:

$$m_1 = d_1 / N, \quad m_2 = (s_1 + 2s_2) / N, \quad (5.15)$$

$$m_3 = (d_1 + 6d_2 + 6d_3) / N, \quad (5.16)$$

$$m_4 = (s_1 + 14s_2 + 36s_3 + 24s_4) / N \quad (5.17)$$

Вычисление начальных моментов приведено в той же таблице 5.7.

**Вычисление центральных моментов.** Формулы для вычислений те же, что приведены ранее, когда моменты нашли по способу произведений (5.10-5.14).

$$\mu_2 = 4,925 - 0,223^2 = 4,925 - 0,049 = 4,876.$$

$$\begin{aligned} \mu_3 &= -9,734 - 3 \cdot 4,925 \cdot 0,223 + 2 \cdot 0,223^3 = \\ &= -9,734 - 3,295 + 0,022 = -13,007 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_4 &= 90,457 - 38,936 \cdot 0,223 + 29,550 \cdot 0,050 - 3 \cdot 0,002 = \\ &= 90,457 + 8,683 + 1,477 - 0,006 = 100,611. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \mu_3 &= -9,734 - 3 \cdot 4,876 \cdot 0,223 - 0,223^3 = \\ &= -9,734 - 3,262 - 0,011 = -13,007. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_4 &= 90,457 - 0,892(-13,007) - 6 \cdot 4,876 \cdot 0,223^2 - 0,223^4 = \\ &= 90,457 + 11,602 - 1,454 - 0,002 = 100,603.\end{aligned}$$

#### 5.4 Асимметрия, эксцесс, коэффициент вариации

Центральные моменты используют для вычисления главных статистических показателей ряда распределения: среднего значения ( $\bar{\delta}$ ), среднего квадратического отклонения ( $\sigma$ ), коэффициента вариации ( $v$ ), показателей асимметрии ( $\alpha$ ) и эксцесса ( $E$ ).

Асимметрию и эксцесс находят через основные моменты. Последние определяют по формулам:

$$rh = \frac{\mu h}{\sigma h}, \quad (5.18)$$

где  $rh$  – основной момент с показателем  $h$ ;

$\mu h$  – центральный момент с показателем  $h$ ;

$\sigma h$  – основное отклонение в степени  $h$ .

Из формулы (5.18) следует, что основной момент равен отношению центрального момента того или иного порядка к основному отклонению в соответствующей степени. Для распределения 120 деревьев сосны по диаметру, мы определили  $m_0=1$ ;  $m_1=0$ ;  $m_2=4,623$ ;  $m_3=2,698$ ;  $m_4=61,378$ , а  $\sigma=1,830$ . Тогда, проведя вычисления по формуле (5.18), учитывая значения  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ , вытекающие из формул (5.9)-(5.12), получим:

$$r_0 = \frac{\mu_0}{\sigma_0} = \frac{1}{(1,830)^0} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$r_1 = \frac{\mu_1}{\sigma_1} = \frac{0}{1,830} = 0;$$

$$r_2 = \frac{\mu_2}{\sigma_2} = \frac{4,623}{(1,830)^2} = \frac{4,623}{3,349} = 1,380;$$

$$r_3 = \frac{\mu_3}{\sigma_3} = \frac{2,698}{(1,830)^3} = \frac{2,698}{6,128} = 0,440;$$

$$r_4 = \frac{\mu_4}{\sigma_4} = \frac{61,378}{(1,830)^4} = \frac{61,378}{11,215} = 5,473.$$

Третий основной момент ( $r_3$ ) представляет собой хаарктеристику скошенности (косости) ряда распределения и именуется асимметрией, которая обозначается  $\alpha=r_3$ .

Четвертый основной момент служит для нахождения крутости ряда распределения, который называется эксцессом и обозначается  $E=r_4-3$ . Для нашего примера  $\alpha=0,440$ ,  $E=2,473$ .

Среднеквадратическое отклонение, как и средние величины ряда, является именованной величиной, выражающейся в величинах измерения ряда. Для решения многих теоретических и практических вопросов лесной биометрии нужны относительные величины, характеризующие общие особенности размаха ряда распределения. Таким показателем является коэффициент вариации, который в литературе по лесному хозяйству называют еще показателем изменчивости таксационных признаков лесных насаждений.

Коэффициент вариации представляет собой показатель изменчивости изучаемого признака, выраженный в относительных единицах, обычно в процентах. Он определяется по формуле

$$V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100\%, \quad (5.19)$$

где  $v$  – коэффициент вариации;

$\sigma$  – среднеквадратическое отклонение;

$\bar{X}$  – среднее значение.

Так как коэффициент вариации не зависит от принятых единиц измерения (при делении  $\sigma$  на  $\bar{X}$  единицы измерения взаимно уничтожаются), то он применяется при сравнительной оценке варьирования различных признаков. В лесном хозяйстве это могут быть диаметр дерева, его высота, объем, прирост и т.д.

Значение коэффициента вариации используют для вычисления точности исследования ( $P$ ) по формуле

$$P = \frac{V}{\sqrt{N}}, \quad (5.20)$$

где  $N$  – объем выборки.

Для примера вычислим  $v$  и  $P$  по данным таблиц 5.5 и 5.6.

Для измеренного количества семян (таблица 5.5)  $\sigma=1,83$  шт.,  $N=10$ , среднее значение ( $\bar{X}$ ) = 75.

Коэффициент вариации семян на площадках равен

$$V = \frac{1,83}{75} \cdot 100\% = 2,44\% .$$

Тогда точность исследования составит (формула (5.20))

$$P = \frac{2,44}{\sqrt{10}} = \frac{2,44}{3,162} = 0,77\% .$$

Для замеренных 120 диаметров сосны (таблица 5.6) значения  $v$  и  $P$  следующие:  $\bar{D}=28,7$  см (см. главу 4, таблица 4.1);  $\sigma = C\sqrt{\mu_2}=8,83$ , где  $C$  – величина ступени толщины (4 см);  $N=120$  шт.

Тогда

$$V = \frac{8,83 \text{ см}}{28,7 \text{ см}} \cdot 100\% = 30,8\% ;$$

$$D = \frac{30,8}{\sqrt{120}} = 2,8\% .$$

Полученные величины варьирования диаметров соответствуют данным, приводимым в исследованиях по лесной таксации. Точность в 2,8% достаточная при проведении измерений в практике лесного хозяйства и низкая для научных исследований, где требуется точность в 1,5-2%.

Из формулы (5.20) можно определить необходимое количество наблюдений ( $N$ ) при заданной точности ( $P$ ).

Если  $P = \frac{V}{\sqrt{N}}$ , то

$$P\sqrt{N} = V ;$$

$$\sqrt{N} = \frac{V}{P} ;$$

$$N = \frac{V^2}{P^2} .$$

Для наших 120 деревьев, где  $v = 30,8\%$ , необходимое число наблюдений при разной точности составит

$$\text{Для } P = 10\% \quad N = \frac{(30,8)^2}{10^2} = \frac{949}{100} \approx 10 \text{ деревьев;}$$

$$\text{Для } P = 5\% \quad N = \frac{(30,8)^2}{5^2} = \frac{949}{25} \approx 40 \text{ деревьев;}$$

$$\text{Для } P = 2\% \quad N = \frac{(30,8)^2}{2^2} = \frac{949}{4} \approx 240 \text{ деревьев;}$$

$$\text{Для } P = 1,5\% \quad N = \frac{(30,8)^2}{(1,5)^2} = \frac{949}{2,25} \approx 420 \text{ деревьев;}$$

$$\text{Для } P = 1\% \quad N = \frac{(30,8)^2}{1^2} = \frac{949}{1} \approx 950 \text{ деревьев.}$$

Следовательно, чтобы изучить наш древостой с приемлемой точностью, необходимо измерить 240-420 стволов, в среднем 300-350.

Обобщая изложенное в настоящей главе, приведем формулы для определения статистических показателей ряда распределения через моменты:

$$\text{Средняя арифметическая} \quad \bar{D} = M' + \bar{N}m_1 \quad (5.21)$$

Среднее квадратическое отклонение:

а) в единицах интервала

(дисперсия)

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} \quad (5.22)$$

б) в единицах измерения

$$\sigma = \tilde{n}\sqrt{\mu_2} \quad (5.23)$$

Коэффициент вариации

$$V = \frac{\sigma}{\bar{O}} \cdot 100\% \quad (5.24)$$

Показатель асимметрии

$$\alpha = r_3 \quad (5.25)$$

Показатель эксцесса

$$E = r_4 - 3 \quad (5.26)$$

Показатель точности исследования

$$P = \frac{V}{\sqrt{N}} \quad (5.27)$$

В приведенных формулах условные обозначения ( $\bar{x}$ ,  $M'$ ,  $m_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\sigma$ ,  $r_3$ ,  $r_4$ ,  $V$ ,  $\alpha$ ,  $E$ ,  $C$ ,  $P$ ,) показаны выше.

## 6. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

- 6.1 Понятие о видах распределения
- 6.2 Эмпирические функции распределения
- 6.3 Функция нормального распределения и ее параметры
- 6.4 Вычисление теоретических частот кривой нормального распределения

### 6.1 Понятие о видах распределения

Массивы случайных величин обычно распределяются не хаотично, а по некоторому закону. Эти законы распределения приводят к разным видам распределений. Все распределения можно выразить графически, что в основном и делали в лесном хозяйстве до 50-60 годов XX века. В то же время наиболее корректно выражать распределение через некоторые математические функции. В настоящее время это стало основным методом описания распределений, т.к. применение компьютеров сделало такую работу простой, быстрой и доступной. В то же время мы должны ясно понимать суть изучаемого явления. Этого не достичь, если исследователь использует компьютер только как пользователь.

Распределения могут быть дискретными и непрерывными. Так, если мы рассматриваем некоторое распределение, например, деревья в древостое, выражаемое конкретными числами: 4, 8, 12, ..., то оно будет дискретным. При описании распределения непрерывной функцией распределение становится непрерывным. Часто между ними трудно провести грань: все зависит от цели исследования, величины классового промежутка и т.д.

Все, что может быть измерено или исчислено в живой природе, называют величиной постоянной или переменной. В зависимости от обстоятельств эти величины могут принимать разные значения. Переменную величину считают определенной, если заранее, до опыта можно указать ее значение. Если же в одних и тех же условиях переменная величина может принимать разные значения, которые заранее указать нельзя, она называется *случайной* величиной. Понятие случайной величины, как и понятие случайного события, относится к фундаментальным в теории вероятностей.

Случайные величины бывают зависимыми и независимыми. Случайные величины называют **независимыми**, если вероятность любого значения одной величины ( $X$ ) не зависит от того, какие значения принимает другая величина ( $Y$ ). В противном случае эти величины находятся в зависимости одна от другой и называются **взаимозависимыми** случайными величинами. Например, мы изучаем некоторый участок леса. Там имеется определенная почва, на которой растут деревья. На одной и той же почве могут расти разные деревья: сосна, береза, ель и другие. Механический состав почвы не зависит от того, какой древесный вид сегодня здесь растет. Таким образом при рассмотрении системы почва-дерево характеристики почвы, скажем, процент физической глины, будет величиной независимой. В то же время высота дерева,



да и сам породный состав лесного участка определяется почвенными условиями, т.е. показатели роста деревьев зависят от почвенных характеристик и являются величиной зависимой. Если мы будем рассматривать диаметр и высоту дерева, то обнаружим, что с изменением одного показателя меняется и второй. Это величины взаимозависимые.

Существуют разные типы случайных величин. Для лесовода и биолога наиболее существенное значение имеют дискретные и непрерывные случайные величины. С ними мы уже встречались выше при рассмотрении эмпирических распределений. Дискретная случайная величина принимает лишь отдельные счетные значения, для которых можно указать вероятности, или частоты. Непрерывная случайная величина может принимать любые значения в некотором заданном интервале. Указать вероятности или частоты ее отдельных значений, вообще говоря, невозможно, поэтому они относятся к тем значениям, которые эта величина принимает в интервале (от - до), причем этот интервал может быть каким угодно - и большим и малым.

## 6.2 Эмпирические функции распределения

В лесной биометрии мы, как правило, имеем дело с эмпирическими функциями распределения. Это значит, что, выполняя некоторые измерения случайной величины, например, диаметры деревьев в лесу, получаем распределение и определяем вид этого распределения, руководствуясь графиком некоторой функции распределения.

Очень важно знать распределения признаков, наиболее часто встречающиеся в лесных исследованиях. Это позволяет применять различные способы обработки выборочных данных не слепо, а осмысленно, а также правильно оценивать результаты опытов и наблюдений, объективно и точно сравнивать их между собой.

В эмпирических распределениях, т. е. тех, которые наблюдаем, проводя измерения в лесу, бросается в глаза одна важная особенность - преимущественное накапливание вариант в центральных классах и постепенное убывание их числа по мере удаления от средней арифметической вариационного ряда. Эта особенность, составляющая одну из характерных черт варьирования биологических признаков вообще и лесохозяйственных в частности, факт фундаментального значения, имеющий широкое распространение в природе.

Такую картину получаем, если проанализируем распределение людей по росту, диких животных, например зайцев, по весу, величину ступни у взрослых людей одного пола и т. д. На рисунке 6.1 в качестве классического примера показано распределение размеров мужской обуви среди жителей Восточной Европы, приводимое в большинстве учебников по биометрии.

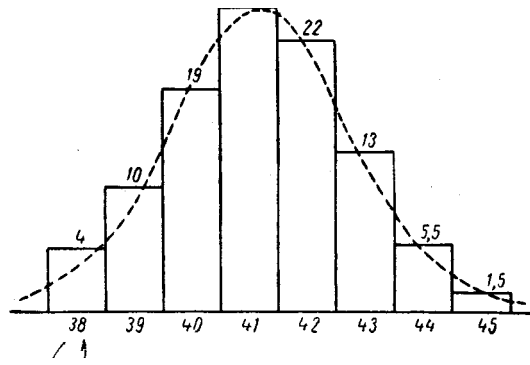


Рисунок 6.1 Гистограмма распределения размеров мужской обуви среди населения в Восточной Европе (на оси абсцисс - номера обуви, на оси ординат - проценты)

Именно такие закономерности распределения являются основными для заказов обувным фабрикам на пошив обуви определенного размера, чтобы полностью удовлетворить спрос и избежать потерь от нераспроданных экземпляров.

Такую закономерность, т.е. концентрацию наибольших численностей в середине ряда распределения, впервые описал бельгийский статистик А.Кетле в 1835 году, исследовавший распределение нескольких тысяч солдат американской армии по росту.

Деревья в лесу распределяются по толщине, высоте и другим признакам аналогично. Если построим график по данным перечета 120 стволов сосны (таблица 4.1.), то увидим, что он одновершинный, наибольшая концентрация деревьев наблюдается в средних ступенях толщины (рисунок 6.2).

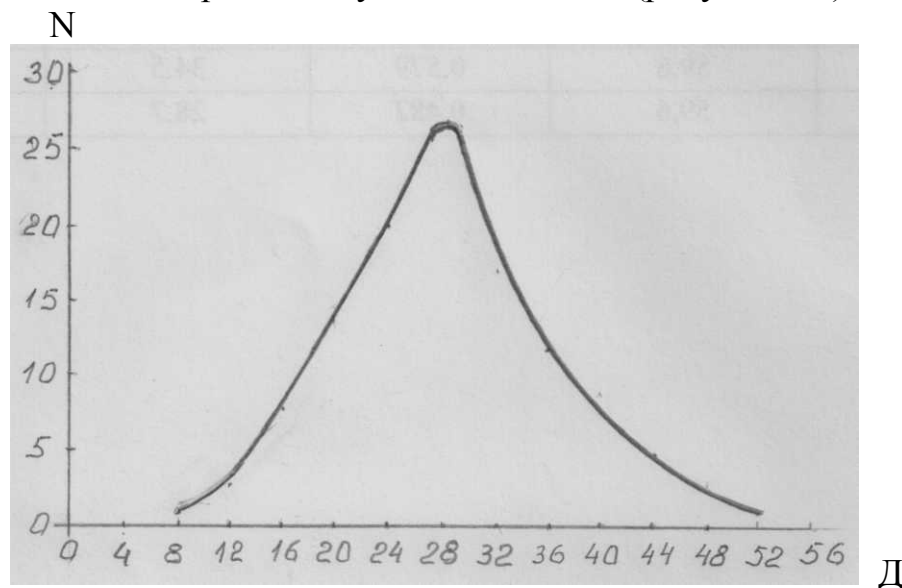


Рисунок 6.2 Распределение 120 деревьев сосны в древостое в возрасте 100 лет

### 6.3 Функция нормального распределения и ее параметры

Выше показано, что распределение случайных величин в биологических, в том числе и лесных, совокупностях носит закономерный характер. Есть много функций, которыми описывают названные распределения. Наиболее универсальной и используемой чаще других является уравнение кривой нормального распределения или функция Гаусса-Лапласа. Ее суть заключается в том, что частота отклонения отдельных вариантов от средней арифметической данной совокупности есть функция их величины. Вероятность частоты той или иной варианты в генеральной совокупности и определяется этой функцией.

Графически функция нормального распределения схожа с графиками на рисунках 6.1. и 6.2. В то же время график, который строго соответствует уравнению кривой нормального распределения, выглядит следующим образом (рисунок 6.3.).

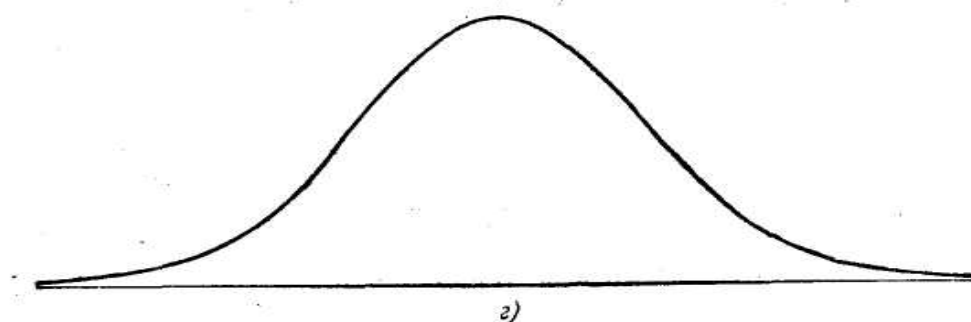


Рисунок 6.3 Кривая нормального распределения

Уравнение кривой нормального распределения выражает зависимость теоретических численностей  $f(x)$  или  $y$  от значений  $x$ , являющейся непрерывно распределяющейся случайной величиной. Есть разные формы выражения этой кривой. Основная форма написания этого выражения

$$y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2} \quad (6.1)$$

Здесь  $y$  – ордината или высота кривой на любом расстоянии от  $\bar{X}$ , т. е. центра распределения. Вправо от этого центра случайная величина  $x_i$  имеет положительные, а влево – отрицательные значения.

$\sigma$  или среднеквадратическое отклонение характеризует амплитуду колебания отдельных значений случайной величины около средней арифметической;

$(x_i - \bar{X})$  – отклонение варианты от средней арифметической, являющейся серединой ряда;

выражение  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$  - максимальная ордината, соответствующая точке  $\bar{X}$ .

По мере удаления от этой точки, т.е. центра распределения, плотность значений случайной величины падает и кривая асимптотически приближается к оси абсцисс;

Так как  $\pi = 3,14593$  и  $e$  - основание натуральных логарифмов, равное 2,7183, являются постоянными величинами, следовательно величина

$\frac{x_i - \bar{X}}{\sigma} = t$  есть не что иное как нормированное отклонение. Эта величина

имеет большое значение для исследования свойств нормального распределения.

Найденные для различных значений  $t$  величины  $Y$  дают ординаты нормальной кривой. Непременным условием нормирования служит требование, чтобы вся площадь, заключенная под кривой вероятности (нормальной кривой), равнялась единице.

Если принять  $\sigma=1$ , то уравнение (6.1) будет иметь следующий вид:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_i - \bar{x})^2} \quad (6.2)$$

Кривая, описываемая этим уравнением, получила название стандартизованной кривой распределения, или кривой Гаусса-Лапласа. Она выражает закон нормального распределения с площадью под кривой, равной единице.

Чтобы ордината  $Y$  выражала не вероятностные, а абсолютные численности, т.е. частоты вариантов, нужно в числитель правой части уравнения (6.1) ввести в качестве дополнительных множителей  $N$  - общее число вариантов данной совокупности и  $i$  - величину классового интервала (если вариация разбита на классы).

Тогда уравнение (6.1.) принимает следующий вид:

$$Y = \frac{N \cdot i}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (6.3)$$

Здесь  $Y$  обозначает теоретическую частоту вариационного ряда, соответствующую нормированному отклонению  $t$ .

Кривая нормального распределения обладает следующими свойствами:

- Однозначно определяется двумя параметрами:  $\bar{X}$  - средним значением и  $\sigma$  - среднеквадратическим отклонением.
- Кривая симметрична относительно среднего значения ( $\bar{X}$ ) и имеет колоколообразную форму, которая зависит от величины  $\sigma$ , являющейся параметром масштаба, а положение определяется  $\bar{X}$ .

- Кривая имеет один максимум, равный  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$  и две точки перегиба на расстоянии  $\pm\sigma$  от  $\bar{X}$ .
- Ветви кривой асимптотически приближаются к оси абсцисс на расстоянии  $\pm\infty$ .

Итак, нормальный закон распределения выражает функциональную зависимость между величиной признака и его частотой в генеральной совокупности. Чем больше отклонение варианты от средней величины, тем меньше ее частота, и наоборот, чем меньше варианта отклоняется от средней арифметической, тем больше ее частота в данной совокупности. Следовательно, вероятность отклонения любой варианты от средней арифметической есть функция нормированного отклонения. Эта функция выражается с помощью асимптотических, т.е. приближенных формул (6.1), а также графически (см. рисунок 6.3) и в форме таблиц. Таблица значений вероятности, соответствующие разным значениям нормированного отклонения  $t$  приведена в приложении А. Пользуясь этой таблицей, можно по двум параметрам -  $\bar{X}$  и  $\sigma$  - построить теоретический вариационный ряд, что имеет значение при сравнительной оценке эмпирических распределений.

Выше было показано, что нормальное распределение является широко распространенной закономерностью в живой природе, в том числе и в лесных насаждениях. Такому явлению должно быть некоторое убедительное основание. Его привел известный русский математик и механик А.М.Ляпунов (1857 – 1918), доказав в 1901 году предельную теорему Ляпунова, которая относится к области теории вероятностей.

Учитывая фундаментальность нормального закона распределения и его большую практическую значимость, приведем краткое изложение теоремы Ляпунова в интерпретации известного советского математика А.К.Митропольского.

Теорема Ляпунова утверждает, что если значения независимых случайных величин будут малы в сравнении с их суммой, то при неограниченном возрастании числа этих величин распределение их суммы становится приближенно нормальным.

Условия теоремы Ляпунова являются настолько широкими, что во многих случаях их можно предполагать выполняющимися. Поэтому, если есть основание рассматривать изучаемую величину как сумму многих независимых случайных величин, влияние каждой из которых на эту сумму практически ничтожно, то, если даже распределения составляющих величин нам неизвестны, можно часто заранее быть уверенным, что изучаемая величина имеет нормальное распределение.

Благодаря этому становится ясным, что, например, распределение случайных ошибок при измерениях будет нормальным. Точно так же нормальным будет распределение физических признаков людей, распределение механических свойств материалов и т. д. Этот вывод полностью подтверждается многочисленными исследованиями.

Таким образом, теорема Ляпунова дает объяснение тому важному положению, что во многих случаях величины имеют нормальное распределение.

Причину такого соответствия нормальной кривой полученным при наблюдении рядам распределения можно видеть в выполнении тех самых условий, на основании которых теоретически появляется нормальная кривая. Можно предположить, что отдельные наблюдаемые значения являются результатом бесчисленного множества весьма незначительных независимых между собой причин, каждая из которых может произвести очень малое положительное или отрицательное отклонение от среднего значения исследуемой величины.

Для наглядного выяснения тех условий, при которых возникает нормальное распределение, построен прибор Гальтона. Этот прибор представляет ящик, изображенный на рисунке 6.4. Вверху прибора устроено отверстие в виде воронки, которое ведет в узкое пространство между доской и стеклом. Внизу прибора помещены перегородки, образующие несколько отделений. Все пространство между воронкой и отделениями занято рядами игл, расставленных в шахматном порядке. Если прибор поставить в наклонном положении и сыпать в воронку мелкую дробь, то иглы будут делить эту дробь на отдельные потоки. Вследствие этого дробинки расположатся не равномерно, а образуют в своей совокупности нормальную кривую.

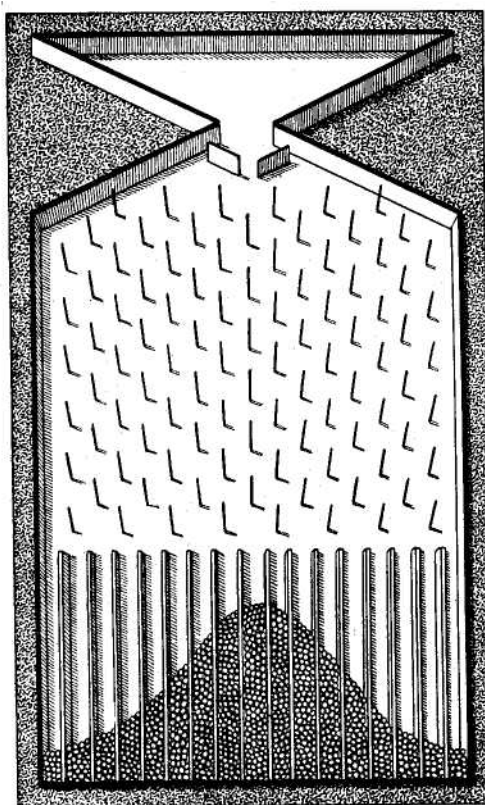


Рисунок 6.4 Прибор Гальтона

Рассматриваемый прибор ясно показывает то действие, которое оказывает множественность причин на возникновение явления. В самом деле, при

отсутствии игл в приборе весь поток дробы шел бы без отклонений вниз, и в результате дробь скопилась бы между двумя — тремя соседними вертикальными полосками против отверстия воронки. Однако препятствия в виде игл отклоняют дробинки в разные стороны, причем для большей части дробинки эти отклонения взаимно уравниваются, и все распределение принимает характерный вид: в отделении против воронки скапливается наибольшее количество дробы, а в остальных отделениях будет дробы тем меньше, чем дальше они отстоят от среднего отделения, так как для того чтобы отклониться от него далеко, необходимо встретить много односторонних препятствий, а это случается только с небольшим числом дробинки.

Картина распределения, подобная описанной выше, наблюдается при изучении случайных величин, взятых из любой области.

Примеров, когда применим закон, вскрытый теоремой Ляпунова, множество. Проанализируем действие этого закона в лесу. Так, на древостой, растущий без вмешательства человека, действует множество абиотических и биотических факторов. Ресурсы роста дерева определяются наследственными свойствами конкретного семени, места, где оно произрастает (условия произрастания имеют определенную неоднородность даже в пределах одного таксационного участка), соседними деревьями, случайными повреждениями (снегом, животными, молнией и т.д.) и многими другими причинами. Каждая из причин носит случайный характер и ее влияние на их совокупный результат приводит к нормальному распределению. Здесь мы исключаем антропогенный фактор, особенно рубки ухода, воздействие которых велико и целенаправленно, что имеет следствием другие распределения диаметров деревьев, о чем будет сказано ниже.

Нормальное распределение можем наблюдать, если проанализируем отклонение длины реальных сортиментов, заготовленных в лесу, от заданной их длины. Например, мы выпиливаем еловые пиловочные бревна длиной 6,5 м. По действующему стандарту здесь допустимо отклонение в большую сторону (припуск) до 1%. В нашем случае это составит 6,5 см. При реальной раскрижевке из-за разных случайных причин припуски получаются неодинаковой длины. Средний припуск здесь будет отклоняться от средней величины (примерно 4 см) на  $\pm 3$  см, а весь массив чисел, характеризующих отклонения от 6,5 см будет распределен нормально.

**Основные свойства нормального распределения.** Теоретически случайная величина  $X$ , распределенная по нормальному закону, может принимать любые значения, меняясь от  $-\infty$  до  $+\infty$ . На самом же деле, как это видно из графика нормальной кривой (см. рисунок 6.3), значения вероятности по мере удаления от центра распределения  $\bar{X}$  быстро убывают.

Если в обе стороны от  $\bar{X}$  отложить отрезки, равные  $3\sigma$ , то получатся точки  $\bar{X} - 3\sigma$  и  $\bar{X} + 3\sigma$ ; их можно выразить в нормированной форме:

$$t_1 = \frac{(\bar{x} - 3\sigma) - \bar{x}}{\sigma} = -3 \text{ и } t_2 = \frac{(\bar{x} + 3\sigma) - \bar{x}}{\sigma} = +3$$

Сделаем анализ вероятности того, что значение случайной величины окажется в данном интервале, т.е. между  $\bar{X} - 3\sigma$  и  $\bar{X} + 3\sigma$ . Как утверждает теория вероятностей, искомая вероятность приблизительно равна:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) \approx \frac{1}{2} [\Phi(t_2) - \Phi(t_1)], \quad (6.4)$$

где выражение  $P(x_1 \leq X \leq x_2)$  обозначает вероятность (P) того, что случайная величина X находится между заданными пределами  $(x_1 - \bar{x})$  и  $(x_2 - \bar{x})$ ;

$t_1$  и  $t_2$  - нормированное отклонение, т.е.  $t_1 = \frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma}$  и  $t_2 = \frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma}$ ;

символ  $\Phi(t)$ , читаемый как “фи от t”, называется **интегральной функцией Лапласа**. Одно из важных свойств этой функции заключается в том, что она стремится к единице, если t неограниченно возрастает. Значения этой функции, соответствующие разным значениям t, и составляют содержание таблицы, приведенной в приложении А.

Подставим в уравнение (6.4) взятые значения  $t_1$  и  $t_2$ :

$$P(\bar{x} - 3\sigma \leq X \leq \bar{x} + 3\sigma) = \frac{1}{2} [\Phi(3) - \Phi(-3)] = \Phi(3).$$

Вычисления показывают, что  $\Phi(3) = 0,9973 \approx 1$ . Это значит, что случайная величина, распределенная по нормальному закону, практически не отклонится от центра распределения  $\bar{x}$ , т.е. средней арифметической генеральной совокупности, более чем на  $3\sigma$ . Этот важный для нас вывод известен в биометрии под названием “правила плюс - минус трех сигм”. Например, мы изучили распределение по весу самцов разновозрастной популяции дикого кабана на территории некоторого лесхоза. Это распределение будет близким к нормальному. Допустим, что средний вес кабана ( $\bar{x}$ ) в этой популяции составил 100 кг, а среднеквадратическое отклонение ( $\sigma$ ) равно 30 кг, т.е. изменчивость (коэффициент вариации (V) составит 30%. Тогда 68% кабанов будут иметь вес от 70 до 130 кг. Для 95% этой популяции колебания составят от 40 до 160 кг. При анализе 99,9% этой популяции вес отдельных особей может колебаться от 10 до 190 кг. Только очень малое их количество (отдельные особи) могут иметь больший вес, что мы и наблюдаем в природе.

Из таблицы в приложении А видно, что между пределами от  $-t$  до  $+t$  находится 0,6828, или 68,28%, всей площади, заключенной под кривой вероятности. Площадь этой кривой, ограниченная пределами от  $-2t$  до  $+2t$ , составляет 0,9545 долей единицы, или 95,45%, а в пределах от  $-3t$  до  $+3t$  находится 0,9973, или 99,73% всей площади нормальной кривой. Выражаясь более конкретным языком, правило “плюс - минус трех сигм” гласит, что в пределах



$\bar{x} \pm 1\sigma$  находится 68,28% всех вариант эмпирической совокупности, распределяющейся по нормальному закону; в пределах  $\bar{x} \pm 2\sigma$  заключено 95,45%, а в пределах  $\bar{x} \pm 3\sigma$  содержится 99,73% всех вариант совокупности.

Таким образом, нормальную кривую можно разделить на три участка или “сигмальные зоны”, каждая из которых содержит определенное число вариант. Границы этих “зон” приблизительно совпадают с наиболее заметными изгибами нормальной кривой (рисунок 6.4.).

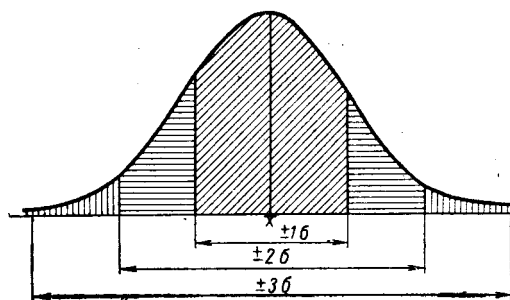


Рисунок 6.4 Графическая иллюстрация “правила плюс - минус трех сигм”

Обобщая изложенное, можно сказать, что, как указывают известные советские ученые-лесоводы К. Е. Никитин и А. З. Швиденко, в процессе статистического анализа лесоводственной информации, относящейся к некоторой случайной величине, теорию распределений применяют в двух основных направлениях:

- Как основу статистических выводов, в частности, оценки параметров и проверки статистических гипотез;
- Как средство и метод представления выборочных распределений.

В первом случае часто основополагающую роль играет нормальный закон распределения, во втором - в качестве модели можно применять самые различные типы распределений. При этом в сходных практических ситуациях при изучении одной и той же величины возможно использование разных теоретических схем, что объясняется неполнотой соответствия реальной ситуации теоретическим предпосылкам, необходимым для формирования того или иного распределения, и ограниченностью объема выборки. Последнее предопределяет приближенный характер решения задачи, необходимость статистической оценки ее результатов и объясняет обычно применяемые термины: “аппроксимация распределений”, или “подгонка”.

#### 6.4 Вычисление выравнивающих частот кривой нормального распределения

Вычисление выравнивающих частот с помощью кривой нормального распределения начинают с нахождения статистик вероятностного ряда:  $\bar{d}$ ,  $\sigma$ ,

$\alpha$ ,  $E$ . Затем анализируем величины асимметрии и эксцесса. Теоретически для кривой Гаусса-Лапласа они равны 0. Но на практике такое наблюдается редко. В то же время, если  $\alpha$  и  $E$  относительно невелики, то аппроксимацию оправдано делать с помощью нормального распределения.

При относительной асимметрии ( $\alpha \geq 0$ ), распределение скошено влево, т.е. более длинная ветвь кривой расположена слева и наоборот – при  $\alpha < 0$  распределение скошено вправо. Знак показателя эксцесса (крутости) ряда распределения характеризует степень сосредоточения частот в центральной части распределения. При  $E > 0$  вершина кривой будет более высокая и острая, т. е. большее число вариантов сосредоточено в центральных разрядах и наоборот, при  $E < 0$  кривая выглядит более плоской.

Для оценки возможности использования нормального распределения, когда  $\alpha$  и  $e \neq 0$ , можно оценить, используя следующие признаки.

Отнесение распределения к нормальному можно оценить с помощью вычисления  $t$ -критерия Стьюдента для  $\alpha$  и  $E$  и сравнения его с табличными значениями этого критерия при некотором числе степеней свободы  $\nu$   $n = N - 1$  (приложение Е). Обычно нормальное распределение применяют, если модуль  $\alpha \leq 0.3$  и  $E \leq 0.4$ . Расчет теоретических частей  $(n_i)$  проводят по формуле

$$(n_i) = \left[ (cN) / (t\sqrt{2\pi}) \right] e^{-\frac{t^2}{2}}$$
, где  $N$  – объем ряда распределения,  $c$  – величина интервала;  $t$  – нормированное отклонение классовых вариантов  $x_i$  от среднего значения  $\bar{X}$ .

Остальные обозначения ( $t$ ,  $\pi$ ,  $e$ ) показаны в формулах 6.1 – 6.2

При расчетах с помощью моментов

$$t = (x_k - m_1) / \bar{t}, \text{ где}$$

$x_k$  – условные отклонения;

$m_1$  – первый начальный момент;

$\bar{t}$  – среднее квадратическое отклонение в единицах интервала:

$$\bar{t} = \sigma i = \sqrt{\mu^2}.$$

Для класса, в котором наблюдается наибольшее количество исследуемых величин, т. е., там, где  $x_i = \bar{x}$ , а  $t = 0$ , теоретическая частота равна

$$n_0 = \left[ (cN / \sigma) \right] * 0.39894 * e^0 = (0.4 * c * N) / \sigma$$

Множитель  $f(t)$  называется функцией нормированного отклонения. Эта функция показывает значение вероятностей распределения величины  $x_i$  в за-

висимости от  $t$ . Значения  $f(t) = 0,39894 * e^{-\frac{t^2}{2}}$  получаем из специальных таблиц (приложение Б). В результате получается следующий рабочий вид уравнения кривой нормального распределения

$$n = [(c * N) * \sigma] * f(t) \text{ или } n = [(N / \bar{\sigma}) * \sigma] * f(t).$$

Пример расчета выравнивающих частот по кривой Гаусса-Лапласа приведен в таблице 6.1. Вычисления  $\bar{X}$ ,  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $E$  и  $m$  сделаны по формулам, приведенным в главе 5 и здесь опущены.

Таблица 6.1 – Вычисление выравнивающих частот кривой нормального распределения для древостоя ольхи черной в возрасте 60 лет

$$\bar{x} = 88.54; \bar{x} = 28.0; \sigma = 2.033; \alpha = -0.07; E = -0.51; m_1 = 0$$

$x_i$ ступени толщины	$n_i$ численности	$x * k$	$\frac{x * k - m}{\sigma}$	$f(x)$	$\tilde{n}_j$	Округление $\tilde{n}_i$
8	2	-5	-2,459	0,0196	1,74	2
12	5	-4	-1,967	0,0570	5,05	5
16	15	-3	-1,476	0,1392	12,32	12
20	22	-2	-0,984	0,2468	21,85	22
24	28	-1	-0,443	0,3530	31,25	31
28	33	0	0	0,3989	35,5	35
32	31	1	0,443	0,3530	31,25	31
36	23	2	0,984	0,2468	21,85	22
40	15	3	1,476	0,1392	12,32	12
44	5	4	1,967	0,0570	5,05	5
48	1	5	2,454	0,0196	1,74	2
ИТОГО ( $\Sigma$ )	180				179,74	180

Графически настоящее распределение показано на рисунке 6.5

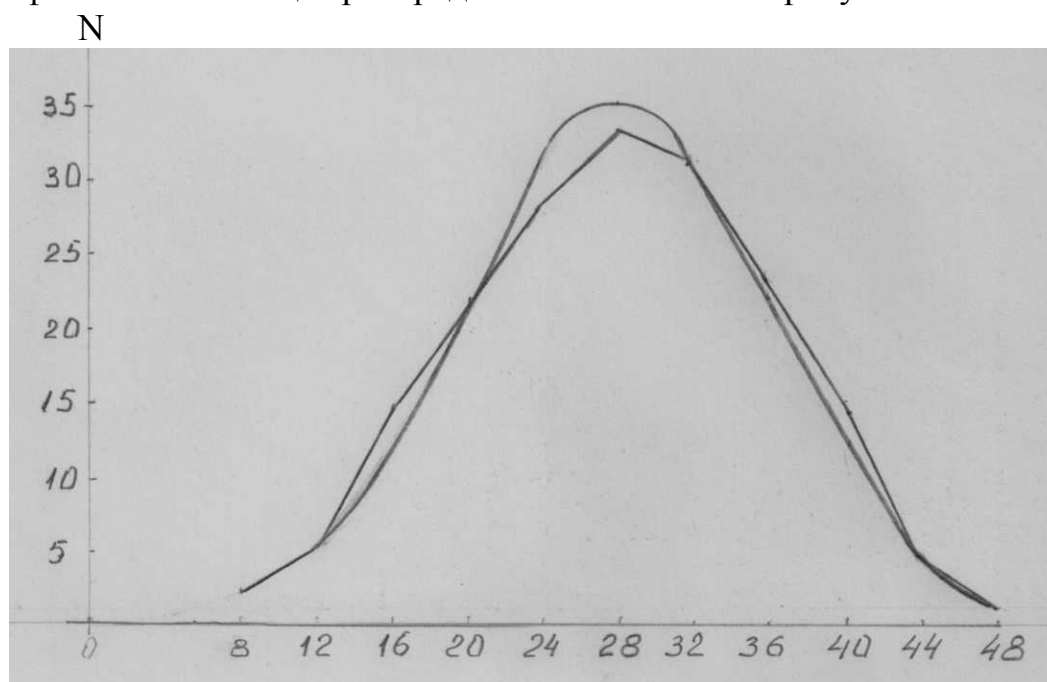


Рисунок 6.5 Экспериментальное и выравненное распределение в древостое ольхи черной

Приведенный в таблице 6.1 ряд распределения характеризуется высокой концентрацией численностей в средних ступенях толщины, о чем свидетельствует значительный отрицательный эксцесс  $E = -0,51$ . Ряд незначительно скошен вправо, т.е. справа от среднего значения насчитывается 75 дерева, а справа только 72, о чем свидетельствует небольшая величина  $\alpha = -0,07$ .

Приведенное распределение характерно для приспевающих и спелых древостоев, которые в незначительной степени затронуты антропогенным влиянием, особенно рубками ухода. Древостои ольхи черной, произрастающие на низинных болотах относятся именно к таким насаждениям.

Для других лесных насаждений характерны скошенные ряды распределения. Биометрические методы изучения их строения, т.е. распределения числа стволов по некоторым таксационным показателям, приводятся ниже.

## 7. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

7.1 Понятие о биномиальном распределении

7.2 Биномиальное распределение как проявление событий с двумя исходами

7.3 Распределение Пуассона как частный случай биномиального распределения

7.4 Вычисление выравнивающих частот биномиального и пуассоновского распределений

### 7.1 Понятие о биномиальном распределении

Нормальное распределение широко распространено в природе. Но вариационные ряды распределения различных биологических и лесоводственных объектов весьма разнообразны и не могут быть описаны только нормальным распределением. Хотя большинству вариационных рядов свойственно большое количество вариантов в середине ряда и уменьшение их по мере удаления от центра, кривые, описывающие это явление, могут быть различными.

Одним из достаточно распространенных видов подобных распределений является биномиальное. Для примера сделаем анализ появления всходов на лесосеке. Допустим, имеется вырубка шириной 100 м, где было 50% сосны и 50% березы, что в лесоводстве записывается в виде формулы состава 5С5Б. Стены леса, окружающие лесосеку имеют такой же породный состав. По вырубке провели плужные борозды, и следующий год появился самосев сосны и березы. Нас интересует какова доля сосны в общем количестве естественного возобновления. Для этого заложили 150 учетных площадок размером 1 × 1 м, на которых учли все всходы сосны и березы. На каждой площадке выразим долю сосны в процентах. Для удобства долю сосны на площади округлим до 10%. Результаты показаны в таблице 7.1.

Распределение вероятностей, показанное в таблице 7.1, описывается биномиальной кривой. Дадим пояснение этому термину. Если вероятности появления самосева сосны на учетных площадках выразить графически, то получим вариационную кривую или полигон распределения вероятностей (рисунок 7.1)

Кривая на рисунке 7.1. носит название биномиальной, так как ее численности соответствуют разложению бинома

$$(a+b)^n \quad (7.1)$$

Таблица 7.1 – Вероятность появления сосны на учетных площадках

Доля всходов сосны в % от обычного количества самосева на учетной площадке ( $x_i$ )		0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	Итого
Количество площадок фактическое (численности) - $n_i$		1	2	7	17	32	38	30	16	6	1	0	150
Выравненное (теоретическое) количество площадок	без округления	0,15	1,46	6,59	17,58	30,76	36,55	30,76	17,58	6,59	1,46	0,15	150
	с округлением	0	1	7	18	31	36	31	18	7	1	0	150
Вероятности	фактические (экспериментальные)	0,007	0,013	0,047	0,113	0,213	0,253	0,200	0,107	0,040	0,007	0	1,0
	теоретические без округления числа площадок	0,001	0,010	0,044	0,118	0,205	0,244	0,205	0,118	0,044	0,010	0,001	1,0
	теоретические с округлением	0	0,007	0,047	0,120	0,207	0,240	0,207	0,120	0,046	0,007	0	1,0

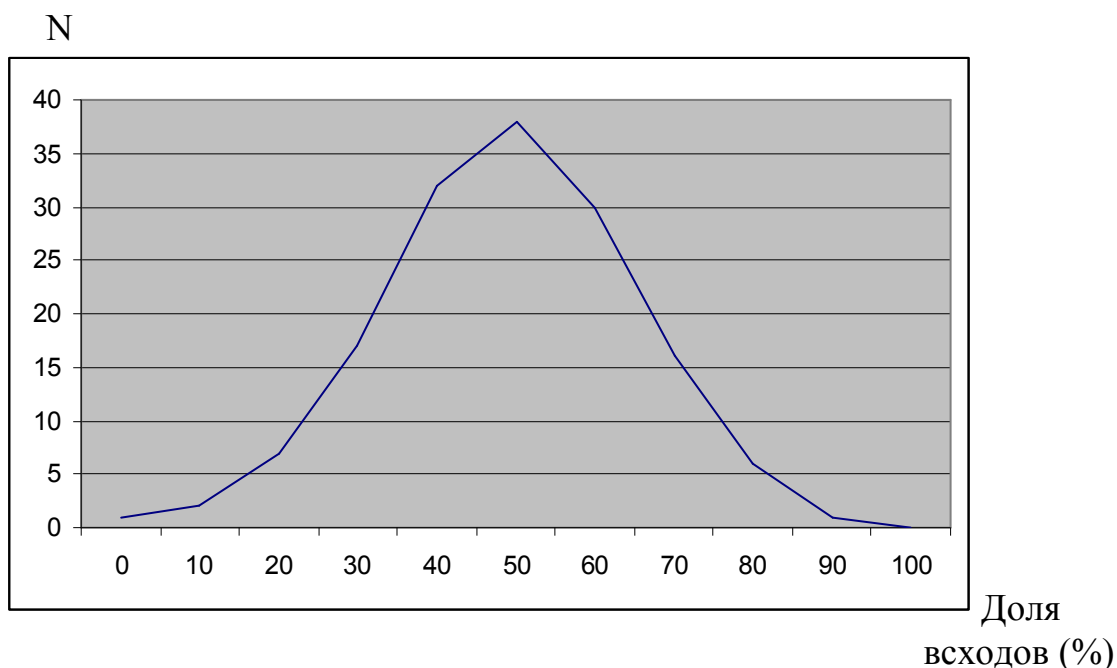


Рисунок 7.1 Полигон распределения вероятностей появления всходов сосны на учетных площадках

Из таблицы 7.1. видно, что для того, чтобы получить вероятностные численности разных результатов при некотором их количестве  $N$ , надо вероятности  $x$  умножить на  $N$ . Сумма вероятностей всегда равна 1. В нашем примере  $N$  – это общее число площадок, т. е. 150. Так как количество вариантов у нас 11, то мы имеем дело с биномом  $(a+b)^{11}$ . Теоретическое и практическое разложение этого выражения излагается ниже.

## 7.2 Биномиальное разложение как проявление событий с двумя входами

Биномиальное распределение обычно применяют, когда необходимо провести исследование событий, которые могут наступить или не наступить.

Сущность биномиальной кривой поясним на следующем примере. Известно, что количество мужчин и женщин примерно одинаково. Здесь мы не рассматриваем аномальные местности, например, в российском городе Иваново, где большинство составляют женщины (вспомним слова известной песни: «...населенье таково – незамужние ткачихи составляют большинство»), а в военных городках – мужчины. Возьмем средний белорусский город, скажем Гомель, где соотношение полов можно считать равным 1:1.

Допустим, мы стоим на улице и считаем проходящих прохожих, подразделяя их по полу. Каждые прошедшие два человека объединим в пары. Эти пары могут иметь следующие варианты: МЖ, ММ, ЖЖ, ЖМ. Вероятность появления мужчины обозначим буквой  $a$ , а женщины –  $b$ . Вероятность прохождения мужчин и женщин одинакова, т. е.  $a = b = \frac{1}{2}$ . Вероятность появления один за одним двух мужчин или двух женщин в соответствии с теорией

вероятности равна  $a \times a = a^2$  или  $b \times b = b^2$ . В нашем случае она равна  $0,5^2 = 0,25$ , т.е. это один случай из 4.

Сочетание появления друг за другом мужчины и женщины равна  $ab + ab = 2ab$ . Таким образом, рассматривая вероятность появления двух равновероятных событий, получаем их следующее распределение.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (7.2)$$

Рассматривая 3,4...n сочетаний различных равновероятных случаев, приходим к выводу, что их вероятности описываются вышеприведенной формулой (7.1), т. е. биномом Ньютона. Отсюда распределение получило название биномиального.

Учитывая, что сегодня в средней школе не изучают бином Ньютона, дадим его подробное описание.

Последний выражается формулой

$$(a + b)^n = a^n C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n, \quad (7.1)$$

где  $C_n^k$  - число сочетаний из n элементов по k.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 * 2 * 3 \dots k} = C_n^{n-k} \quad (7.2)$$

Например, при n=8 и k=5 уравнение (7.2) будет иметь вид

$$C_8^5 = \frac{A_8^5}{P_5} = \frac{8 * 7 * 6 * 5 * 4}{1 * 2 * 3 * 4 * 5} = 56$$

$$C_8^5 = C_8^3 = \frac{8 * 7 * 6}{1 * 2 * 3} = 56$$

После подстановки выражения (7.2) (7.1) получаем рабочую формулу для вычисления разложения бинома Ньютона

$$(a + b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 * 2} a^{n-2} b^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 * 2 * \dots * k} a^{n-k} b^k \dots + n a b^{n-1} + b^n.$$

Например

$$\begin{aligned} (a + b)^5 &= a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5 = \\ &= a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5 \end{aligned}$$

Коэффициенты разложения бинома Ньютона можно получить с помощью треугольника Паскаля. В нем величины любого ряда являются суммой двух цифр, расположенных выше искомого ряда, что видно на рисунке 7.2.



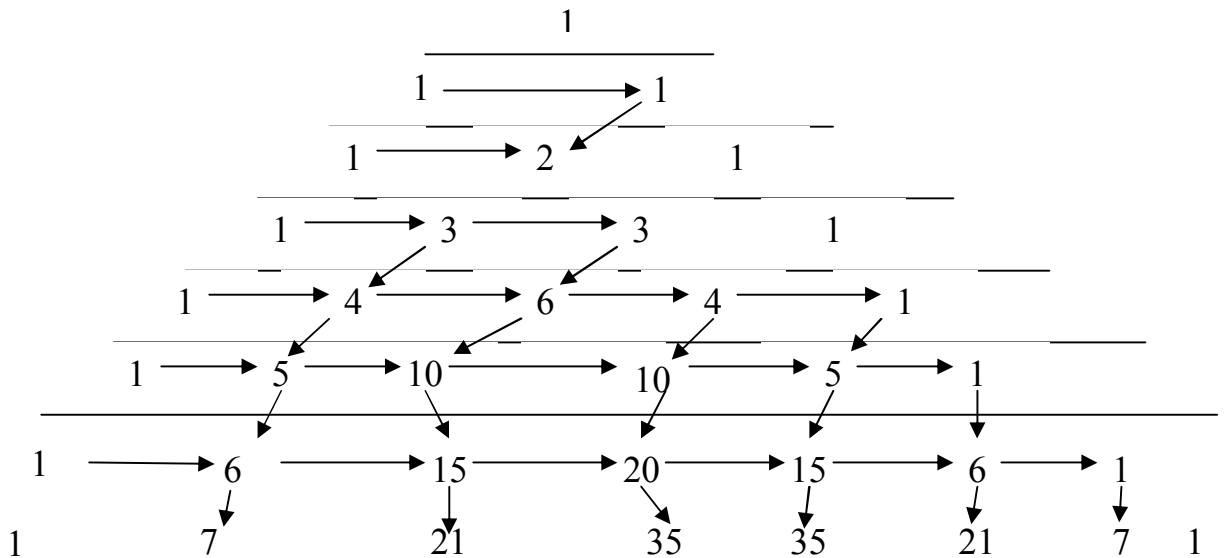


Рисунок 7.2 Треугольник Паскаля

Из школьного курса студентам известны квадрат и куб суммы двух чисел, что является частным случаем общего разложения бинома Ньютона.

Далее разложение продолжается в следующем порядке

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

и т. д.

Кривая на рисунке 7.1. носит название «биномиального распределения», так как соответствует разложению бинома Ньютона. В рассмотренном вариационном ряду, как и при нормальном распределении, которое описано в главе 6, большинство вариантов размещаются вблизи центральной части полигона вероятностей. Биномиальное распределение, как сказано выше, используется для математического описания событий, где имеется вероятность противоположных событий  $a$  и  $b$ .

Рассматривая это распределение с общих позиций теории вероятностей в предположении, что очевидно вероятность появления и отсутствия некоторого события равна  $1,0$ , т. е.  $a+b=1$ . Эта простая схема называется схемой Бернулли. Она описана известным швейцарским математиком Я. Бернулли (1654 – 1705). Опубликована была лишь в 1713 г. Из схемы Бернулли вытекает следующая одноименная теорема: « В условиях схемы Бернулли вероятность  $a_{n,m}$  того, что событие  $F$  появится во всех  $n$  испытаниях равно  $m$  раз, равна коэффициенту при  $t^m$  в разложении бинома  $(at+b)^n$  по степени  $t$

$$a_{n,m} = C_n^m a^m b^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} a^m b^{n-m}, \text{ где}$$

$a=1-b$ ;  $C_n^m$  - число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$ ; ! – знак факториала, т. е.  $a, b, c, \dots, n! = a * b * c * \dots * n!$  например  $5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120$

Теорема верна для  $m=0$  или  $m=n$ .

Доказательство этой теоремы приводится в книге А.К. Митропольского, имеющейся в списке литературы. Оно заключается в следующем.

Если  $m = 0$  ( $m = n$ ), то  $p_{n,0}$  ( $p_{n,n}$ ) есть вероятность того, что событие  $E$  обязательно не появится (появится) в каждом из  $n$  испытаний. Из независимости испытаний эта вероятность по закону сложения вероятностей оказывается равной  $q^n$  ( $p^n$ ), что совпадает с коэффициентом при  $t^0 = 1$  ( $t^n$ ) в разложении бинорма  $(pt + q)^n$  по степеням  $t$ . Отсюда, в частности, следует справедливость теоремы для случая  $n = 1$ , ибо тогда  $m$  может равняться или нулю, или единице, т. е.  $n$ .

Далее применим метод математической индукции. Пусть теорема доказана для схемы  $n - 1$  испытаний. Докажем ее для схемы  $n$  испытаний. При этом на основании предыдущего абзаца достаточно считать, что  $0 < m < n$ .

Пронумеруем испытания числами от 1 до  $n$ . Об испытании, получившем номер  $k$ , будем говорить как о  $k$ -м испытании. Теперь заметим, что появление  $E$  точно  $m$  раз в  $n$  испытаниях равносильно наступлению одного из двух несовместимых событий: либо  $E$  появится точно  $m - 1$  раз в первых  $n - 1$  испытаниях и появится также в  $n$ -м испытании — вероятность этого события будет  $p \cdot p_{n-1, m-1}$  вследствие независимости испытаний, либо  $E$  появится точно  $m$  раз в  $n - 1$  первых испытаниях и не появится в  $n$ -м испытании — вероятность этого события будет  $q \cdot p_{n-1, m}$  по той же независимости испытаний. Несовместимость событий приводит к соотношению:

$$p_{n,m} = p \cdot p_{n-1, m-1} + q \cdot p_{n-1, m}.$$

Согласно же предположению о справедливости теоремы для схемы из  $n-1$  испытаний,

$$p_{n-1, m-1} = \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} p^{m-1} q^{n-m},$$

$$p_{n-1, m} = \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} p^m q^{n-m-1}.$$

Подставив эти выражения в предыдущее соотношение, получим

$$p_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \left( \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n} \right) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m},$$

что и доказывает теорему.

Совокупность чисел  $p_{n,m}$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ) образует распределение вероятностей случайной величины  $X$  — числа появлений события  $E$  во всех  $n$  испытаниях схемы Бернулли. Распределение величины  $X$  называется биномиальным распределением. Основанием для такого названия служит доказанная теорема, т. е. тот факт, что для определения вероятности  $p_{n,m}$  надо разложить бинорм  $(pt+q)^n$  по степеням  $t$  и взять коэффициент при  $t^m$ .

Выше мы рассмотрим случай равновероятных событий, (случайная встреча мужчины или женщины равновероятны) т. е. когда  $a=b=0,5$ . Но при проведении биометрических исследований так случается далеко не всегда. Поэтому надо сделать анализ и других вариантов. При биномиальном распределении  $(a + b)^k$ , (здесь  $a$  и  $b$  вероятности проявления (непроявления) некоторого события или признака,  $k$  – число классов) возможны различные значения  $a$  и  $b$ , например:  $a = 0,6$  и  $b = 0,4$  или  $a = 0,2$  и  $b = 0,8$  и т.д. При этом меняется и форма полигона распределения. По мере увеличения различий между  $a$  и  $b$  полигон становится все более скошенным, асимметричным. Однако по мере увеличения  $N$  даже при значительном различии между  $a$  и  $b$  степень симметрии полигона вновь усиливается.

Как и для других распределений, параметрами для биномиального распределения являются средняя арифметическая ( $\bar{x}$ ) и среднее квадратическое отклонение ( $\sigma$ ), которые можно определить с помощью приведенных выше формул (глава 4) для любого конкретного эмпирического ряда.

Теоретически их значения определяются значениями вероятностей  $a$  и  $b$ , а также значением  $\sum n_i$ , т.е. числа независимых событий, распределение которых изучается.

Средняя арифметическая при биномиальном распределении

$$\bar{x} = k*a \quad (7.6)$$

и среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = k*a*b \quad , \text{ где} \quad (7.7)$$

$k$  – показатель степени бинома;  $k = N-1$ .

Эти формулы дают возможность связать определенные  $\bar{x}$  и  $\sigma$ , вычисленные на основе данного конкретного материала, с вероятностями  $a$  и  $b$ . Сказанное поясним примером.

Пусть на некотором участке был посеян дуб в площадки по 4 шт. (желудя) на площадке. Через 5 лет провели учет выживших сеянцев. Для этого подсчитали количество деревьев на каждой площадке, а всего в учет включили 100 площадок. Результаты показаны в таблице 7.2.

Таблица 7.2 – Распределение сохранившихся сеянцев дуба на 100 площадках

Количество сохранившихся экземпляров дуба, $x_i$	Число площадок с сеянцами, $n_i$	$x_i * n_i$	$x_i^2 * n_i$
0	7	0	0
1	24	24	24
2	37	74	148
3	26	78	234
4	6	24	96
ИТОГО ( $\Sigma$ )	100	200	502

Вычислим  $\bar{X}$  и  $\sigma$  по обычной методике (формулы 4.1 и 5.2)

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{200}{100} = 2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 n_i - \frac{(\sum x_i n_i)^2}{\sum n_i}}{\sum n_i}} = \sqrt{\frac{502 - 400}{100}} = \sqrt{1.02} = 1.01.$$

Поскольку у нас сохранилось 200 семян из 400, то вероятность учета сохранившихся и отпавших экземпляров одинакова, т. е.  $20/400=0,5$ , т. е.  $a=b=0,5$ . Вычислим  $\bar{X}$  и  $\sigma$  по формулам (7.6) и (7.7), где  $k=4$ .

$$\bar{X} = k * a = 4 * 0.5 = 2; \quad \sigma = \sqrt{k * a * b} = \sqrt{4 * 0.5 * 0.5} = \sqrt{1} = 1.$$

Величины  $\bar{X}$  и  $\sigma$ , вычисленных разными способами, почти одинаковы, но полного совпадения нет. Это произошло потому, что ряд в эксперименте (таблица 7.2) несколько скошен. Если его выровнять и получить теоретические величины, то при наличии строго биномиального распределения значения  $\bar{X}$  и  $\sigma$ , вычисленные разными способами, совпадут. Поскольку при проведении исследований никогда нет уверенности, что экспериментальное распределение строго соответствует теоретическому, то надежнее вычислить  $\bar{x}$  и  $\sigma$  непосредственным способом, т. е. по схеме, представленной в таблице 7.2 и в формулах (4.1) и (5.2).

В приведенном примере исходим из того, что  $a = b = 0,5$ , т. е. они будут точно установленные теоретические вероятности. Но возможны и другие значения вероятностей  $a$  и  $b$ . Приведем пример, описанный известным белорусским ученым в области биометрии П.Ф. Рокицким.

Так, например, было получено следующее фактическое распределение самок в 103 пометах с 4 мышками в каждом помете (таблица 7.3).

Таблица 7.3 – Распределение самок в помете мышей

Количество самок	0	1	2	3	4
Число пометов	8	32	34	24	5

$$\text{Тогда } \bar{X} = \frac{8 \cdot 0 + 1 \cdot 32 + 2 \cdot 34 + 3 \cdot 24 + 4 \cdot 5}{103} = 1,864.$$

Но так как  $\bar{X} = kp$ , а  $k=4$ , то  $p = 1,864 / 4 = 0,47$ .

Это вероятность появления самок. Вероятность же появления самцов  $q=0,53$ .

Исходя из формулы  $\sigma^2 = kpq$ , можно вычислить

$$\sigma^2 = 4 \cdot 0,47 \cdot 0,53 = 1,0.$$

Так как данный ряд является рядом разложения бинома  $(0,54+0,47)^4$  при  $n=103$ , то легко вычислить, сколько особей следует ожидать в каждом классе. Получатся следующие цифры для частот каждого класса (таблица 7.4).

Таблица 7.4 – Ожидаемое число самок в помете мышей

Количество самок	0	1	2	3	4
Ожидаемое число пометов	8	29	38	23	5

Уже на глаз видно большое совпадение фактически полученных величин с ожидаемыми.

В общем виде биномиальное распределение описывается формулой Бернулли. Ее доказательство приведено выше, а саму формулу повторим еще раз.

$$P_{m,n} = C_n^m P^m (1-P)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} P^m (1-P)^{n-m} \quad (7.4)$$

Здесь  $P$  - вероятность наступления события при проведении  $n$  независимых испытаний;  $m$  - число наступивших событий;  $C_n^m$  - число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$ .

Формула Бернулли имеет очень важное значение в теории вероятностей, так как она связана с повторением испытаний в одинаковых условиях, где как раз и проявляются законы теории вероятностей.

Обобщая изложенное, приходим к следующему выводу. Альтернативные (т.е. противоположные), дискретно варьирующие признаки распределяются так, что вероятные численности их появления могут быть найдены по формуле бинома Ньютона.

$$N(a+b)^n = N(a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots + b^n), \quad (7.5)$$

где  $n$  - число независимых исходов в одном испытании;

$a$  - вероятность благоприятного исхода одного случая;

$b$  - вероятность неблагоприятного исхода;

$N$  - общее число испытаний (исходов);

Так, при  $n=5$  возможны  $2^5=32$  исхода. При равной вероятности альтернатив, т.е.  $a=b=0,5$  по формуле (7.5) получим следующие числовые величины

$$\begin{aligned}
32(0,5+0,5)^2 &= 32 \left( 0,5^5 + 5 \cdot 0,5^4 \cdot 0,5 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^2}{1 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + 0,5^5 \right) = \\
&= 32 = 32 \cdot (0,03125 + 5 \cdot 0,03125 + 10 \cdot 0,03125 + 10 \cdot 0,03125 + 5 \cdot 0,3125 + 0,3125) = 32 \cdot (0,03125 + 0,15625 + \\
&+ 0,3125 + 0,3125 + 0,03125) = 32 \cdot (0,03125 \cdot 2 + 2 \cdot 0,15625 + 2 \cdot 0,3125) = 32 \cdot (0,06250 + 0,31250 + 0,62500) = \\
&= 32 \cdot 1 = 32
\end{aligned}$$

Откладывая значения числа благоприятных исходов “m” по оси абсцисс, а по оси ординат вероятные численности “n”, получим многоугольник численностей распределения. Ломаная линия, соединяющая точки на графике, называется **кривой распределения**.

Как сказано выше, вероятность события  $u$ , которое проявляется “m” раз в “n” независимых испытаниях описывается формулой Бернулли. Биномиальное распределение определяется двумя параметрами: средней величиной  $\mu = N \cdot a$  и дисперсией  $\sigma^2 = nab$  или среднеквадратическим отклонением  $\sigma = \sqrt{kab}$ . У нас  $\bar{\sigma} = N \cdot a = 5 \cdot 0,5 = 2,5$ ;  $\sigma^2 = 5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 1,25$ .

### 7.3 Распределение Пуассона как частный случай биномиального распределения

В лесохозяйственной науке и практике часто встречаются случаи, когда из двух (или более) наблюдаемых явлений одно встречается редко. Например, естественное возобновление на лесосеке, где вырубленный древостой имеет состав БЗОс1С (60% березы, 30% осины и 10% сосны), идет в основном за счет самосева: семенного для С, Б, Ос и одновременно порослевого у березы и осины. Деревца сосны здесь редки, а к 4-5 годам, если не вести ухода, их практически полностью заглушат береза и осина. Поэтому вероятность встретить через 6-7 лет на такой лесосеке деревья сосны мала.

В условиях радиоактивного загрязнения больших территорий после Чернобыльской катастрофы увеличилось количество разного рода мутаций среди молодых деревьев. Эти мутации выражаются в изменении формы хвои, искривления побегов и т. д. Но их частота (во всех зонах радиоактивного загрязнения в пределах Чернобыльского следа) хотя и зависит от уровня радиоактивности, но по абсолютному значению мала и относится к редким явлениям.

Подобные примеры редких явлений часто встречаются в физике, биологии и других науках. Для описания названных и других подобных распределений обычно применяют распределение Пуассона.

**Распределение Пуассона.** *Распределение Пуассона*, или *пуассоново распределение*, подобно биномиальному, относится к дискретной или прерывистой изменчивости. Оно имеет самостоятельное значение, хотя его можно рассматривать и как предельный случай биномиального. При биномиальном распределении значения  $a$  и  $b$  могут быть близки друг к другу, при пуассоновом же  $a$  очень мало, т.е. события осуществляются очень редко, а  $b$  приближается к единице.

Распределение отдельных редких наблюдений является при этом чаще всего асимметричным, но симметрия возрастает с увеличением  $\bar{X}$ .

При увеличении  $a$  распределение приближается к биномиальному. Пуассоновое распределение характеризуется в сущности только одним параметром - средней арифметической  $\bar{X}$ , так как  $\sigma^2$  в этом случае обычно равна  $\bar{X}$  или близка ей по значению. Именно по этому равенству  $\bar{X}$  и  $\sigma^2$  легче всего определить, что данное распределение является пуассоновым.

Средняя арифметическая для пуассонова распределения равна  $na$ , где  $a$  - вероятность обнаружения данного признака, а  $n$  - количество фактически проведенных наблюдений. Вспомним, что величина  $a$  может быть очень малой.

$$\bar{X} = \lambda = na = \sigma^2 \quad (7.6)$$

В формуле (7.6) среднее значение показано как  $\bar{X}$  и  $\lambda$ , так как большинство исследователей и авторов учебников в распределении Пуассона  $\bar{X}$  обозначают как  $\lambda$ .

Частоты распределения Пуассона представляют собой следующий ряд:

$$\frac{n}{e^\lambda} \text{ (нулевой член); } \frac{n\lambda}{e^\lambda}; \frac{n\lambda^2}{2e^\lambda}; \frac{n\lambda^3}{(2)(3)e^\lambda}; \frac{n\lambda^4}{(2)(3)(4)e^\lambda}; \text{ и т.д.} \quad (7.7)$$

Здесь  $n$  - общее число вариантов,  $e$  - основание натуральных логарифмов (2,71828...) и  $\lambda$  - средняя арифметическая.

Конкретные пуассоновы ряды являются конечными в силу ограниченности количества наблюдений. Но теоретически они могут продолжаться до бесконечности.

Таким образом, в общем виде распределение Пуассона описывается формулой:

$$y = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} * \frac{\lambda}{n^m} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} \quad (7.8)$$

где  $\lambda = np$ ;  $p = \lambda/n$ .

Так как числитель первой дроби имеет  $m$  сомножителей, а в знаменателе стоит  $n^m$  каждый из сомножителей можно разделить на  $n$ . Получим:

$$y = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) * \frac{\lambda^m}{n^m} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} \quad (7.9)$$

При  $n \rightarrow \infty$  предел любой дроби  $(1 - \lambda/n)$  есть 1, а предел  $(1 - \lambda/n)^{n-m} = e^{-\lambda}$ .

$$\text{При этих условиях } y = (\lambda^m / m!) e^{-\lambda}. \quad (7.10)$$

Выражение (7.10) называется функцией распределения вероятностей в распределении Пуассона. В этом выражении  $m$  – частота ожидаемого события в  $n$  испытаниях,  $e=2,7183$ ; параметр  $\lambda = np$  соответствует математическому ожиданию или наивероятнейшей частоте события, т. е.  $\mu$ , а также дисперсии  $\sigma^2$ . Доказательство этого равенства здесь опускаем. Оно содержится во многих книгах по статистике.

#### 7.4 Вычисление выравнивающих частот биномиального и пуассоновского распределений

Вычисления выравнивающих (теоретических) частот биномиального распределения проводят следующим образом.

- находят величину  $k$ , т. е. степень бинома:  $k=N-1$ .
- проводят разложение бинома по формуле Ньютона (формула 7.2). Здесь удобнее воспользоваться вышеприведенным треугольником Паскаля.
- по разложению бинома Ньютона вычисляем ( $i$ ) вероятности для каждого значения  $x_i$ :  $i=N*a*b$ , где  $N$  – объем ряда распределения ( $\sum x_i n_i$ ).
- численности ( $\tilde{n}_i$ ) находим, умножая найденные вероятности для каждого  $x_i$  на  $N$ , т. е.  $\tilde{n} = \sum x_i * n_i * a * b$ .

Рассмотрим вычисление выравнивающих частот на примере (таблица 7.3), взяв исходные данные из таблицы 7.2.

Таблица 7.3 – Вычисление выравнивающих частот биномиального распределения для сохранившихся 5-летних экземпляров в посеве дуба

Количество сохранившихся экземпляров дуба, $x_i$	Число площадок с сеянцами в эксперименте, $n_i$	Вероятности $a*b*k$	$\tilde{n} = \sum n_i * a * b$		$X_i^* \tilde{n}_i$	$x_i^k * \tilde{n}_i$
			без округления	с округлением		
0	7	0.0625	6,25	6	0	0
1	24	0.25	25,0	25	25	25
2	37	0.375	37,5	38	35	152
3	26	0.25	25,0	25	75	225
4	6	0.0625	6,25	6	24	96
$\Sigma$	100	1.0	100	100	200	498

Разложение  $(a+b)^4$  описывается следующим уравнением:

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \quad (7.17)$$

$$0.5^4 + 4*(0.5)^3*0.5 + 6*(0.5)^2(0.5)^2 + 4*0.5*(0.5)^3 + 0.5^4 =$$

$$= 0.0625 + 0.25 + 0.375 + 0.25 + 0.0625 = 1$$



Численности ( $\tilde{n}_i$ ) будут равны произведению вероятностей из (7.17) на  $N(\sum \tilde{n}_i)$ . Из таблицы 7.3 видим, что

$$\bar{X} = \frac{200}{100} = 2; \sigma = \sqrt{\frac{498 - \frac{200^2}{100}}{100}} = \sqrt{0.98} = 0.99 \approx 1.0$$

По формулам (7.6) и (7.7)

$$\bar{X} = 4 * 0.5 = 2.0; \sigma = 4 * 0.5 * 0.5 = 1.0$$

Приведенные расчеты показывают правомерность использования биномиального распределения.

Для вычисления выравнивающих частот распределения Пуассона используют его свойства, т.е.

$$\bar{X} = \sigma = \mu_3 = \lambda.$$

Учитывая, что это распределение редких событий по схеме Бернулли (вероятность 0,1) т.е. это вероятность того, что событие наступит 0,1,...,k раз в серии из N испытаний. При  $\tilde{n} \rightarrow \infty$  вероятность  $p \rightarrow 0$ , то  $np = const = \lambda$ , т.е. единственному параметру  $\lambda$  распределения Пуассона. Это дает возможность вычислять вероятность  $p_m$  распределения Пуассона по составленной таблице значений функции  $p_m = \frac{\lambda^m}{m!} * e^{-\lambda}$  при разных значениях  $\lambda$ , которая приведена в приложении В. Эта таблица дана для значений  $\lambda$  от 0 до 20.

Для больших величин  $\lambda$  соответствующая таблица приведена в книге А.К. Митропольского В силу того, что в лесном хозяйстве большие величины  $\lambda$  встречаются редко, мы эту таблицу опускаем.

Приведем пример вычисления выравнивающих частот при распределении Пуассона, который описан К. Е. Никитиным и А. З. Швиденко (таблица 7.4).

Вычислим выравнивающие частоты для ряда распределения числа деревьев на пробных площадях размером 0,002 га. Статистики для этого ряда  $\bar{X} = 1,508$ ,  $\hat{\mu}_2 = 1,5189$ ,  $\hat{\mu}_3 = 1,5434$ , что предполагает близость эмпирического распределения закону Пуассона. Такой же вывод следует и из логики рассматриваемого явления. Для вычисления выравнивающих частот вероятности  $f(k)$ , полученные по формуле

$$f(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = \frac{(np)^k \cdot e^{-np}}{k!}, \quad (7.18)$$

следует умножить на объем ряда распределения  $n=224$ . В (7.18) положим  $a=1,508$ . Заметим, что  $0!=1$ , а  $\lg k!$  вычисляются непосредственно или по таблицам логарифмов факториалов. Для вычисления по схеме таблицы 7.4 формулу (7.18) предварительно логарифмируют, т.е.  $\lg f(k) = k \lg a - a \lg e - \lg k! = 0,0178k - 0,6549 - \lg k!$ . В целом модель хорошо отражает эмпирический ряд.

Следующие вычисления численностей по распределению Пуассона покажем на примере учета всходов сосны на вырубке. Для этого заложили учетные площадки площадью по  $10 \text{ м}^2 (5 \times 2)$ .

Таблица 7.4 – схема вычисления выравнивающих частот распределения Пуассона (на примере ряда распределения числа деревьев на пробных площадях)

$k_i$	$n_i$	$0,178 k_i$	$k_i!$	$-\lg k_i!$	$\lg f(k) = -0,6549 + (3)+(5)$	$f(k)$	$\tilde{n}_i$
1	2	3	4	5	6	7	8
0	50	0	1	0	1,345	0,221	50
1	74	0,1780	1	0	1,523	0,333	75
2	57	0,3562	2	-0,3010	1,400	0,251	56
3	27	0,5343	6	-0,7782	1,101	0,126	28
4	12	0,7123	24	-1,3802	2,577	0,048	11
5	3	0,8905	120	-2,0792	2,156	0,014	3
6	1	1,0686	720	-2,8573	3,557	0,004	1
$\Sigma$	224	-	-	-	-	-	224

Всего заложено 8 площадок. Результаты расчетов показаны в таблице 7.5. При этом для расчетов использованы следующие формулы.

$$\tilde{n} = \left[ \frac{\bar{X}^{-m}}{m! e^{-\bar{X}}} \right] N$$

$$y = \left( \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \right), \text{ где}$$

$\bar{X}, \lambda$  - среднее значение;

$N$  - объем ряда распределения;

$m$  - варианты;

$e - 2,71$

Таблица 7. 5 – Вычисление выравнивающих частот по кривой Пуассона

$m$	$n_i$	$mn_i$	$y(m)$	$\tilde{n}$ без округ.	$\tilde{n}$ округ.	$n_i \%$	$\tilde{n} \%$	$\bar{X} - n_i$	$(\bar{X} - m_i)^2$	$(\bar{X} + m_i)^2 \cdot n_i$	$(\bar{X} + m_k)^{2N} \cdot n_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	549	0	0,3329	384	385	47,5	33,3	1,1	1,21	664,2	465,9
1	271	271	0,3662	422,96	423	23,5	36,6	0,1	0,01	2,7	4,2
2	137	274	0,2014	232,62	233	11,9	20,2	-0,9	0,81	111,0	188,7
3	110	330	0,0738	85,24	25	9,5	7,4	-1,9	3,61	397,1	306,8
4	56	224	0,0203	23,45	23	4,8	2,0	-2,4	8,41	470,0	193,5
5	22	110	0,0045	5,20	5	1,9	0,4	-3,9	15,27	335,9	76,4
6	9	54	0,0008	0,92	1	0,8	0,1	-4,9	24,01	216,1	24,0
7	1	7	0,0001	0,11	0	0,1	0	-5,9	34,81	34,8	0
$\Sigma$	1155	1270	1,0000	1158	1155	100,0	100	-	88,14	2231,8	1259,6

Значения функции Пуассона со средним значением ( $\bar{X}$  или  $\lambda$ ) и показателем степени  $m$ , как показано выше, выписывается из специальной таблицы (приложение В).

Графы 9–12 введены в таблице 7.5 для вычисления  $\sigma$ . Ее близость к  $\bar{X}(\lambda)$  показывает, что распределение описывается уравнением Пуассона. Тогда для эмпирического распределения

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{(\bar{X} - m_i)^2 n_i}{N}} = \sqrt{\frac{2232}{1155}} = \sqrt{1,93} = 1,39$$

Для теоретического распределения

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1260}{1155}} = \sqrt{1,10} = 1,05$$

Близость  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  к  $\bar{X}$  показывает правомерность использования для выравнивания распределения Пуассона.

Для практических расчетов, когда находят теоретические ординаты распределения  $\tilde{n}$ , т. е. численности распределения случайного события  $X$ , выражение (7.10) умножают на  $N$  – общее число наблюдений, вместо  $n_i$  принимают экспериментальное среднее число наблюдаемых случаев. Формула для  $n$  будет:

$$\tilde{n} = \left[ \frac{\bar{x}^m}{m!} e^{-\bar{x}} \right] N$$

Распределение Пуассона с возрастанием средней  $\lambda$  приближается к биномиальному.

Распределение Пуассона описывает многие явления в технике и биологии. В технике оно находит широкое применение при контроле качества продукции, для аппроксимации распределения дефектных изделий. В лесном хозяйстве его применяют как модель распределения числа примесей в пробных навесках при анализе семян, допустим, сосны, при рассмотрении плодов, скажем, желудей, поврежденных вредителем. Им же описывают распределение численности возобновления, когда размер элементарных учетных площадок очень мал или условия заселения площади неблагоприятны, так что вероятность благоприятного исхода  $p$  мала.

В лесном хозяйстве к распределению Пуассона прибегают, когда исследуют мутации при проведении генетико-селекционных исследований, при анализе появления альбиносов среди лесных зверей и птиц, для оценки выживаемости самосева сосны под пологом леса и т.д., при анализе других редких событий.

## **8. ДРУГИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. СИСТЕМА КРИВЫХ ПИРСОНА И ДЖОНСОНА**

- 8.1. Распределение типа А или Грама-Шарлье
- 8.2. Другие распределения
- 8.3. Система кривых Джонсона
- 8.4. Система кривых Пирсона

### **8.1 Распределение типа А или Грама-Шарлье**

Система кривых распределения далеко не исчерпывается нормальным и биномиальным распределениями. Видов распределений много, и некоторые, наиболее часто встречающиеся, мы здесь рассмотрим.

Еще в XIX веке немецкими лесоводами и таксаторами (Вейзе и др.), а затем и в России (А.В. Тюрин (1882-1979) и др.) было доказано, что распределение числа деревьев в древостое по таксационным показателям соответствует закону нормального распределения. Но более глубокие исследования, проведенные во второй половине XX века, показали, что это не совсем так. Реальная кривая похожа на кривую нормального распределения, но чаще всего бывает скошенной вправо или влево, более плоской или более остроконечной. Оказалось, что кривой Гаусса-Лапласа соответствуют, да и то не всегда, древостои естественного происхождения, растущие без вмешательства человека и имеющие возраст, близкий к спелому (для сосны это 80 лет и старше). В большинстве случаев кривая, которой хорошо моделируются распределения деревьев в лесах Беларуси, лишь близка к нормальному распределению. Называется она кривой обобщенного нормального распределения или кривая типа А. Ее еще называют кривой Грама-Шарлье, иногда просто кривой Шарлье.

В том случае, когда статистики распределения  $\alpha$  и  $E$  или один из них оказались значимыми, или когда при интервальной оценке параметров  $\alpha$  и  $E$  интервал перекрывает нуль, выравнивающие частоты бывает целесообразно рассчитать именно по уравнению обобщенного нормального распределения. Это распределение является разложением в ряд уравнения кривой нормального распределения. Оно учитывает имеющиеся асимметрию и эксцесс. Выравнивание по этому уравнению, как показали многочисленные исследования, дает лучшую аппроксимацию экспериментального ряда числа стволов по диаметру и высоте в антропогенных лесах, чем нормальное распределение. Последнему отдают предпочтение лишь в тех случаях, когда  $\alpha < t_{0,05}$  и  $E < t_{0,05}$ . Исходят при этом из положения, что при недоказанном отклонении распределения от нормального, надежнее считать это распределение следующим модели нормального распределения, а найденные показатели  $\alpha$  и  $E$  относить за счет случайного состава выборочной совокупности.

Теоретические частоты кривой типа А вычисляют по формуле

$$\tilde{n} = \left[ f(x) - \frac{r_3}{6} f^3(x) + \frac{r_4 - 3}{24} f^4(x) - \frac{r_5 - 10r_3}{120} f^5(x) + \frac{r_6 - 15r_4 + 30}{720} f^6(x) - \dots \right] \frac{N}{\sigma'} \quad (8.1)$$

где  $f(x)$  - значения функции нормальной кривой при  $N/\sigma' = 1$ ,  $f^3(x)$ ,  $f^4(x)$ ,  $f^5(x)$ ,  $f^6(x)$  - 3, 4, 5, 6-я производные функции  $f(x)$ ;  $r_3$  (асимметрия),  $r_4$  ( $r_4 - 3$  - эксцесс),  $r_5$ ,  $r_6 \dots$  - основные моменты;  $N$  - общая численность вариант ряда;  $\sigma^2$  - основное отклонение в единицах интервала,  $\sigma^2 = \mu_2$ .

Из формулы 8.1 мы видим, что распределение Грамма-Шарлье описывается бесконечным рядом, использующим функцию нормального распределения и ее производные. В практике достаточно ограничиться тремя первыми членами разложения. Увеличение числа членов обычно не улучшает (может и ухудшить) аппроксимацию эмпирического распределения. Применение распределения Грамма-Шарлье требует знания четырех параметров:  $\bar{x}$ ,  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $E$ . Вспомним, что для вычисления кривой нормального распределения достаточно двух параметров ( $\bar{X}$ ,  $\sigma$ ), а биномиального и пуассоновского - одного,  $\lambda$ .

При выборе в качестве аппроксимирующей кривой уравнения типа А следует помнить, что близость этой кривой к нормальному распределению накладывает достаточно жесткие ограничения на величины  $\alpha$  и  $E$ . Они не должны быть слишком велики, например,  $\alpha$  не должна превышать величины 0,5 - 0,7, а  $E$  - 0,6 - 0,8.

Приведем пример расчета кривой типа А. Для этого возьмем ряд распределения числа стволов по диаметру на высоте 1,3 м в сосновом насаждении I<sup>кв</sup> класса бонитета в возрасте 50 лет, где проведены рубка ухода и древостой имеет полноту 0,7. Пользуясь формулами, приведенными выше, предварительно сделаем расчеты необходимых параметров кривой (таблица 8.1).

Для вычисления частот кривой типа А требуется знать  $\bar{x}$ ,  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $E$ .

Таблица 8.1 - Вычисление показателей для определения статистик ряда распределения числа стволов по диаметру в древостое сосны I класса бонитета в возрасте 50 лет

Ступени толщины $x_i$	Число стволов $n_i$	$x_k$	$x_k n_i$	$x_k^2 n_i$	$x_k^3 n_i$	$x_k^4 n_i$	$x_{k+1}$	$(x_{k+1})^4 n_i$	$x_i n_i$	$x_i - x$	$(x_i - x)^2$	$(x_i - x^2) n_i$
8	2	-4	-8	32	-128	512	-3	162	16	-17	289	578
12	10	-3	-30	90	-270	810	-2	160	120	-13	169	1690
16	22	-2	-44	88	-176	352	-1	22	352	-9	81	1782
20	43	-1	-43	43	-43	143	0	0	860	-5	25	1075
24(M')	39	0	0	0	0	0	1	39	936	-1	1	39
28	32	1	32	32	32	32	2	512	896	3	9	288
32	24	2	48	96	192	384	3	1944	768	7	49	1176
36	18	3	54	162	486	1458	4	4608	648	11	121	2178
40	9	4	36	144	576	2304	5	5625	360	15	215	2025
44	1	5	5	25	125	625	6	1296	44	19	136	361
Итого ( $\Sigma$ )	200	-	50	712	794	6520	-	14368	5000	-	-	1192

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{5000}{200} = 25; \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum n_i}} = \sqrt{\frac{11192}{200}} = \sqrt{55,96} = 7,481$$

$$m_1 = \frac{\sum x_k n_i}{\sum n_i} = \frac{50}{200} = 0,25; \quad m_2 = \frac{\sum x_k^2 n_i}{\sum n_i} = \frac{712}{200} = 3,55.$$

$$m_3 = \frac{\sum x_k^3 n_i}{\sum n_i} = \frac{794}{200} = 3,97; \quad m_4 = \frac{\sum x_k^4 n_i}{\sum n_i} = \frac{6520}{200} = 32,6.$$

Проверка:  $\frac{\sum (x_{k+1})^4 n_i}{\sum n_i} = m_4 + 4m_3 + 6m_2 + 4m_1 + 1,0 = \frac{14368}{20} =$

$$32,6 - 4 \cdot 3,97 + 6 \cdot 3,55 + 4 \cdot 0,25 + 1,0;$$

$$71,84 = 32,6 + 15,88 + 21,36 + 2;$$

$$71,84 = 71,84.$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = 3,56 - 0,0625 = 3,4975.$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 = 3,97 - 3 \cdot 3,56 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,015625 =$$

$$3,97 - 2,67 + 0,03125 = 1,33125.$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4 =$$

$$32,6 - 4 \cdot 3,97 \cdot 0,25 + 6 \cdot 3,56 \cdot 0,0625 - 3 \cdot 0,00390625 =$$

$$32,6 - 3,97 + 1,335 - 0,0234375 = 29,941563.$$

Проверка:  $\mu_3 = m_3 - 3\mu_2m_1 - m_1^3 = 3,97 - 3 \cdot 3,4975 \cdot 0,25 - 0,015625 =$

$$3,97 - 2,623125 - 0,015625 = 1,33125.$$

$$\mu_4 = m_4 - 4\mu_3m_1 - 6\mu_2m_1^2 - m_1^4 =$$

$$32,6 - 4 \cdot 1,33125 \cdot 0,25 + 6 \cdot 3,4975 \cdot 0,0625 - 4 \cdot 0,00390625 =$$

$$32,6 - 1,33125 - 1,3115625 - 0,015625 = 29,9415.$$

$$\bar{X} = \mu' + 4 \cdot m_1 = 24 + 4 \cdot 0,25 = 25.$$

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{3,4975} = 1,87; \quad \bar{\sigma} = 4 \cdot 1,87 = 7,481$$

$$r(\alpha) = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{1,33125}{6,54089} = 0,2035 \approx 0,203 = \alpha$$

$$r_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{29,94159}{12,2325} = 2,448 \approx 2,45$$

$$E = r_4 - 3 = -0,55.$$

Проведя вышеприведенные вычисления, получили  $\bar{X}=25,0$ ;  $\bar{\sigma}=7,48$ ;  $\sigma=1,87$ ;  $\alpha=0,20$ ;  $E = -0,55$ ;  $m_1=0,25$ . Значения  $\alpha$  и  $E$  показывают на значительные отличия ряда распределения от нормального, т. к. требования к «нормальности»  $\alpha=E=0$  (во всяком случае  $\alpha < 0,05$ ;  $E < 0,05$ ), недопустимы для использования кривой типа А. Схема вычисления выравнивающих частот с использованием кривой типа А показана в таблице 8.2.

Таблица 8.2 – Вычисление частот распределения типа А (Грамма-Шарлье) для ряда распределения числа стволов по диаметру в древостое сосны в возрасте 50 лет

Параметры для вычисления

$$\bar{x}=25,0; \sigma=1,8701; \bar{\sigma}=7,4086; \alpha = 0,203; E = -0,55; m_1=0,25$$

Ступени толщины, $x_i$	Число стволов	$x_k$	$x_k - m$	$\frac{x_k - m}{\sigma}$	$f(x)$	$f^3(x)$	$f^4(x)$	$-\frac{\alpha}{6} f^3(x) = -0,0338 * f^3(x) = k_1$	$\frac{E}{24} f^4(x) = -0,02298 * f^4(x) = k_2$	$\sum f(x) k_1 k_2 = k_3$	$\frac{\sum n_i}{\sigma} \div k_3 = 106,952 * k_3 = \tilde{n}$	$\tilde{n}$ округление
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
8	2	-4	-4,25	-2,27253	0,0302	+0,14582	-0,3971	-0,00493	-0,00091	0,02336	2,4	2
12	10	-3	-3,25	-1,73782	0,0881	+0,00316	-0,52857	-0,00011	-0,0121	0,07588	8,1	8
16	22	-2	-2,25	-1,20311	0,1935	+0,36143	-0,69435	+0,01223	-0,01591	0,18982	20,3	20
20	43	-1	-1,25	-0,66839	0,3192	-0,54445	0,16653	+0,01842	+0,00382	0,34124	36,5	36
24= $m^1$	39	0	-0,25	-0,13368	0,3955	-0,15799	1,14360	+0,00534	+0,02621	0,42705	45,6	46
28	32	1	0,75	0,40104	0,3681	+0,41905	0,75870	+0,01418	+0,01739	0,37131	39,7	40
32	24	2	1,75	0,93575	0,2577	0,51175	-0,38329	+0,01297	-0,00785	0,26282	28,1	28
36	18	3	2,75	1,47046	0,1355	0,16670	-0,71696	-0,00564	-0,01643	0,11343	12,1	12
40	9	4	3,75	2,00518	0,0539	+0,00485	0,26498	+0,00016	+0,00607	0,06013	6,4	6
44	1	5	4,75	2,53990	0,0157	-0,13900	0,09370	+0,00470	+0,00245	0,02255	2,4	2
ИТОГО ( $\Sigma$ )	200	-	-			+0,035	0,06	-	-	-	201,6	200

В 1-й столбец таблицы 8.2. вписаны классовые варианты  $X$ , в 3-й – их условные значения  $x_k$ , выраженные в долях интервала,  $x_k=(X-M')/k$ ; во 2-м столбце записаны частоты ряда; в 4-м столбце – разности между условными значениями вариант и первым начальным моментом ряда, т. е. значения  $x_k - m_1$ , в 5-м – значения аргумента  $x$ , т. е. частное от разностей  $(x_k - m_1)$  на основное отклонение не именованное  $\sigma$ . В 6, 7 и 8-м столбцах записывают значения функции  $f(\tau)$  и ее производных. Величину этих функций берут из специальных таблиц, приведенных в приложении Г.

Значение  $f^3(x)$  дается для положительных значений  $x$ . При отрицательных значениях  $x$  знак, указанный в таблицах, нужно изменить на обратный. Для  $f(x)$  и  $f^4(x)$  знаки остаются без изменения, т.е. теми же, что и в таблицах, независимо от знака при  $x$ .

В 9-й столбец записывают значения  $\alpha/6 f^3(t)$ , в 10-й – значения  $(E/24) f^4(\tau)$ . Данные 11-го столбца представляют алгебраическую сумму цифр 6, 9 и 10-го столбцов. В 12-м столбце помещены выровненные частоты, полученные путем умножения данных 11-го столбца на  $N/\sigma$  (без округления), а 13-м столбце – округленные величины теоретических частот с округлением. Графически выравнивание распределения числа стволов по диаметру из нашего примера показано на рисунке 8.1.

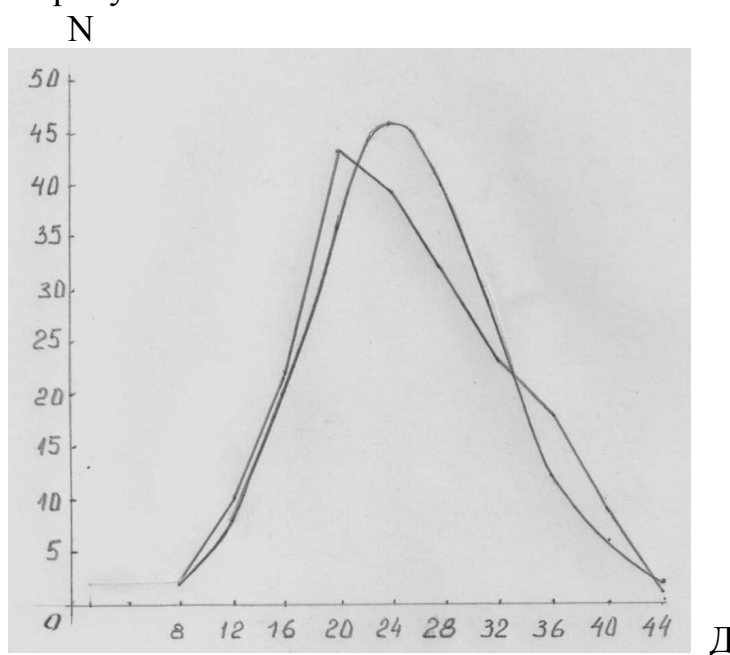


Рисунок 8.1 Распределение числа стволов сосны по диаметру, выровненное с помощью кривой типа А

Правильность расчетов теоретических частот ряда проверяют сравнением общей их суммы с суммой фактических частот. Видно, что экспериментальная кривая согласуется с моделью (8.1), т.к.  $N$  в обоих случаях равно 200.

Распределение Грама-Шарлье широко применяется в лесоводственных исследованиях. Наиболее часто его используют, изучая древостои, где имеет-



ся значительное антропогенное воздействие, особенно рубки промежуточного пользования. В этом случае нарушаются требования предельной теоремы Ляпунова о том, чтобы воздействие каждого фактора было относительно мало и примерно соотносимо с другими.

Рубки промежуточного пользования могут существенно изменить характер распределения деревьев в древостое. В то же время при их правильном проведении в чистых насаждениях сохраняется одновершинность кривой и ее соответствия обобщенному нормальному распределению, т.е. распределение из нормального трансформируется в тот его вид, который описывается кривой типа А. Это основная причина того, что названную кривую широко применяли для описания реальных распределений многие ученые-лесоводы: А.Патацкас, К.Е. Никитин (1908-1987), Н.Н. Свалов (1918-1995), Л.Н. Толкачев (1938-2008). Кривая типа А взята за модель распределения В.Ф. Багинским при описании строения древостоев Беларуси, на основе которого составлены действующие товарные таблицы для насаждений сосны, ели, дуба, березы, осины и ольхи черной.

## 8.2 Другие распределения

В лесных исследованиях используется ряд других распределений. Поскольку настоящее учебное пособие предназначено также для магистрантов и аспирантов, то целесообразно привести описание этих распределений. Для студентов-лесоводов при изучении основного курса биометрии можно ограничиться распределением Грама-Шерлье, но в ряде случаев, особенно при выполнении НИИРС нужно обращаться к другим видам распределений.

Сводку распределений, которые находят применение в лесном хозяйстве, сделали К.Е. Никитин и А.З. Швиденко в капитальном труде «Методы и техника обработки лесоводственной информации», которая приведена в списке литературы. Поскольку книга вышла более 30 лет назад и уже стала библиографической редкостью, приведем здесь материалы о других распределениях в том виде как они изложены в упомянутой монографии.

Сводка основных распределений, используемых в лесном хозяйстве, приведена в таблице 8.3.

Опишем основные из приведенных распределений.

**Логнормальное распределение.** Логнормальное распределение формируется в условиях, подобных тем, где применяется кривая типа А. Величина  $x$  распределена логнормально, если логарифмы её значений  $U = \bar{l}$ ,  $n$ ,  $x$  имеют нормальное распределение. Теоретически это распределение можно рассматривать как распределение величины, полученной умножением примерно одинаковых случайных величин при большом их числе, и в этом смысле оно является некоторым аналогом нормального закона.

Это распределение случайной величины  $x_i$  зависит от двух параметров (среднего и дисперсии логарифмов значений с. в.  $X$ ), хотя можно ввести один

или два параметра, ограничивающие размах распределения с одной или двух сторон.

Таблица 8.3 – Основные непрерывные распределения, используемые в лесном деле

Формула	Распределение	Плотности распределения	Среднее значение	Дисперсия
8.0	Нормальное	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right]$	$\bar{x}$	$\sigma^2$
8.1	Грамм-Шарлье («обобщенное нормальное»)	$f(x) - \frac{r_3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{r_4 - 3}{24} f^{(4)}(x) - \dots$ $f(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x)$ - плотность нормального распределения и её 3 и 4-я производные	$\bar{x}$	$\sigma^2$
8.6	Логарифмически-нормальное	$\frac{1}{\sigma_u \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x_i - \bar{u})^2}{2\sigma_u^2}\right]$ , где $\sigma_u^2$ - дисперсия $\ln x$ ; $u$ - среднее ( $\ln \bar{X}$ ), $\bar{X} \geq 0$	$\bar{u}$	$\sigma_u^2$
8.11	Показательное (экспоненциальное)	$\lambda t \exp(-\lambda x)$ при $x \geq 0$ 0 при $x < 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
8.12	Вейбулла	$abx^{a-1} e^{-bx^a}$	$b^{-1/a} \zeta\left(\frac{1}{a} + 1\right)$	$b^{-2/a} \left[ \zeta\left(\frac{a}{2} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{a} + 1\right) \right]$
8.13	Равномерное (прямоугольное)	$(b-a)^{-1}$ при $a \leq x \leq b$ 0 при $x < a$ . $x > b$	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
8.14	Гамма-распределение (III тип Пирсона)	$\frac{a^b x^{b-1} e^{-ax}}{\Gamma(b)}$ ; $x \geq 0$ $a > 0, b > 0$	$\frac{b}{a}$	$\frac{b}{a^2}$
8.15	Бета-распределение (I тип Пирсона)	$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$	$\frac{ab}{(a+b)_2(a+b+1)}$	$\frac{2(b-a)(a+b+1)^{1/2}}{(ab)^{1/2}(a+b+2)}$

Кривая распределения имеет правостороннюю асимметрию, которая возрастает с увеличением  $\sigma_u$  (рисунок 8.2.), поэтому хорошо аппроксимирует распределения с положительной косостью.

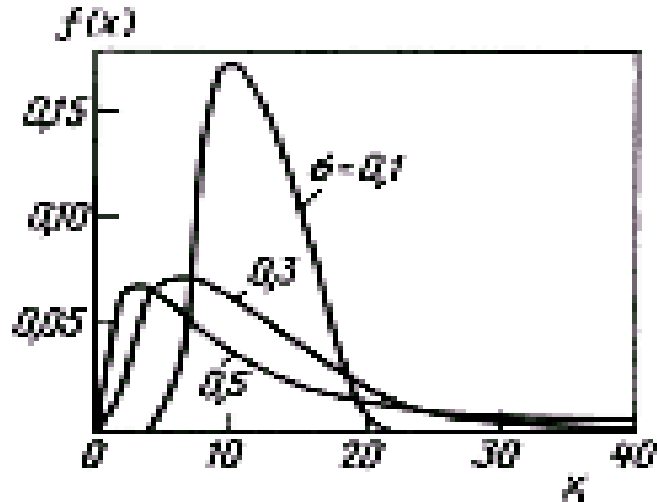


Рисунок 8.2 Кривые логнормального распределения с различными параметрами  $\sigma_u$

Если для величин  $x_i$  известно среднее  $\bar{X}$  и дисперсия  $\sigma_x^2$ , то параметры логнормального распределения можно вычислить непосредственно по формулам

$$\sigma_u^2 = \ln[\sigma_x^2 / \bar{X}^2 + 1], \quad (8.7)$$

$$\bar{U} = \ln \bar{X} - \frac{\sigma_u^2}{2} = \ln \bar{X} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_x^2}{\bar{X}^2} + 1 \right], \quad (8.8)$$

а плотность логнормального распределения величины  $x$

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi \ln(\sigma^2 / \bar{X}^2 + 1)}} \times \exp \left\{ -\frac{\ln x - \ln \bar{X} + \frac{1}{2}(\sigma^2 / \bar{X}^2 + 1)}{2 \ln(\sigma^2 / \bar{X}^2 + 1)} \right\}, \quad (8.9)$$

Уравнение задано на интервале  $[0, \infty]$ . Если кривая распределения ограничена слева точкой  $x_1$ , то имеем трехпараметрическое логнормальное распределение.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_u(x-x_1)\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_u^2} |\ln(x-x_1) - \bar{u}| \right\}, \quad (8.10)$$

которое заменой  $x' = x - x_1$  приводится к (8.6).

Имеются многочисленные примеры использования логнормального распределения как модели при свертке лесоводственной информации.

Пример. Вычислим выравнивающие частоты для ряда распределения числа стволов по диаметру в древостое ели (таблица 8.4) по уравнению логнормального распределения (8.6). Среднее значение и дисперсия этого ряда соответственно равны  $\bar{X} = 18,36$  (см),  $\sigma^2 = 5,85$  (см). Если бы эти показатели были неизвестны, то в таблице 8.4. следовало бы добавить 3 колонки для отклонений от  $x_0$  и вычисления первых двух моментов. По (8.7) и (8.8) находим

$\sigma_u^2 = 0,311$ ,  $\bar{U} = 2,862$ . Дальнейшая схема вычислений полностью соответствует схеме таблицы 8.4.

Таблица 8.4 – Схема вычисления выравнивающих частот с применением логнормального распределения для диаметров древостоя ели (таблицы 8.2 – 8.3)

$x_i$	$n_i$	$b = x_i + \frac{c}{2}$	$\ln b$	$\ln b - \bar{n}$ , где $n = \ln \bar{X}$	$z = \frac{\ln b - \bar{n}}{\sigma_u}$	$\Phi/z$	$n\Phi/z$	$\tilde{n}_i$
8	11	10	2,3026	-0,559	-1,80	0,036	20	20
12	18	14	2,6391	-0,223	-0,72	0,236	132	112
16	181	18	2,8904	+0,029	+0,09	0,536	209	167
20	124	22	3,0910	0,229	0,74	0,770	430	130
24	67	26	3,2581	0,396	1,27	0,898	501	72
28	31	30	3,4012	0,539	1,73	0,958	535	34
32	17	34	3,5264	0,665	2,14	0,984	549	15
36	5	38	3,6376	0,776	2,49	0,994	555	5
40	3	42	3,7377	0,876	2,82	0,998	557	2
44	1	46	3,8286	0,967	3,11	1,000	558	1
$\Sigma$	558	-	-	-	-	-	-	558

Сравнение эмпирических и вычисленных частот свидетельствует о хорошем соответствии принятой модели ряду распределений.

Логнормальное распределение использовано для выравнивания рядов распределения диаметров литовскими учеными-лесоводами: В. В. Антанайтисом, А. А. Кулешисом, Ю. Ф. Можейкой и др.

**Распределение Вейбулла.** Распределение Вейбулла (формула (8.12), таблица 8.5) обычно применяют как модель распределения времени ожидания, например, времени работы системы, состоящей из совокупности последовательно соединенных элементов, т.е. распределение времени работы до выхода из строя первого элемента. Его можно рассматривать как обобщение показательного распределения, если интенсивность отказов меняется во времени. Параметр  $\alpha$  характеризует скорость выхода системы из строя. Это распределение хорошо описывает время выхода из строя отремонтированного оборудования, срок работы машин, тракторов и т.д.; его можно использовать как модели распределения крайних (экстремальных) значений или распределения биометрических характеристик деревьев, в частности диаметра. Более подробное описание этого распределения здесь опускаем. Оно приведено в книге К.Е. Никитина и А.З. Швиденко, имеющейся в предложенном списке литературы.

**Гамма- и бета- распределения.** Гамма- и бета- распределения принадлежат к числу основных моделей, используемых при изучении распределений. Оба они связаны с одним из наиболее общих распределений – распределением Маркова, из которого можно получить практически все встречаемые

в приложениях распределения как предельные стохастические кривые. Условия, при которых формируются гамма- и бета – распределения, весьма широки в зависимости от величины входящих в них параметров. Как правило, они могут описывать любую практическую ситуацию из приведенных в настоящем параграфе, а ряд рассмотренных распределений может быть получен как частные случаи гамма- и бета- распределений.

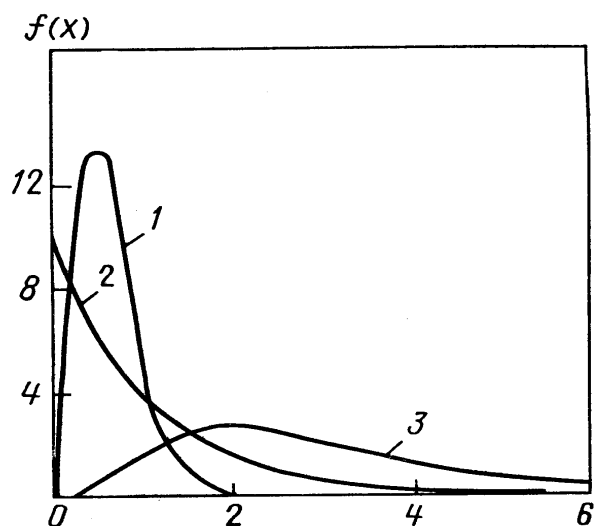


Рисунок 8.3 Кривые гамма-распределения:  
 1- $\alpha=5$ ;  $b=3$ ; 2- $\alpha=b=1$  3- $\alpha=1$ ;  $b=3$

Гамма- распределение (формула (8.14), таблица 8.3) – одна из основных статистических моделей для представления распределений случайной величины, ограниченных с одной стороны. Это распределение хорошо описывает время, необходимое для появления ровно  $b$  независимых событий, если они происходят с равной интенсивностью  $\alpha$ . Форма и масштаб кривых распределения зависят от величины и соотношения параметров  $\alpha$  и  $b$ :  $b$ - параметр формы,  $\alpha$  – параметр масштаба. Если  $b \leq 1$ , то плотность гама- распределения убывающая кривая (рисунок 8.3.), если  $b > 1$ , то распределение представлено одновершинной кривой с максимумом в точке  $(b - 1) / \alpha$ .

Обычно в лесном хозяйстве интервал значения случайной величины ограничен с обоих концов. Плотность гамма-распределения для случая, когда величина задана на интервале  $[x, \infty]$ , выражается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(b)} a^b (x - x_1)^{b-1} e^{-a(x-x_1)}, \quad x \geq x_1, \quad \alpha > 0, \quad b > 0 \quad (8.16)$$

Переход к распределению в формуле (8.15.) обеспечивается заменой  $x' = x - x_1$ . При аппроксимации гамма-распределением вероятности для очень больших значений случайной величины невелики, ими пренебрегают как и в случае нормального распределения.

Для практического вычисления параметров  $\alpha$  и  $b$  используют метод моментов, дающий приближенные, но, как правило, вполне приемлемые результаты. Среднее значение Г-распределения  $\bar{X} = b / a$ , а дисперсия  $\sigma^2 = b/a^2$ .

Вычислив на основании выборки значения  $\bar{X}$  и  $\sigma^2$  и приравняв их соответствующим соотношением параметров, находим выборочные оценки  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$

$$\hat{a} = \frac{\bar{X}(n-1)}{\sum (x_i - \bar{X})^2} = \frac{\bar{X}}{\sigma^2} = (n-1) \left[ \frac{\sum x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \right], \quad (8.17)$$

$$\hat{b} = \hat{a} \bar{X} \quad (8.18)$$

При использовании гамма-распределения приходится вычислять значения Г-функции, называемой иначе интегралом Эйлера первого рода.

Г-функция – обобщенное понятие факториала для какого-либо положительного числа  $\rho$ , в том числе и для дробного

$$\Gamma(\rho) = \int_0^{\infty} x^{\rho-1} e^{-x} dx, \quad \rho > 0. \quad (8.19)$$

Для  $\rho$  целого положительного  $\Gamma(\rho+1) = \rho! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \rho$ .

Так как Г – функция имеет один минимум (в точке 1,4616 ... со значением  $\Gamma(1,4616 \dots) = 0,8856 \dots$ ), а с увеличением  $\rho$  значения  $\Gamma(\rho)$  резко возрастают, то обычно пользуются  $\lg \Gamma(\rho)$ . Обычно в таблицах приводят значения  $\lg \Gamma(\rho)$  для  $\rho$  от 1 до 2. Для других значений  $\lg \Gamma(\rho)$  находят с использованием соотношения  $\Gamma(\rho+1) = \rho \Gamma(\rho)$ , откуда при  $\rho > 2$

$$\lg \Gamma(\rho) = \lg(\rho-1) + \lg(\rho-2) + \dots + \lg(\rho-k) + \lg \Gamma(\rho-k) \quad (8.20)$$

а при  $0 < \rho < 1$

$$\lg \Gamma(\rho) = \lg \Gamma(\rho+1) - \lg \rho. \quad (8.21)$$

Многие известные распределения являются частными случаями гамма-распределения. Если  $b = 1$ , то получаем экспоненциальное распределение: при  $\alpha = 1/2$  и  $b$  кратном  $1/2$  имеем  $x$ -квадрат-распределение, а при  $b$  целом положительном – распределение Эрланга, широко используемое в теории массового обслуживания.

Для примера аппроксимируем при помощи гамма-распределения ряд распределения диаметра (из таблицы 8.4.). Следует иметь в виду, что, выбирая подходящим образом начало кривой и ее масштаб, можно значительно упростить вычисления. Поскольку для гамма-распределения в форме (8.16) начало кривой находится в точке  $x_1$  (в нашем примере  $x_1 = 6$  см), Перенесем начало координат в эту точку и произведем замену  $x_i' = (x_i - x) / c$ , чтобы можно было пользоваться статистиками, вычисленными для ряда в «рабочих единицах».

Для нашего примера имеем  $\bar{X} = 3,0896$ ,  $\sigma^2 = \mu_2 = 2,1385$ . Тогда по (8.17) и (8.18)  $\hat{a} = 3,0896 / 2,135 = 1,4448$ ;  $\hat{b} = 1,4448 \cdot 3,0896 = 4,4637$ , и уравнение (8.14) приобретает вид

$$f(x) = \frac{(1,4448)^{4,4637}}{\tilde{A}(4,4637)} x^{3,4637} e^{-1,4448 x}, \quad (8.22)$$

$$\text{а выравнивающие частоты } \tilde{n}_i = f(x)n, \quad (8.23)$$

где  $n$  – количество наблюдений.

Заметим, что при вычислениях непосредственно для исходного ряда (а не для рабочего) среднее = 18,36 см,  $\hat{\sigma}^2 = 34,216$  (см<sup>2</sup>) и параметр формы  $b$

практически не меняется, а в формуле (8.23)  $n_i$  необходимо умножить на величину  $c$ . Подставив (8.23) в (8.22) и прологарифмировав, получаем

$$\lg f(x) = \lg 558 + 4,4637 \lg 1,4448 - \lg \Gamma(4,4637) + 3,4637 \lg x - 1,4448 x \lg e = 2,4157 + 3,4637 \lg x - 0,6275 x,$$

где логарифм  $\Gamma$ -функции вычислен по (8.20) с использованием таблиц  $\lg \Gamma(\rho)$ , которые на отрезке от  $x=1$  до  $x=2$  приведены в приложении Д. Для больших величин  $x$  эти значения опущены. На отрезке от  $x=1$  до  $x=50$  они имеются в книге А.К. Митропольского, приведенной в списке литературы.

$$\begin{aligned} \lg \Gamma(4,4637) &= \lg 3,4637 + \lg 2,4637 + \lg 1,4637 + \lg(1,4637) = \\ &= 0,5395 + 0,3916 + 0,1654 + 1,9472 = 1,0438 \end{aligned}$$

Схема вычисления выравнивающих частот по кривой  $\Gamma$ -распределения приведена в таблице 8.5. Контролем вычислений служит совпадение сумм колонок 2 и 8; небольшие расхождения объясняются погрешностями округлений в процессе расчета.

Таблица 8.5 – Схема вычисления выравнивающих частот по кривой гамма-распределения

$x_i$	$n_i$	$x'_i$	$0,6275 x'_i$	$\lg x'_i$	$3,4637 \lg x'_i$	$\lg \tilde{n}_i = 2,4159 + (4) + (6)$	$\tilde{n}_i$
1	2	3	4	5	6	7	8
8	11	0,5	-0,3138	-0,3010	-	1,061	11,7
12	118	1,5	-0,9412	+0,1761	0,6099	2,084	121,4
16	181	2,5	-1,5688	0,3979	1,3783	2,225	168,0
20	124	3,5	-2,1962	0,5441	1,8845	2,104	127,1
24	67	4,5	-2,8238	0,6532	2,2625	1,854	71,5
28	31	5,5	-3,4512	0,7404	2,5644	1,529	33,8
32	17	6,5	-4,0788	0,8129	2,8157	1,153	14,2
36	5	7,5	-4,7062	0,8751	3,0309	0,740	5,5
40	3	8,5	-5,3338	0,9294	3,2192	0,301	2,0
44	1	9,5	-5,9612	0,9777	3,3865	1,841	0,7
$\Sigma$	558						555,9

Бета-распределение (формула (8.15) в таблице 8.3) часто называют основным распределением для величин, ограниченных с двух сторон. Это удобная модель для многочисленных приложений, поскольку кривая бета-распределения может принимать самую различную форму в зависимости от величины параметров (рисунок 8.4). Кроме того, посредством бета-распределения можно вычислять другие важные распределения.

Если  $\alpha > b > 1$  или  $b > \alpha > 1$ , то распределение одновершинное с максимумом в точке  $x = (\alpha - 1) / (\alpha + b - 2)$  с левосторонней асимметрией в первом и правосторонней во втором случае; если  $\alpha < 1$ ,  $b < 1$ , то распределение имеет U-образную, а при  $\alpha \geq 1$ ,  $b < 1$  i-образную форму. При  $\alpha < 1$ ,  $b \geq 1$  кривая распределения убывающая.

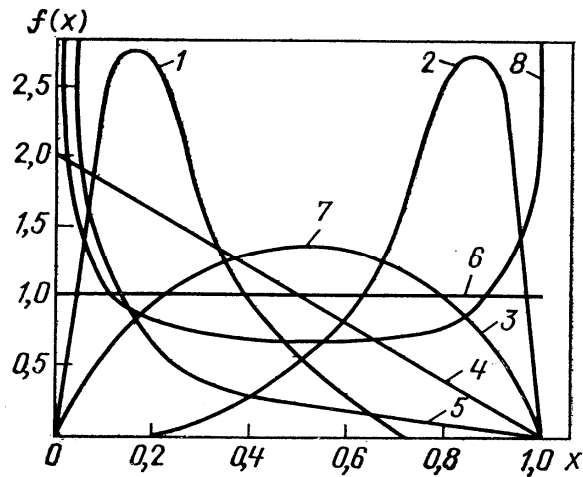


Рисунок 8.4 Кривые бета-распределения  
 1- $\alpha=1,5$ ,  $b=5$ ; 2- $\alpha=5$ ,  $b=1,5$ ; 3- $\alpha=b=2$ ; 4- $\alpha=1$ ,  $b=2$ ;  
 5- $\alpha=0,2$ ,  $b=2$ ; 6- $\alpha=b=1$ ; 7- $\alpha=b=2$ ; 8- $\alpha=b=0,5$

Если  $\alpha = b$ , то распределение симметрично. В качестве примеров случайной величины, подчиняющихся бета-распределению, можно привести выработку бригады, цеха и др. за определенный срок (смену, сутки), распределение большинства биометрических признаков деревьев и древостоев и др.

Название бета-распределения следует из того, что выражение из (8.15) в таблице 8.3, имеющие вид

$$\frac{\tilde{A}(a)\tilde{A}(b)}{\tilde{A}(a+b)} = \beta(a+b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx \quad (8.24)$$

при  $\alpha > 0$ ,  $b > 0$  называют  $\beta$ -функцией или интегралом Эйлера II рода. Так как В-функция выражается через  $\Gamma$ -функцию, то её обычно вычисляют по таблице значений  $\Gamma$ -функции.

Формула плотности задает бета-распределение на интервале  $(0,1)$ . В конкретных задачах интервал обычно ограничен некоторыми значениями  $[x_1, x_2]$ . Тогда плотность задается формулой.

$$f(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left( \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right)^{a-1} \left( 1 - \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right)^{b-1} \quad (8.25)$$

Заменив в (8.25)  $x' = (x - x_1) / (x_2 - x_1)$ , получим плотность бета-распределения на  $[0, 1]$ , т.е. формулу (8.24).

Частными случаями бета-распределения являются равномерное ( $\alpha = b = 1$ ), треугольное ( $\alpha = 2$ ,  $b = 1$ ) и параболическое ( $\alpha = b = 2$ ). В задачах свертки информации эти частные случаи находят применение для приближенного представления более сложных распределений.

Соотношения между параметрами бета-распределения и моментами, в частности средним и дисперсией, можно использовать для аппроксимации бета-распределения:



$$\hat{b} = \frac{1 - \bar{X}}{\hat{\sigma}^2} [\bar{X}(1 - \bar{X}) - \hat{\sigma}^2], \quad (8.26)$$

$$\hat{a} = \bar{X}\hat{b}/(1 - \bar{X}), \quad (8.27)$$

где  $\bar{X}$  - выборочное среднее;  $\hat{\sigma}^2$  - выборочная дисперсия.

Пример. Вычислим выравнивающие частоты по кривой бета-распределения ряда распределения второго коэффициента формы  $q_2$  (таблица 8.6). Напомним, что  $q_2 = d_{0,5}/d_{1,3}$ , где  $d_{0,5}$  - диаметр ствола на 0,5 высоты дерева,  $d_{1,3}$  - диаметр ствола на высоте 1,3 м. Коэффициент  $q_2$  широко применяется для оценки полндревесности деревьев.

Если имеем  $x_1 = 0,54$ ,  $x_2 = 0,78$  (начало и конец ряда), среднее и дисперсия (в рабочих единицах)  $\bar{X} = 0,6596$ ,  $\hat{\sigma}_1^2 = 3,7712$ . Замена  $x' = (x - 0,54) / (0,78 - 0,54)$  дает  $x_1' = 0$ ,  $x_2' = 1$ ,  $\bar{X}' = 0,4983$ , величина разряда  $c = 0,02/0,24 = 0,08333$ , дисперсия  $\hat{\sigma}^2 = (c\hat{\sigma}_1)^2 = (0,08333)^2 \cdot 3,7712 = 0,02619$ . Значения  $a$  и  $b$  находим из (8.26) и (8.27)

$$\hat{b} = \frac{0,5017}{0,02619} (0,4983 - 0,5017 - 0,02619) = 4,2873,$$

$$\hat{a} = \frac{0,4983}{0,5017} 4,2873 = 4,2582$$

Для перехода к выравнивающим частотам значения  $f(x)$  из (8.25) следует умножить на величину  $n/c$ , т. е.

$$n_i = \frac{n}{c} \cdot \frac{\tilde{A}(a+b)}{\tilde{A}(a)\tilde{A}(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, \quad (8.28)$$

Прологарифмировав 8.28 и вычислив коэффициенты, получим

$$\begin{aligned} \lg \left[ \frac{n}{c} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \right] &= \lg n + \lg \Gamma(a+b) - \lg c - \lg \Gamma(a) - \lg \Gamma(b) = \\ &= 2,3997 + 4,1883 - (-1,0792) - 0,9398 - 0,9231 = 3,6459 \\ \ln n_i &= 3,6459 + 3,2582 \lg x_i' + 3,2873 \lg (1 - x_i'). \end{aligned}$$

Схема вычисления  $n_i$  по последнему выражению приведена в таблице 8.6

В колонках 4 и 7 записаны одинаковые числа, только в обратном порядке (в колонке 4 сверху вниз, в колонке 7 снизу вверх. Поэтому при вычислениях значения колонки 7 могут быть получены по данным колонки 4. Контролем правильности вычислений служит близкое значение сумм колонок 2 и 10.

Таблица 8.6 – Схема вычисления выравнивающих частот распределения числа деревьев по коэффициенту формы  $q_2$  по кривой бета-распределения

$x_i$ ( $q_2$ )	$n_i$ лет	$x_i'$	$\lg x_i'$	3,2582 $\lg x_i'$	$1-x_i'$	$\lg(1-x_i')$	3,2873 $\lg(1-x_i')$	$\lg \tilde{n}_i$	$\tilde{n}_i$
0,55	1	0,0417	-1,3799	-4,4960	0,9583	-0,0185	-0,0608	1,089	0,1
0,57	3	0,1250	-0,9031	-2,9425	0,8750	-0,0580	-0,1907	0,513	3,3
0,59	12	0,2080	-0,6813	-2,2198	0,7917	-0,1014	-0,3333	1,093	12,4
0,61	23	0,2917	-0,5351	-1,7435	0,7083	-0,1498	-0,4924	1,410	25,7
0,63	38	0,3750	-0,4260	-1,3880	0,6250	-0,2041	-0,6709	1,587	38,6
0,65	49	0,4583	-0,3388	-1,1039	0,5417	-0,2662	-0,8751	1,667	46,5
0,67	51	0,5417	-0,2662	-0,8673	0,4583	-0,3388	-1,1137	1,665	46,2
0,69	36	0,6250	-0,2041	-0,6650	0,3750	-0,4260	-1,4004	1,581	38,1
0,71	21	0,7083	-0,1498	-0,4881	0,2917	-0,5651	-1,7590	1,399	25,0
0,73	14	0,7919	-0,1014	-0,3304	0,2083	-0,6813	-2,2396	1,076	11,9
0,75	2	0,8750	-0,0580	-0,1889	0,1250	-0,9031	-2,9087	0,489	3,1
0,77	1	0,9583	-0,0189	-0,0603	0,0417	-1,3799	-4,4960	0,090	0,1
$\Sigma$	251								251

Описанная  $\beta$ -функция является основной моделью, которую применяют проф. О.А. Атрощенко и его ученики для решения большого ряда прикладных задач: материально-денежная оценка лесосек, описание строения древостоев и т. д.

### 8.3 Семейство кривых распределения Джонсона

В лесоводственной литературе упомянутое семейство кривых впервые описали К.Е. Никитин и А.З. Швиденко. Приведем здесь его в изложении названных авторов.

Джонсон предложил для аппроксимации эмпирических распределений семейство кривых, полученных преобразованием исходного распределения  $\bar{X}$  с плотностью  $f(x)$  к нормировано нормально распределенной величине  $z$ . Это семейство включает три типа кривых, представляющих распределение неограниченных случайных величин (тип  $S_U$ ), ограниченных с одной стороны ( $S_L$ ) и ограниченных с двух сторон ( $S_B$ ). В общем виде семейство кривых Джонсона требует знания параметра положения  $\xi$ , параметра масштаба  $\lambda$  и двух параметров формы –  $\gamma$  и  $\delta$ . В таблице 8.9 приведены формулы преобразований к кривым Джонсона и соответствующие плотности распределения. Для простоты записи формулы приведены для нормированных значений величины  $X$  путем замены  $y = (x - \xi) / \lambda$ .

Для выбора конкретной кривой необходимо установить, к какому типу принадлежит эмпирическое распределение. Для этой цели на основании ряда распределения вычисляют выборочные значения  $\beta_1$  и  $\beta_2$  и по графику (рисунок 8.5) устанавливают тип распределения.

Таблица 8.9 – Типы преобразований и плотность распределения кривых семейства Джонсона

Тип кривой	Преобразование/ Плотность распределения	
$S_L$	$z = \gamma + \delta \ln y$	8.29
$S_B$	$z = \gamma + \delta \ln[y/(1-y)]$	8.30
$S_U$	$Z = \gamma + \delta \operatorname{arcsh} y =$ $= \gamma + \delta \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$	8.31
$S_L$	$\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \times (\gamma + \delta \ln y)^2\right\}, y \geq 0$	8.50
$S_B$	$\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{y(1-y)} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\gamma + \delta \ln \frac{y}{1-y}\right)^2\right\}, 0 \leq y \leq 1$	8.51
$S_U$	$\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\gamma + \delta \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})\right]^2\right\},$ $-\infty \leq y \leq \infty$	8.52

Выборочные распределения, для которых  $\beta_1$  и  $\beta_2$  лежат вблизи и на линии  $S_L$ , относятся к этому типу; лежащие ниже линии  $S_L$  - к типу  $S_U$ , а выше, исключая критическую область, - к типу  $S_B$ . Затем по выборке оценивают параметры данного типа распределения и вычисляют выравнивающие частоты.

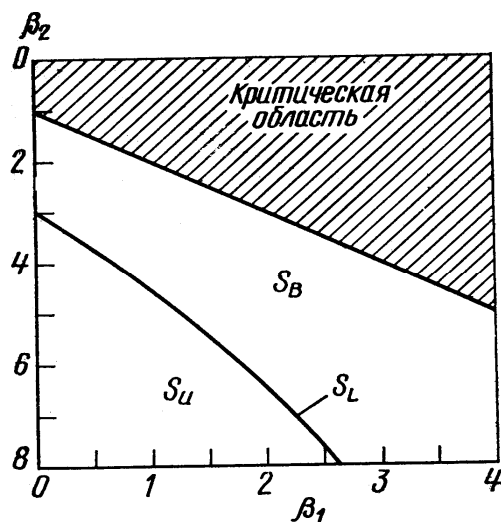


Рисунок 8.5 График для выбора типа кривых Джонсона

Вычисление оценок параметров  $\xi$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  через моменты очень сложно. Поэтому обычно для аппроксимации кривыми Джонсона используют метод приравнивания теоретических (выравнивающих) и выборочных квантилей. Тип  $S_L$ . Кривая распределения ограничена слева точкой  $\xi$ , а значения  $x \geq \xi$ . Можно показать, что этот тип распределения зависит только от трех парамет-

ров  $\delta$ ,  $\xi$  и  $\gamma^* = \gamma - \delta \ln \lambda$ , поэтому, положив  $\delta = 1/\sigma$  и  $\gamma^* = \bar{X}/\sigma$ , получаем трехпараметрическое логнормальное уравнение, приведенное выше (8.10), т.е. тип  $S_L$  имеет такую же форму распределения как на рисунке 8.2. Аппроксимация этого распределения возможна методом, рассмотренном в таблице 8.4.

В практике использование типа  $S_L$  может встретиться два случая величина  $\xi = x_1$  известна; величина  $\xi$  не известна. В большинстве задач по аппроксимации величин в лесном хозяйстве, особенно для свертки информации, начало кривой распределения, т.е. величина  $\xi$ , как правило, может быть установлена. Так, в качестве  $\xi$  можно использовать нижнюю границу первого класса ряда распределения. Если значение  $\xi$  известно, то, вычислив значения

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum \ln(x_i - \xi), \quad (8.32)$$

$$\hat{\sigma} = \left\{ \frac{n \sum [\ln(x_i - \xi)]^2 - [\sum \ln(x_i - \xi)]^2}{n(n-1)} \right\}^{1/2}, \quad (8.33)$$

находят два неизвестных параметра формулы (8. 50):

$$\hat{\sigma} = 1 / \hat{\sigma}, \quad (8.34)$$

$$\hat{\gamma}^* = -\bar{X} / \hat{\sigma}. \quad (8.35)$$

Если значение  $\xi$  не известно, то из (8.29) заменой  $\gamma^* = \gamma - \delta \ln(x - \xi)$  находят

$$Z = \gamma^* + \delta \ln(x - \xi). \quad (8.36)$$

Так как по выборке необходимо оценить параметры  $\gamma^*$ ,  $\delta$  и  $\xi$ , составляют три уравнения, приравнивающих три выборочных квантиля трем соответствующим квантилям нормированной нормально распределенной величины  $Z$ .

$$Z_a = \gamma^* + \delta \ln(x_a - \xi), \quad (8.37)$$

где  $z_a$  и  $x_a$  - соответственно теоретические и выборочные квантили.

Целесообразно выбирать два симметричных квантиля – это упрощает расчеты, в противном случае приходится решать нелинейное уравнение. Вполне приемлемо брать  $a = 0,05$ ;  $0,5$  и  $0,95$ . Выбор других близких квантилей мало меняет результаты. Тогда, поскольку для нормированного нормального распределения  $z_{0,05} = -1,645$ ,  $z_{0,5} = 0$  и  $z_{0,95} = 1,645$ , решением системы трех уравнений (8.37) находят:

$$\hat{\delta} = 1,645 \left[ \ln \left( \frac{x_{0,95} - x_{0,5}}{x_{0,5} - x_{0,05}} \right) \right]^{-1}, \quad (8.38)$$

$$\hat{\gamma}^* = \hat{\delta} \ln \left( \frac{1 - e^{-1,645/\hat{\delta}}}{x_{0,5} - x_{0,05}} \right), \quad (8.39)$$

$$\hat{\xi} = x_{0,5} - e^{-\hat{\gamma}^*/\hat{\delta}}, \quad (8.40)$$

где  $x_{0,05}$ ,  $x_{0,5}$ ,  $x_{0,95}$  – квантили выборочного распределения.

В качестве I и III квантилей можно взять и другие произвольные симметричные квантили  $x_a$  и  $x_{1-a}$ .

Поскольку техника вычисления выравнивающих частот по уравнению типа  $S_L$  по сути одинакова для обоих описанных выше случаев, рассмотрим ее на примере аппроксимации при неизвестном  $\xi$ .

В качестве примера вычислим выравнивающие частоты для ряда распределения диаметра стволов в 110-летнем древостое (таблица 8.10). Имеем  $\beta_1 = 1,0300$  и  $\beta_2 = 4,3262$ , т.е. распределение принадлежит к типу  $S_L$  семейства кривых Джонсона. Для определения параметров  $\hat{\delta}$ ,  $\hat{\gamma}^*$  и  $\hat{\xi}$  выберем квантили соответствующие вероятностям 0,05; 0,5; 0,95. По нашим данным они соответственно равны 10,57; 17,31 и 29,74. По (8.38) – (8.40) получаем сразу:

$$\hat{\delta} = 1,645 \left[ \ln \left( \frac{29,74 - 17,31}{17,31 - 10,57} \right) \right]^{-1} = 2,688 \quad ;$$

$$\hat{\gamma}^* = 2,688 \ln \left( \frac{1 - e^{-1,645/2,688}}{17,31 - 10,57} \right) = -7,229$$

$$\hat{\xi} = 17,31 - e^{7,229/2,688} = 2,588.$$

Теоретические частоты по вычисленным выборочным оценкам определяют по формуле (8.36) с использованием в качестве квантилей границ классов эмпирического распределения, т.е. для вычисленных квантилей

$$\hat{Z}_p = \hat{\gamma}^* + \hat{\delta} \ln(x_p - \hat{\xi}). \quad (8.41)$$

Напомним, что  $z$  по условию нормированная нормально распределенная случайная величина. По таблицам  $\Phi(z)$  (приложение Б) находят накопленную вероятность соответствующую верхним границам классов ряда распределения, откуда умножением на общее количество наблюдений  $N = 558$  переходят к выравнивающим (накопленным) частотам. Вычисление проводят по схеме таблицы 8.10. В колонках 10, 11 таблицы 8.10 приведены частоты, вычисленные по значениям параметров, оцененных на основании квантилей

$a = 0,01; 0,5$  и  $0,99$  (колонка 10) и  $a = 0,1; 0,5$  и  $0,9$  (колонка 11). В целом расхождения между теоретическими и эмпирическими частотами относительно невелики. Правда, следует учесть, что для рядов с большими значениями частот в крайних классах линейная интерполяция при расчете квантилей и  $x_a$  и  $x_{1-a}$  может давать заметные погрешности, особенно при малом  $a$  (этим объясняется частота 31 в колонке 10 таблицы 8.10). В таких случаях лучшие результаты можно получить построением для нахождения квантилей графика накопленных частот или (что, конечно, лучше) вычислением квантилей для не сгруппированных данных.

Таблица 8.10 – Вычисление выравнивающих частот для типа  $S_L$  семейства кривых Джонсона

$x_i$	$n_i$	$x_p$	$\text{Ln}(x_p - \hat{E})$	$\hat{\delta} \ln(x_p - \hat{E})$	$z_p$	$\Phi(z)$	$\Sigma \tilde{n}_i$	$\tilde{n}_i$	$\tilde{n}_i$ для квантилей	
									$\alpha=0,01$ $1-=0,99$	$\alpha=0,1$ $1-=0,9$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	-	6	1,227	3,299	-3,930	0,001	0,6	0,6	1	1
8	11	10	2,003	5,384	-1,845	0,032	17,9	17,3	31	20
12	118	14	2,435	6,544	-0,685	0,246	137,3	120,0	122	114
16	181	18	2,735	7,352	0,123	0,548	305,8	168,5	166	164
20	124	22	2,956	7,972	0,743	0,771	430,2	124,4	121	127
24	67	36	3,153	8,476	1,247	0,894	498,9	68,7	67	72
28	31	30	3,311	8,900	1,671	0,953	531,8	32,9	32	35
32	17	34	3,447	9,266	2,037	0,979	546,3	14,5	14	15
36	5	38	3,567	9,588	3,359	0,991	553,0	6,7	6	6
40	3	42	3,674	9,876	2,647	0,996	555,8	2,8	2	3
44	1	46	3,771	10,136	2,907	1,0	558,0	1,2	1	1
$\Sigma$	558							558	558	558

Тип  $S_B$ . Этот тип (формулы (8.30), (8.51)) представляет случайные величины, ограниченные с двух сторон значениями  $\xi \equiv x_1$  и  $x_2 = \xi + \lambda = (x_1 + \lambda)$ , т.е. параметр  $\xi$  - здесь начало кривой, а  $\lambda$  - размах распределения, или расстояние между крайними значениями. Кривая типа  $S_B$  может принимать различную форму (рисунок 8.6).

При аппроксимации кривыми типа  $S_B$  возможны три случая: известны оба крайних значения; одно из них; ни одного. Если оба крайних значения известны, то остается оценить  $\gamma$  и  $\delta$ . Как и для типа  $S_L$ , оценки находят приравниванием теоретических и выборочных квантилей. Выбирают два симметричных квантиля  $z_a$  и  $z_{1-a}$ , например, 0,05 и 0,95 или 0,1 и 0,9. Оценки  $\gamma$  и  $\delta$  получают из системы уравнений

$$z' = \gamma + \delta \ln \left( \frac{x' - \xi}{\lambda + \xi - x'} \right), \quad (8.42)$$

где  $z'$  и  $x'$  – соответственно квантили  $z_a$  и  $z_{1-a}$ ,  $x_a$  и  $x_{1-a}$ .

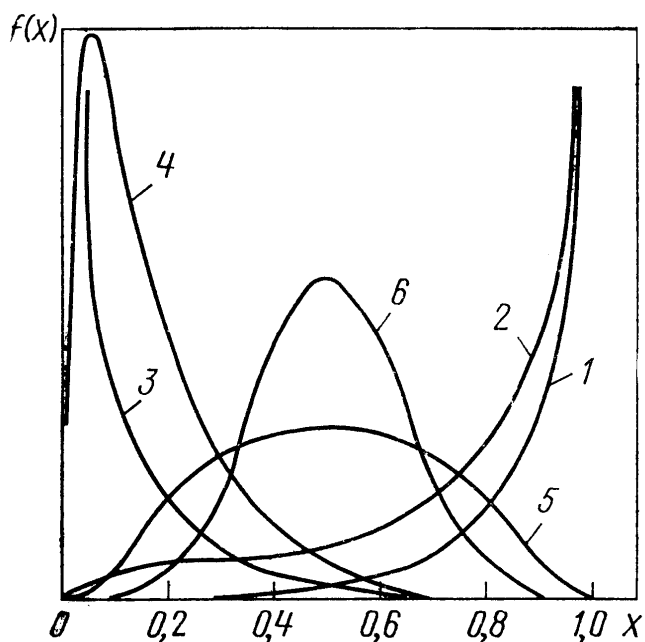


Рисунок 8.6 Кривые распределения Джонсона типа  $S_B$  при  $\varepsilon=0$ ,  $\lambda=1$   
 $1-\delta=1,5$ ,  $\gamma=-2$ ;  $2-\delta=0,5$ ,  $\gamma=-1$ ;  
 $3-\delta=0,5$ ,  $\gamma=2$ ;  $4-\delta=1$ ,  $\gamma=2$ ;  $5-\delta=\gamma=1$ ;  $6-\delta=2$ ,  $\gamma=0$

Отсюда

$$\hat{\delta} = \frac{z_{1-a} - z_a}{kn \left[ \frac{(x_{1-a} - \xi)(\xi + \lambda - x_a)}{(x_a - \xi)(\xi + \lambda - x_{1-a})} \right]}; \quad (8.43)$$

$$\hat{\gamma} = z_{1-a} - \hat{\delta} \ln \left( \frac{x_{1-a} - \xi}{\xi + \lambda - x_{1-a}} \right). \quad (8.44)$$

Если известно одно крайнее значение  $\xi$ , то для оценки трех параметров составляют систему типа (8.42) из трех уравнений, в третьем из которых обычно в качестве соответствующих квантилей используют медиану. Тогда оценки  $\delta$ ,  $\gamma$  и  $\lambda$  находят решением системы (8.42) с добавлением третьего уравнения для определения

$$\lambda = (x_{0,5} - \xi) \times \frac{(x_{0,75} - \xi)(x_a - \xi) + (x_{0,5} - \xi)(x_{1-a} - \xi) - 2(x_a - \xi)(x_{1-a} - \xi)}{(x_{0,5} - \xi)^2 - (x_a - \xi)(x_{1-a} - \xi)} \quad (8.45)$$

Техника аппроксимации типом  $S_B$  такая же, как и типом  $S_L$ : 1) находят выборочные значения квантилей для некоторых выбранных заранее вероятностей (один квантиль – медиана, два других – симметричные); 2) по формулам (8.43) – (8.45) находят выборочные значения  $\hat{\delta}$ ,  $\hat{\gamma}$  и  $\hat{\xi}$  (или по формулам (8.43) и (8.44), если  $\xi$  известно); 3) с использованием (8.42) вычисляют квантили  $z_p$ , соответствующие квантилям  $x_p$  – граница классов аппроксимируемого ряда распределения; 4) по таблице нормированного нормального распределения (приложение А) вычисляют значения накопленных вероятностей, от которых переходят к теоретическим частотам  $\sum \tilde{n}_i$  и  $\tilde{n}_i$ .

Пример. В первых двух колонках таблицы 8.11 приведен ряд распределения высоты (в сантиметрах) жизнеспособного 3-летнего самосева ели. В качестве жизнеспособного учтем самосевы высотой от 0,5 см. Аппроксимируем этот ряд при помощи кривых семейства кривых Джонсона.

Определим для ряда моменты. Если в качестве начального значения взять  $x_0 = 4$ , то начальные моменты  $m_1 = -0,7442$ ,  $m_2 = 6,2053$ ,  $m_3 = -0,8768$ ,  $m_4 = 69,3000$ ; Центральные  $\mu_2 = 5,6515$ ,  $\mu_3 = 12,1529$ ,  $\mu_4 = 86,3899$ ; Основные  $r_3 = 0,9045$ ,  $r_4 = 2,7048$ . Отсюда  $\beta_1 = 0,8181$ ,  $\beta_2 = 2,7048$ , т.е. по графику рисунка 8.6 имеем тип  $S_B$ . Примем, что начало кривой  $\xi = 0,5$ . Для вычисления  $\hat{\delta}$ ,  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\gamma}$  используем квантили  $\alpha = 0,05$ ;  $0,5$  и  $0,95$ . Имеем:

$$x_{0,05} = 0,5 + 1 \frac{0,05 \cdot 950 - 0}{310} = 0,65;$$

$$x_{0,50} = 1,5 + 1 \frac{0,05 \cdot 950 - 310}{168} = 2,48;$$

$$x_{0,95} = 7,5 + 1 \frac{0,95 \cdot 950 - 872}{43} = 8,21$$

Подставив значения квантилей  $x_\alpha$  и  $x_{1-\alpha}$  и используя табличные значения  $Z_\alpha$  и  $Z_{1-\alpha}$  находим:

$$\hat{\lambda} = (2,48 - 0,5) \frac{(2,48 - 0,5)(0,65 - 0,5) + (2,48 - 0,5) \times (8,21 - 0,5) - 2(0,65 - 0,5)(8,21 - 0,5)}{(2,48 - 0,50)^2 - (0,65 - 0,50)} = 9,5$$

$$\hat{\delta} = \frac{1,645 - (-1,645)}{\ln \left[ \frac{(8,21 - 0,5)(0,5 + 9,5 - 0,65)}{(0,65 - 0,5)(0,5 + 9,5 - 8,21)} \right]} = 0,59;$$

$$\hat{\gamma} = 1,645 - 0,59 \frac{8,21 - 0,5}{0,5 + 9,5 - 8,21} = 0,78.$$

Дальнейшие вычисления идут по схеме таблицы 8.11.

Таблица 8.11 – Вычисление выравнивающих частот для типа  $S_B$  кривых Джонсона (на примере ряда распределения высоты самосева ели)

$x_i$	$n_i$	$X_p = x_i + \frac{c}{2}$	$\frac{x_p - \xi}{\lambda + \xi - x_p}$	Ln(4)	$\hat{\gamma} + \hat{\delta}(5)$	$\Phi(6)$	$\Sigma n_i = n(1)$	$\tilde{n}_i$	Для квантилей	
									$\alpha=0,01$ $1-\alpha=0,99$	$\alpha=0,1$ $1-\alpha=0,9$
-	0	0,5		-	-	0,000	0	0	0	0
1	310	1,5	0,118	-2,140	-0,483	0,315	299,2	299,2	291	318
2	168	2,5	0,267	-1,322	0,000	0,500	475,0	175,8	185	159
3	122	3,5	0,462	-0,773	0,324	0,627	595,6	120,6	125	109
4	95	4,5	0,727	-0,318	0,592	0,723	686,8	91,2	92	85
5	70	5,5	1,111	0,105	0,842	0,800	760,0	73,2	72	71
6	57	6,5	1,714	0,539	1,098	0,864	820,8	60,8	58	62
7	50	7,5	2,800	1,030	1,388	0,917	871,2	50,4	46	55
8	43	8,5	5,333	1,674	1,768	0,961	912,9	41,7	37	50
9	35	9,5	18,000	2,880	2,479	0,994	944,3	31,4	28	40
-	0	10,0				1,0	950	5,7	16	1
$\Sigma$	950							950	950	950



В целом аппроксимацию можно считать приемлемой. Отметим, что использование квантилей  $\alpha = 0,01; 0,5$  и  $0,99$  (колонка 10) и квантилей  $\alpha = 0,1; 0,5$  и  $0,9$  (колонка 11) дало худшие результаты из-за приближенности определения квантилей для сгруппированного ряда. Первая и последняя строки таблицы 8.11. соответствуют границам ряда для колонки (10)  $x_{\max} = 10,82$ , для колонки (11)  $x_{\max} = 9,6$ .

Если не известны все крайние значения, то по числу неизвестных параметров составляют четыре уравнения, в которых 4 выборочных квантиля приравнивают к соответствующим квантилям нормированного нормального распределения. Оценки параметров  $\hat{\delta}$ ,  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\xi}$  и  $\hat{\lambda}$  определяют из системы нелинейных уравнений. Случаи с четырьмя неизвестными параметрами в лесных исследованиях крайне редки, а в задачах свертки информации практически исключаются. Поэтому более детально тип  $S_B$  (формулы (8.31), (8.52)) здесь не рассматривается.

Тип  $S_U$ . Преобразование и плотность кривых распределения типа  $S_U$  (рисунок 8.7) приведены в таблице 8.9. В задачах аппроксимации кривыми этого типа требуется оценка всех четырех параметров. Как и в аналогичном случае типа  $S_B$ , составляют систему уравнений, в которых приравнивают четыре выборочных и четыре теоретических квантиля. Это приводит к нелинейной относительно искомым параметрам системе. Поэтому Н. Джонсон предложил таблицы для нахождения по значениям  $\beta_1$  и  $\beta_2$  оценок параметров  $\hat{\gamma}$  и  $\hat{\delta}$ . Величины  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\xi}$  вычисляют по формулам

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{\sigma}}{\left\{ \frac{1}{2}(\omega - 1) \left[ \operatorname{och} \left( 2 \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\delta}} \right) + 1 \right] \right\}^{1/2}}; \quad (8.46)$$

$$\hat{\xi} = \tilde{X} + \hat{\lambda} \omega^{1/2} \operatorname{sh} \left( \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\delta}} \right). \quad (8.47)$$

Техника вычислений иллюстрируется следующим примером.

Пусть имеем ряд распределения, составленный по результатам 250 случайных замеров диаметра поперечного среза по высоте груди ствола ели (таблица 8.12). Статистики ряда следующие:  $\bar{X} = 29,43$  см;  $\hat{\sigma} = 0,4454$  см;  $\beta_1 = 0,0527$ ;  $\beta_2 = 4,96$ ;  $\sqrt{\beta_1} = 0,23$ . По таблицам Джонсона находим  $\hat{\gamma} = -0,1972$ ;  $\hat{\delta} = 1,86$ . По (8.46) и (8.47) вычисляем  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\xi}$ , учитывая, что  $\omega = \exp [(1,86)^{-2}] = 1,336$ , а  $\omega^{1/2} = 1,156$ .

Таблица 8.12 – Схема аппроксимации типа  $S_U$  кривых Джонсона для ряда распределения диаметра на 1,3 м деревьев ели

$x_i$	$n_i$	$x_i' = x_i + \frac{c}{2}$	$y = \frac{x_i' - \xi}{\lambda}$	$\text{arcsh } y$	$z = \gamma + \delta(5)$	$\Phi(z)$	$f(z)$	$\tilde{n}_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	27,6	-2,463	-1,630	-3,23	0	0	0
27,8	1	28,0	-1,897	-1,394	-2,79	0,003	0,003	0,8
28,2	3	28,4	-1,331	-1,100	-2,24	0,013	0,010	2,5
28,6	11	28,8	-0,764	-0,707	-1,51	0,066	0,053	13,2
29,0	51	29,2	-0,198	-0,196	-0,56	0,288	0,222	55,5
29,4	96	29,6	0,368	0,360	0,47	0,681	0,393	98,2
29,8	67	30,0	0,934	0,834	1,35	0,912	0,231	57,8
30,2	15	30,4	1,501	1,195	2,21	0,986	0,074	18,5
30,6	5	30,8	2,067	1,474	2,54	0,994	0,008	2,0
31,0	1	31,2	2,633	1,694	2,95	0,998	0,004	2,0
	0	31,2	-	-		1,0	0,002	0,5
$\Sigma$	250							250

$$\hat{\lambda} = \frac{0,4454}{\left\{ \frac{1}{2} 0,336 [1,336 \text{ch}(-0,212) + 1] \right\}^{1/2}} = 0,7064$$

$$\hat{\xi} = 29,43 + 0,7064 \cdot 1,156 \text{ sh}(-0,106) = 29,34.$$

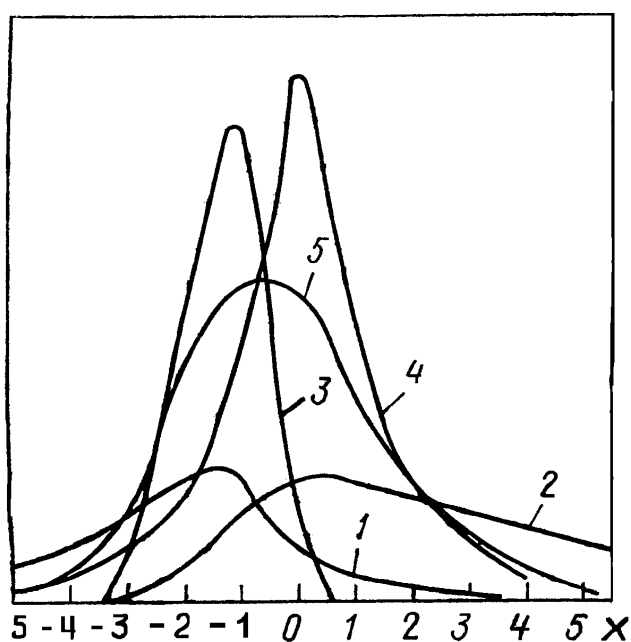


Рисунок 8.7 Кривые распределения Джонсона типа  $S_U$  при  $\varepsilon=0, \lambda=1$ :  
 1- $\delta=1, \gamma=2$ ; 2- $\delta=0,5, \gamma=-2$ ; 3- $\delta=2, \gamma=1$ ; 4- $\delta=0,5, \gamma=0$ ; 5- $\delta=\gamma=2$

## 8.4 Семейство кривых Пирсона

К. Пирсон в цикле работ начала прошлого века предложил цельное семейство кривых. Эта система распределений Пирсона столь же обширна, как и семейство кривых Джонсона. Семейство кривых Пирсона полностью определяется первыми четырьмя моментами. Оно насчитывает 12 типов кривых, из которых обычно используют 7. Конкретный тип кривой устанавливают в зависимости от величин  $\kappa$ -критерия, который называют критерием Пирсона и определяют через величины  $r_3$  и  $r_4$ :

$$\kappa = \frac{r_3^2(r_4 - 3)}{4(4r_4 - 3r_3^2)(2r_4 - 3r_3^2 - 6)} = \frac{r_3^2(S + 2)^2}{16(S + 1)}, \quad (8.48)$$

где  $r_3$  и  $r_4$  – третий и четвертый основные моменты,

$$S = \frac{6(r_4 - r_3^2 - 1)}{3r_3^2 - 2r_4 + 6}. \quad (8.49)$$

Семейство кривых Пирсона в отличие от кривых Джонсона широко используется в исследованиях по лесному хозяйству, для чего разработаны стандартные компьютерные программы, входящие в сертифицированное математическое обеспечение персональных компьютеров. Поэтому детальное описание выравнивающих частот по кривым Пирсона опускаем.

В то же время студенты и, особенно магистранты и аспиранты, должны понимать математическое содержание этого семейства кривых. Поэтому дадим их краткое описание. Подобное изложение семейства кривых Пирсона приводит А.К. Митропольский.

Обобщение критериев для определения типа кривых Пирсона 1-7, их основные уравнения и некоторые особенности показаны в таблице 8.13.

С точки зрения практической аппроксимации наибольший интерес представляют следующие четыре типа асимметричных кривых (все они, за исключением кривых IV типа, могут быть U – и I-образные): I – случайная величина имеет размах, ограниченный с двух сторон, критерий  $\kappa < 0$ , это – бета-распределение, рассмотренное выше; III – размах ограничен слева; критерий  $\kappa = \pm\infty$ , практическое применение возможно при  $\kappa > 4$ , это – гамма-распределение; IV – размах неограничен с обеих сторон, критерий  $\kappa$  заключен между 0 и 1; VI – размах ограничен с одной стороны (как правило справа). Последний тип заменой  $y = \alpha/x$  можно привести к первому типу, а непосредственное применение IV типа сопровождается определенными вычислительными трудностями. В качестве основных обычно используют кривые I, IV и VI типов со значением критериев соответственно  $0 < \kappa < 1$  и  $\kappa > 1$ , обеспечивающих по разнообразию форм кривых распределений потребности лесоводственной практики. Остальные типы – переходные на границах между I, IV и VI. Если  $\kappa = \infty$  и  $r_4 = 0$ , то получают кривую нормального распределения, если  $\kappa = 0$ ,  $r_4 < 3$  – типа II, если  $r_4 > 3$  – VII, если  $\kappa = 1$  – V.

Таблица 8.13 – Определение типов кривых Пирсона (по А.К. Митропольскому)

Тип кривой	Критерий определения типа кривой	Уравнение кривой	Примечания
I	$\kappa < 0$ ордината кривой в начальной точке равна $-\infty$ ; в конечной $0$	$f_I(x) = f_{I,0} \left(1 + \frac{x}{l_1}\right)^{q_1} \cdot \left(1 - \frac{x}{l_2}\right)^{q_2}$ где $l_1, l_2$ – пределы размаха ряда распределения; $q_1, q_2$ – показатели, которые могут быть положительными и отрицательными	
II	$\kappa=0$ $r_3=0$ $r_4<3$	$f_{II}(x) = f_{II,0} \left(1 - \frac{x^2}{l^{1,2}}\right)^q$	Частный случай кривой I. Симметрична вокруг оси $O_y$ и имеет конечный размах распределения
III	$\kappa=\pm\infty$	$f_{III}(x) = f_{III,0} \left(1 + \frac{x}{l_1}\right)^p \cdot l^{-\frac{px}{l_1}}$ $p = \frac{4}{r_3^2} - 1$	Асимметричная кривая, ограниченная в одном направлении точкой $x=-l$
IV	$0 < \kappa < 1$	$f_{IV}(x) = f_{IV,0} \left(1 + \frac{x^2}{l^2}\right)^{-q} \cdot l^{-y \cdot \arctg \frac{x}{l}}$ $q = \frac{r+2}{2}$ $r = -S$	Асимметричная кривая, ограниченная от $-\infty$ до $+\infty$
V	$\kappa=1$	$f_V(x) = f_{V,0} \cdot x^{-p} \cdot l^{-\frac{\gamma}{x}}$ $p = 4 + \frac{8 + 4\sqrt{4+r_3}}{r_3}$ $\gamma = \bar{\sigma}(p-2)\sqrt{p-3}$	$x$ не принимает отрицательных значений. Кривая асимметрична в одном направлении $0 < x < 1$
VI	$1 < \kappa < \infty$	$f_{VI}(x) = f_{VI,0} (x-l)^{q_1} \cdot x^{q_2}$	Кривая асимметрична и ограничена в одном направлении точкой $x=l$ $l \leq x < \infty$
VII	$\kappa=0$ $r_3=0$ $r_4>3$	$f_{VII}(x) = f_{VII,0} \left(1 + \frac{x^2}{l^{1,2}}\right)^{-q}$ $q = \frac{5r_4 - 9}{2(r_4 - 3)} > 0; l = \bar{\sigma} \sqrt{\frac{2r_4}{r_4 - 3}}$	при $\kappa=0, r_3=0, r_4=3$ имеем нормальную кривую

Аппроксимацию кривыми Пирсона проводят в определенной последовательности:

- 1) по результатам наблюдений вычисляют первые четыре момента эмпирического распределения, на основе которых определяют критерий Пирсона  $\chi$  и выбирают тип кривой распределения;
- 2) через эмпирические моменты выражают параметры кривой выбранного типа;
- 3) полученные параметры подставляют в уравнение соответствующего типа и вычисляют теоретические частоты.

Систематическое изложение техники аппроксимации по каждому типу семейства Пирсона достаточно громоздко. В настоящее время эти задачи, как и применение семейства кривых Джонсона, решаются по стандартным программам.

Кривые семейства Пирсона неоднократно применяли многие исследователи в качестве универсальной модели распределения при решении многочисленных задач обработки лесоводственной информации.

Для упрощения нахождения типа кривой Пирсона для конкретного распределения В.Ф. Багинским рассчитана таблица значений критерия Пирсона ( $\chi$ ) при заданных  $\alpha$  и  $\varepsilon$ . (таблица 8.14).

Таблица 8.14 – Критерии Пирсона ( $\chi$ ) при заданных  $\alpha$  и  $\varepsilon$

Величина эксцесса $E$	Величина асимметрии $\alpha$							
	2,2	1,8	1,4	1	0,8	0,4	0,2	0,1
-2,2	0,08	0,13	0,26	2,44	-0,29	-0,04	-0,01	0
-2,0	0,10	0,17	0,42	-0,57	-0,21	-0,04	-0,01	0
-1,6	0,15	0,29	3,73	-0,3	-0,16	-0,04	-0,01	0
-1,2	0,22	0,61	-1,03	-0,25	-0,16	-0,05	-0,01	0
-1,0	0,28	1,00	-0,73	-0,25	-0,17	-0,05	-0,01	0
-0,8	0,35	2,1	-0,61	-0,25	-0,18	-0,06	-0,02	0
-0,6	0,46	18,02	-0,54	-0,26	-0,19	-0,08	-0,02	-0,01
-0,4	0,60	-3,55	-0,51	-0,28	-0,22	-0,10	-0,03	-0,01
-0,2	0,82	-1,82	-0,49	-0,3	-0,25	-0,14	-0,06	-0,02
-0,1	0,98	-1,51	-0,49	-0,32	-0,27	-0,18	-0,09	-0,03
0,0	1,19	-1,32	-0,49	-0,33	-0,30	-0,26	-0,25	-0,25
0,1	1,48	-1,18	-0,49	-0,35	-0,33	-0,45	0,38	0,04
0,2	1,92	-1,08	-0,49	-0,38	-0,37	-1,56	0,11	0,02
0,4	3,93	-0,96	-0,51	-0,49	-0,5	-0,39	0,05	-0,01
0,6	33,0	-0,88	-0,53	-0,53	-0,78	0,17	0,03	0,01
0,8	-6,36	-0,84	-0,57	-0,68	-1,79	0,11	0,02	0
1,0	-3,20	-0,82	-0,61	0,94	6,96	0,08	0,02	0
1,2	-2,27	-0,81	-0,67	-1,56	1,16	0,07	0,01	0
1,6	-1,83	-0,83	-0,84	4,68	0,44	0,05	0,01	0
2,0	-1,34	-0,88	-1,18	0,94	0,27	0,04	0,01	0
2,2	-1,28	-0,92	-1,49	0,67	0,23	0,03	0,01	0

Из таблицы 8.14 следует, что большая часть всех возможных распределений выравняется кривой Пирсона I типа. Другие кривые нужны при значительной асимметрии ( $\alpha > 1,0$ ). С учетом того, что II тип Пирсона можно рассматривать как модификацию I типа, последний занимает около 70% всего поля таблицы. Остальную часть в основном занимает IV тип. Нормальная кривая – лишь небольшая часть общего поля таблицы. Остальные типы распределения редки.

Достаточно широкое применение кривых Пирсона для исследования различных распределений обусловлено следующим.

- Применяя систему кривых Пирсона, исследователь не связывает себя никакими предварительными условиями в отношении характера распределения.
- Достаточно простое определение типа кривой.
- Наличие практически в любой системе матобеспечения для ПК программы расчетов по вычислению выравнивающих частот по кривым Пирсона.

## 9. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

- 9.1 Ошибки выборочных статистических показателей и их теоретическое объяснение
- 9.2 Основные задачи статистического оценивания. Смещенные и несмещенные оценки
- 9.3 Ошибки статистик и их определение. Доверительный интервал
- 9.4 Ошибка суммы или разности средних значений

### 9.1 Ошибки выборочных статистических показателей. Их теоретическое объяснение

Значение основных статистических показателей ( $\bar{d}$ ,  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $E$ ) и их распределение очень важно для характеристики статистической выборки, но недостаточно для ее полной оценки. Если бы мы работали с численностями генеральной совокупности, например, замеряли все деревья лесхоза, области, государства, то вычисленных значений среднего, среднеквадратического отклонения и других показателей было бы достаточно. Но в подавляющем большинстве случаев замеры проводят для выборочной совокупности: на пробной площади, на опытном участке и т.д. Поэтому нам надо знать, насколько наши статистические показатели соответствуют аналогичным данным из генеральной совокупности, т.е. достоверны ли они и каковы их ошибки. Такую оценку нам дают вычисленные ошибки статистик.

В основе оценок статистик лежит знание об их распределении. Так, если из одной генеральной совокупности взять некоторое число выборок и для каждой из них определить статистики, например,  $\bar{d}$  и  $\sigma$ , то можно выявить распределение этой статистики, которая тоже является случайной величиной. Знание закона распределения искомой статистики позволяет делать ее вероятные оценки. Следовательно, оценку искомого статистического параметра можно сделать только с определенной вероятностью.

Теоретическую основу таких оценок дает теория вероятности и описываемый ею закон больших чисел. Здесь важными для решения наших задач являются теоремы Маркова, Чебышева, Пуассона и Бернулли. Их подробное изложение с приведением доказательств есть в учебниках по теории вероятностей, а также в книге А.К. Митропольского. Учитывая ограниченность курса лесной биометрии, приведем здесь лишь сами теоремы без их доказательства в том порядке, в каком они взаимосвязаны.

Доказательства названных теорем базируются на использовании леммы Маркова. Поэтому приведем ее определение и доказательство.

Лемма Маркова формулируется следующим образом. Если случайная величина  $x$  может принимать только положительные значения, то вероятность  $P$  того, что эта величина не превзойдет своего математического ожидания  $M(x)$ , умноженного на некоторое положительное число  $t^2$ , больше разности между единицей и числом, обратным данному положительному числу.

Обозначая вероятность соотношения как  $P\{x_j\}$ , лемму Маркова можно записать следующим образом:

$$P\{\delta \leq M(x)t^2\} > 1 - \frac{1}{t^2}. \quad (9.1)$$

Для доказательства (9.1) допустим, что  $x$  принимает только некоторые положительные значения, т.е.  $x_1, x_2, \dots, x_k$  с вероятностями  $P_1, P_2, \dots, P_k$ .

Из ранее изложенного материала мы знаем, что  $\sum \delta_i = 1$ .

Тогда  $M(x)$  будет равно

$$M(x) = \sum P_i x_i. \quad (9.2)$$

Если возьмем любое положительное число  $t^2$  (при возведении в квадрат любое число будет положительным), допустим, что первые  $i$  значений этого ряда не больше  $M(x)t^2$ , а остальные больше  $M(x)t^2$ .

Тогда по теории сложения вероятностей имеем

$$P\{x \leq M(x)t^2\} = \sum P_i \quad \text{и} \quad (9.3)$$

$$Q\{x > M(x)t^2\} = P_{i+1} + \dots + P_k. \quad (9.4)$$

Следовательно,  $P+Q=1$ .

Так как вероятности представляют числа неотрицательные, то, опуская в правой части равенства (9.2) члены с индексами

$$1, 2, \dots, j,$$

мы получим неравенство

$$M(X) \geq p_{j+1}x_{(j+1)} + \dots + p_k x_{(k)} \quad (9.5)$$

Так как далее все значения

$$x_{(j+1)}, \dots, x_{(k)} \quad (9.6)$$

больше  $M(X)t^2$ , то, подставляя в (9.5) эту последнюю величину, вместо каждого из значений (9.6), получим более строгое неравенство

$$M(X) > M(X)t^2[p_{j+1} + \dots + p_k], \quad \text{т.е.}$$

$$M(X) > M(X)t^2 Q.$$

Разделив левую и правую части этого неравенства на положительную величину  $M(X)t^2$ , находим

$$\frac{1}{t^2} > Q.$$

И так как на основании того, что  $P+Q=1$  имеем

$$Q = 1 - P, \quad \text{то}$$

$$\frac{1}{t^2} > 1 - P, \quad \text{т.е.}$$

$$P\{X \leq M(X)t^2\} > 1 - \frac{1}{t^2},$$

что и выражает лемму Маркова.



Заметим, что хотя лемма Маркова имеет место при любом положительном числе  $t^2$ , однако, в силу того, что величина вероятности не может быть меньше нуля, мы, рассматривая (9.1) заключаем, что имеет смысл брать лишь те  $t^2$ , которые не меньше 1. При  $t^2 = 1$  имеем

$$P\{X \leq M(X)\} > 0.$$

Чем больше  $P$ , тем больше будет вероятность того, что

$$X \leq M(X)t^2.$$

Как следствие из леммы Маркова, находим, что

$$Q\{X > M(X)t^2\} \leq \frac{1}{t^2}, \quad (9.7)$$

т.е. вероятность неравенства  $X > M(X)t^2$  не больше  $\frac{1}{t^2}$ .

Написав неравенство (9.1) в виде

$$P\{X \leq M(X)t^2\} > 1 - \frac{M(X)}{M(X)t^2} \quad \text{и положив } M(X)t^2 = \tau, \text{ имеем}$$

$$P\{X \leq \tau\} > 1 - \frac{M(X)}{\tau}. \quad (9.8)$$

Поэтому лемма Маркова может быть выражена также следующим образом.

Если случайная величина  $X$  может принимать только положительные значения, то вероятность того, что она получит значения, не превосходящие некоторого положительного числа  $\tau$ , больше

$$1 - \frac{M(X)}{\tau}.$$

Приведем геометрическую иллюстрацию леммы Маркова (рисунок 9.1).

Левая часть неравенства (9.8) выражает вероятность того, что величина  $X$  не превосходит некоторого положительного числа  $\tau$ . По определению, вероятность изменяется от нуля для событий невозможных до единицы для событий достоверных. Так как по условию величина  $X$  может принимать только положительные значения, то при  $\tau = 0$  очевидно, что

$$P\{X \leq \tau\} = 0$$

как вероятность невозможного события. При возрастании  $\tau$  вероятность  $P$

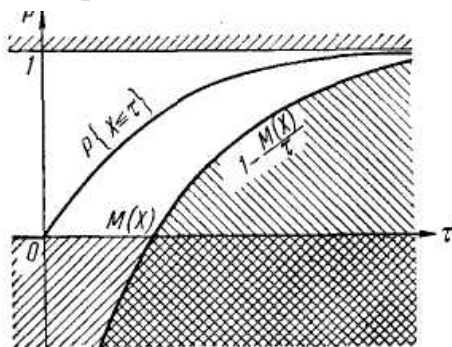


Рисунок 9.1 Геометрическая иллюстрация леммы Маркова

будет возрастать, стремясь к 1 при стремлении  $\tau$  к бесконечности. На рисунке вероятность  $P$  будет изображена линией, которая при  $\tau \leq 0$  будет совпадать с осью абсцисс, а при  $\tau > 0$  будет подниматься над этой осью, стремясь слиться с прямой, параллельной этой оси и проходящей от нее на расстоянии, равном единице (рисунок 9.1).

Правая часть неравенства (9.8) представляет при  $\tau > 0$  ветвь гиперболы, которая при  $\tau < M(X)$  расположена под осью абсцисс,

при  $\tau = M(X)$  пересекает эту ось, при  $\tau > M(X)$  проходит над осью абсцисс и при неограниченном увеличении  $\tau$  стремится слиться с прямой, указанной выше.

На основании неравенства (9.8), кривая вероятностей  $P$  расположена над ветвью гиперболы; следовательно, эта кривая не может проникать в области, заштрихованные на чертеже.

Лемма Маркова является основным предложением статистического исчисления. Замечательным свойством этой леммы является ее независимость от природы распределения положительной случайной величины. На лемме Маркова основано доказательство многих теорем статистического исчисления и, в частности, важнейшей из этих теорем – закона больших чисел.

**Неравенство Чебышева.** Лемма Маркова дает возможность найти вероятность того, что положительная случайная величина примет значение, не превышающее некоторого данного числа; при этом требуется только знание математического ожидания этой величины.

Определенное заключение о случайной величине дает также неравенство Чебышева, которое приложимо к каким угодно (не обязательно положительным) случайным величинам, причем требуется только знание математического ожидания и дисперсии случайной величины.

**Н е р а в е н с т в о Ч е б ы ш е в а.** Если случайная величина  $X$  может принимать и положительные и отрицательные значения, то, каким бы ни было положительное число  $\tau$ ,

$$P\{-\tau \leq X \leq \tau\} > 1 - \frac{M(X^2)}{\tau^2}. \quad (9.9)$$

При установлении этого неравенства применяется лемма Маркова. Доказательство (9.9) опускаем.

Неравенство (9.9) дает нижнюю границу

$$1 - \frac{\sigma^2}{\tau^2}$$

вероятности того, что отклонение значений случайной величины от ее математического ожидания не превзойдет некоторого заданного числа  $\pm \tau$ . Если дисперсия  $\sigma^2$  уменьшается, то нижняя граница вероятностей этих отклонений возрастает. Это показывает, что значения случайной величины тем более сосредоточиваются около ее математического ожидания, чем меньше дисперсия. Таким образом, выясняется смысл дисперсии  $\sigma^2$  как меры рассеяния значений случайной величины около ее математического ожидания.

Полагая в неравенстве (9.9)

$$\tau = t\sigma$$

имеем

$$P\{-t\sigma \leq x - M(x) \leq t\sigma\} > 1 - \frac{1}{t^2}$$

и, следовательно,

$$Q\{|x - M(x)| > t\sigma\} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Эти неравенства справедливы для любого распределения случайной величины с конечной дисперсией.

При постоянном основном отклонении  $\sigma$  неравенство показывает, что если  $t$  будет увеличиваться, то вероятность того, что значения случайной величины будут находиться в увеличивающемся промежутке  $(-t\sigma + M(x), t\sigma + M(x))$ , будет увеличиваться. В частности, если  $t=2$ , то

$$P\{-2\sigma \leq x - M(x) \leq 2\sigma\} > 0,75;$$

если  $t=3$ , то

$$P\{-3\sigma \leq x - M(x) \leq 3\sigma\} > 0,889.$$

Пусть теперь величина  $t$  будет постоянной. Тогда при уменьшающемся основном отклонении  $\sigma$ , т.е. уменьшающемся промежутке  $(M(x)-t\sigma, M(x)+t\sigma)$ , нижняя граница вероятности значений  $x-M(x)$ , заключающихся в этом промежутке, будет оставаться постоянной. Отсюда опять-таки следует, что чем меньше основное отклонение, тем теснее отдельные значения случайной величины сосредоточиваются около ее математического ожидания.

Таким образом, основное отклонение служит мерой рассеяния значений случайной величины.

После усвоения леммы Маркова и неравенства Чебышева приведем (без доказательства) теорему Маркова.

Она выражается уравнением

$$P = \left\{ -v < \frac{\sum_{s=1}^n x_s}{n} - \frac{\sum_{s=1}^n a_s}{n} < v \right\} > 1 - w, \quad (9.10)$$

где  $v, w$  – некоторые произвольно заданные положительные числа;  
 $a_s$  – математическое ожидание.

Теорема Маркова выполняется при условии  $\frac{\sigma^2}{n^2} \rightarrow 0; n \rightarrow \infty$ .

Теорема Маркова представляет собой наиболее общее выражение закона больших чисел. Ее частным случаем является теорема Чебышева. Она формулируется следующим образом.

**Т е о р е м а Ч е б ы ш е в а.** Если число  $n$  попарно независимых случайных величин

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

можно увеличивать беспрестанно и математические ожидания их квадратов все не превосходят одного и того же постоянного числа, то при достаточно большом числе этих величин будет сколь угодно близкой к достоверности

вероятность того, что их среднее арифметическое отличается произвольно мало от среднего арифметического их математических ожиданий:

$$P \left\{ -\varepsilon < \frac{\sum_{s=1}^n x_s}{n} - \frac{\sum_{s=1}^n a_s}{n} < \varepsilon \right\} > 1 - \eta. \quad (9.11)$$

Одним из важных следствий теоремы Чебышева является применение ее к случаю, когда все попарно независимые величины

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

имеют одно и то же математическое ожидание, т. е. когда все

$$a_s = a \quad (s = \overline{1, n})$$

и, кроме того, все

$$M(x_s^2) = b_s = b \quad (s = \overline{1, n}),$$

причем  $b$  существует, т.е. конечно. Иначе говоря, независимые величины

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

можно рассматривать как значения, полученные в  $n$  независимых испытаниях относительно одной и той же случайной величины  $x$ . В таком случае, согласно теореме Чебышева имеем

$$P \left\{ -\varepsilon < \frac{\sum_{s=1}^n x_s}{n} - a < \varepsilon \right\} > 1 - \eta.$$

Таким образом, из теоремы Чебышева получается как следствие важная теорема:

Если с величиной  $x$ , имеющей конечную дисперсию, производится достаточно большое число независимых испытаний, то с вероятностью, сколь угодно близкой к достоверности, можно ожидать, что среднее арифметическое наблюдаемых значений величины  $x$  будет произвольно мало отличаться от ее математического ожидания.

Теоремы Пуассона и Бернулли мы рассмотрели ранее, когда описывали биномиальное распределение.

Таким образом, рассмотренные теоремы доказывают, что чем больше объем выборки, тем точнее средний результат, т.е. выборочная средняя ( $\bar{X}$ ) в меньшей мере отклоняется от средней арифметической ( $M$ ) генеральной совокупности, и наоборот, чем меньше выборка, тем меньше и

шансов на то, что выборочная средняя совпадет по величине со средней арифметической генеральной совокупности. Действие этого закона основано на свойстве самих случайных величин, отрицательные и положительные значения которых способны компенсировать друг друга и тем полнее, чем большему числу испытаний подвергается случайная величина. На этом свойстве случайных величин компенсировать друг друга и основана относительная устойчивость средних значений. Поэтому описанные в предыдущей главе закономерности распределения, наблюдаемые в ранжированных совокупностях вариант, следует рассматривать как проявление наиболее общего закона поведения случайных величин - закона больших чисел.

Закон больших чисел утверждает, что практически маловероятно значительное отклонение средней арифметической выборочной совокупности ( $\bar{X}$ ) от средней арифметической генеральной совокупности ( $M$ ), если число наблюдений достаточно велико.

## **9.2 Основные задачи статистического оценивания. Смещенные и несмещенные оценки**

Мы рассмотрели теоретические аспекты статистического оценивания. Теперь рассмотрим его практическое приложение. К.Е. Никитин и А.З. Швиденко рассматривают оценки в следующей интерпретации.

Статистическое оценивание информации включает три основные задачи: нахождение по выборке наиболее вероятных значений оценок некоторых параметров («точечное» оценивание); оценку интервалов, относительно границ которых с определенной вероятностью можно утверждать, что они содержат неизвестный параметр (интервальное оценивание); проверку справедливости тех или иных утверждений относительно изучаемого явления (проверка статистических гипотез). Эти задачи тесно взаимосвязаны, но можно решать каждую отдельно или все одновременно в зависимости от цели статистического анализа. Например, мы, определив запас древесины на 1 га в древостое дуба, нашли его равным  $250 \text{ м}^3$ . Эту величину надо оценить следующим образом.

- Насколько точно значение  $250 \text{ м}^3/\text{га}$  (% ошибки) и какие допустимы отклонения от нее в обе стороны: точечное оценивание и оценка интервала.

- Насколько найденная величина соответствует среднему запасу дубовых древостоев в данном возрасте при определенном классе бонитета.

Оценки параметров получают различными методами. Поэтому, естественно, выбирают те, которые дают наилучшие результаты. Для этой цели вводят понятия несмещенности, состоятельности, эффективности и достаточности оценок.

Оценку называют несмещенной, если она не дает систематической ошибки при оценивании некоторого параметра  $\theta$ , другими словами, если среднее значение оценки, полученное по множеству выборок, практически совпадает с  $\theta$ . В принципе может быть несколько несмещенных оценок одно-

го и того же параметра; например, в качестве оценки среднего значения генеральной совокупности при некоторых условиях можно взять выборочное среднее или выборочную медиану. В этом случае целесообразно брать оценку с меньшей изменчивостью.

Оценку называют состоятельной, если по мере увеличения объема выборки она все больше приближается к оцениваемому параметру. Состоятельную оценку с наименьшей дисперсией называют эффективной. Наконец, достаточность оценки понимают в том смысле, что не существует другой оценки параметра  $\theta$ , вычисленной на основании данной выборки и содержащей дополнительную информацию об этом параметре. Достаточность оценки влечет за собой ее эффективность и состоятельность.

Для нахождения оценок с заданными свойствами существует ряд методов, из которых наиболее часто применяют метод максимального правдоподобия и метод моментов. Метод максимального правдоподобия предполагает использование в качестве оценки параметра  $\theta$  такого значения, которое (по данным выборки) наиболее вероятно с точки зрения возможности замены им  $\theta$ . Этот метод дает эффективные, но не всегда несмещенные оценки, а для выборок большого объема оценки имеют нормальное распределение.

Метод моментов обеспечивает состоятельные, но не всегда эффективные оценки. В этом методе, использованном выше при аппроксимации выборочных распределений, параметры распределения представляют через моменты. По выборке вычисляют оценки моментов и подставляют их в полученные уравнения, по которым находят неизвестные параметры.

Целесообразность практического использования оценок с теми или иными свойствами должна обсуждаться в контексте конкретных задач. Зачастую «хорошие» свойства оценок совпадают. Так, выборочное среднее всегда является несмещенной и состоятельной оценкой среднего генеральной совокупности, а при нормальности исходной совокупности – еще и достаточной, в то время как медиана в качестве выборочной оценки среднего таковой не является, так как ее дисперсия больше дисперсии выборочного среднего. В некоторых случаях лучше иметь оценку несколько смещенную, но состоятельную; иногда несмещенность можно устранить. Так, при нахождении дисперсии, знаменатель  $n-1$  объясняется именно тем, что выборочная дисперсия  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$  является смещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности, а сомножитель  $n/(n - 1)$  это смещение устраняет.

### **9.3 Ошибки статистик и их определение. Доверительный вариант**

Для практического использования нам надо знать ошибки основных статистик распределения: среднего значения, среднего квадратического отклонения, коэффициента вариации, асимметрии и эксцесса.

В литературе часто встречается выражение «ошибка репрезентативности». Поэтому начнем рассмотрение с нее.

**Ошибки репрезентативности.** Расхождение между величиной средней арифметической ( $\bar{X}$ ) выборки и величиной средней арифметической генеральной совокупности ( $M$ ) принято называть ошибкой репрезентативности, т.е. ошибкой, допускаемой не в самом процессе измерительной и вычислительной работы, а в результате случайного отбора вариант из генеральной совокупности при образовании выборки. Репрезентативная ошибка – это не техническая, а статистическая ошибка. Она указывает на величину отклонения выборочной средней ( $\bar{X}$ ) от средней ( $M$ ) генеральной совокупности.

Величина репрезентативной ошибки определяется по разности между средними величинами выборки и генеральной совокупности, т.е. как  $(\bar{X})-M$ . Однако этот показатель в практике использовать невозможно, так как средняя арифметическая генеральной совокупности обычно остается неизвестной. Если же средняя ( $M$ ) генеральной совокупности известна, то указанная разность  $(\bar{X}-M)$  теряет свое значение. Поэтому ошибки репрезентативности определяются не прямым, а косвенным путем – через отклонения вариант от выборочной средней.

**Ошибка отдельно взятой варианты.** Если судить о величине статистической ошибки отдельно взятой варианты, то она равна среднему квадратическому отклонению, так как любое эмпирическое распределение, следующее нормальному закону, практически укладывается в пределах плюс-минус трех сигм, т.е.  $\bar{X} \pm 3\sigma$ . Ошибку репрезентативности называют поэтому средней квадратической ошибкой, или просто средней ошибкой. Будем ее обозначать через  $m$ , указывая при этом и характеристику, которую она сопровождает. Таким образом, средняя квадратическая ошибка отдельно взятой варианты выразится в виде

$$m_{x_i} = \pm \sigma .$$

Среднее квадратическое отклонение имеет двоякое значение: во-первых, оно основное мерило изменчивости, показатель variability признаков, а во-вторых, среднее квадратическое отклонение служит в качестве статистической ошибки отдельно взятой варианты.

**Ошибка средней арифметической.** Математическая статистика утверждает, что выборочная средняя ( $\bar{X}$ ) отклоняется от своего математического ожидания или средней арифметической ( $M$ ) генеральной (теоретически рассчитанной) совокупности меньше в  $\sqrt{n}$  раз по сравнению с отдельными вариантами данного распределения. Отсюда следует, что средняя квадратическая ошибка выборочной средней ( $\bar{X}$ ) равняется частному от деления среднего квадратического отклонения на корень квадратный из числа всех вариант данной совокупности, т.е.

$$m_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (9.12)$$

Приведем пример. Возьмем распределение числа деревьев по толщине и сделаем нужные нам вычисления (таблица 9.1.).

Таблица 9.1 – Вычисление среднего значения и его ошибки на примере распределения диаметров в сосновом 80-летнем древостое II класса бонитета

Ступени толщины (классовые варианты, $x_i$ )	Число стволов (частоты, $n_i$ )	$x_i \cdot n_i$	$a = x_i - \bar{X}$	$a^2$	$n_i a^2$
12	4	48	-14	196	784
16	8	128	-10	100	800
20	26	520	-6	36	936
24	43	1032	-2	4	172
28	31	868	+2	4	124
32	22	704	+6	36	792
36	11	396	+10	100	1100
40	4	160	+14	196	784
44	1	44	+18	324	324
Итого	150	3900	-		5816

По данным таблицы 9.1. вычислим статистики распределения и их основные ошибки.

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{3900}{150} = 26$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i a_i^2}{\sum n_i}} = \sqrt{\frac{5816}{150}} = \sqrt{38,77} = 6,23 \approx 6,2$$

$$m_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6,23}{\sqrt{150}} = \frac{6,23}{12,247} = 0,509 \approx 0,51 \approx 0,5$$

Принято записывать среднюю величину вместе с ее основной ошибкой, т.е.  $\bar{X} = 26 \pm 0,5$ .

Средняя ошибка указывает наиболее вероятные границы, в которых возможны случайные колебания величины средней арифметической в зависимости от объема выборки. При увеличении числа испытаний сред-



няя ошибка уменьшается. Когда число наблюдений неограниченно возрастает, средняя ошибка стремится к нулю, т.е. при  $N \rightarrow \infty$  и  $m \rightarrow 0$ . Следовательно, средняя ошибка есть мера точности, или относительной достоверности, нашего суждения о возможных колебаниях средних показателей варьирующих величин.

Поскольку весь вариационный ряд нормально распределяющейся случайной величины  $X$  практически укладывается в пределах между  $\bar{X}+3\sigma$  и  $\bar{X}-3\sigma$  на 99,9 %, то можно сказать, что генеральная средняя ( $M$ ) таких распределений не выходит за пределы утроенного значения средней ошибки средней арифметической любой выборки, взятой из данной генеральной совокупности, т.е. она всегда заключена между пределами от  $\bar{X} - 3m_{\bar{x}}$  до  $\bar{X} + 3m_{\bar{x}}$  или в пределах  $\bar{X} \pm 3m_{\bar{x}}$ . Поэтому утроенное значение средней квадратической ошибки называется предельной ошибкой средней арифметической выборочной совокупности. Выражение  $\bar{X} \pm 3m_{\bar{x}}$  заключает в себе содержание так называемого “правила утроенной ошибки” и правила трех сигм.

При вычислении ошибки средней арифметической на малых выборках число наблюдений ( $N$ ) берется с “числом степеней свободы”, и формула (9.12) принимает следующий вид:

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{X})^2}{N(N-1)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N-1}} \quad (9.13)$$

При большом  $N$  разница между  $N$  и  $N-1$  не существенная, и формулу (9.13) можно записать как  $m_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$  (9.13a)

Когда средняя арифметическая вычисляется прямым способом на материале, не сгруппированном в классы, ошибку можно определить по следующей формуле:

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\sum x^2}{N} - \bar{X}^2\right)}{N-1}} \quad (9.14)$$

Например, имеются следующие десять вариант, выражающих толщину деревьев на опытном участке в культурах сосны возрастом 10 лет:

5, 6, 6, 7, 4, 4, 2, 5, 5, 6

Вычисления здесь будут проведены по схеме, приведенной в таблице 9.2.

Если же средняя арифметическая определяется на несгруппированном в классы материале коротким способом моментов (способом условной средней), то средняя ошибка вычисляется по формуле (9.11):

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\left[ \frac{\sum a^2}{N} - \left( \frac{\sum a}{N} \right)^2 \right] / (N-1)}, \text{ где} \quad (9.15)$$

$a=x-A$ , т.е. отклонение варианты от условной средней. Продемонстрируем применение этой формулы на предыдущем примере (таблица 9.3).

Таблица 9.2 – Вычисление ошибки среднего при несгруппированных вариантах, формула (9.14)

№ п/п $x_i$	Толщина деревьев, варианты $n_i$ , см	$n_i^2$	Вычисление
1	5	25	$\bar{x} = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{n_i} = \frac{50}{10} = 5 \text{ см}$ <p>Из уравнения (9.14)</p> $m_x = \sqrt{\left( \frac{268}{10} - 25 \right) + 9} = \sqrt{1,68 + 9} = \sqrt{10,68} = 3,27 \text{ м}$ $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum x_i a_i^2}{\sum n_i}} = \sqrt{\frac{268}{50}} = \sqrt{5,36} = 2,31$
2	6	36	
3	6	36	
4	7	49	
5	4	16	
6	4	16	
7	2	4	
8	5	25	
9	5	25	
10	6	36	
Сумма	50	268	

Таблица 9.3 – Схема вычисления ошибки среднего по формуле (9.15)

№ п/п $x_i$	Численности $n_i$	Отклонения от условной средней $a$	$a^2$	Вычисление по формуле (9.15)
1	5	+1	1	$\bar{x} = 4 + \frac{10}{10} = 5 \text{ м}$ $m_x = \sqrt{\frac{28}{10} - \left( \frac{10}{10} \right)^2 + 9} = \sqrt{2,8 - 1 + 9} = \sqrt{10,8} = 3,29$
2	6	+2	4	
3	6	+2	4	
4	7	+3	9	
5	4=k	0	0	
6	4	0	0	
7	2	-2	4	
8	5	+1	1	
9	5	+1	1	
10	6	+2	4	
Сумма	50	+10	28	

Из приведенных расчетов следует, что полученный результат практически (с учетом округления) идентичен предыдущему.

**Ошибка среднего квадратического отклонения.** Понятие ошибки репрезентативности относится не только к средней арифметической, но и к другим средним показателям, в частности к среднему квадратическому отклонению, характеризующему варьирование признака в данной совокупности. Средняя ошибка среднего квадратического отклонения вычисляется по формуле

$$m_{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{2N}} \quad (9.16)$$

$$m_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \quad \text{или} \quad m_{\sigma^2} = \sigma^2 \sqrt{\frac{2}{N}} \quad (9.16 \text{ а})$$

В нашем примере (таблица 9.1), где  $N=150$ ,  $\sigma=6,2$ , ошибка  $m_{\sigma}$  составит

$$m_{\sigma} = \frac{6,2}{\sqrt{300}} = \frac{6,2}{17,32} = 0,356.$$

Следовательно,  $m_{\sigma}$  лежит в пределах (с достоверностью 99,9 %)  $6,2 \pm 3 \cdot 0,356 = 6,2 \pm 1,068$ .

Для примера, рассчитанного по таблице 9.2  $m_{\sigma} = \frac{2,31}{\sqrt{20}} = \frac{2,31}{4,47} = 0,517$ .

Тогда пределы  $m_{\sigma}$  следующие:  $2,31 \pm 1,55$ .

**Ошибка коэффициента вариации.** Средняя ошибка коэффициента вариации ( $V$ ) определяется по следующей приближенной формуле:

$$m_V = \frac{V}{\sqrt{2N}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{V}{100}\right)^2} \quad (9.17)$$

В формулу (9.17) можно также представить в следующем виде

$$m_V = V \sqrt{\frac{0,5 + 0,0001V^2}{N}} \quad (9.17 \text{ а})$$

Вычислим по данным таблицы 9.1 коэффициент вариации и его ошибку.

$$V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100\% = \frac{6,2}{26} \cdot 100\% = 23,8\% \approx 24\%$$

Тогда по формуле (9.17)

$$m_V = \frac{23,8}{\sqrt{300}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{23,8}{100}\right)^2} = \frac{23,8}{17,32} \cdot \sqrt{1 + 0,113} = 1,37 \cdot 1,05 = 1,44$$

По формуле (9.17а)  $m_v = 23.8 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.0001 \cdot 23.8^2}{150}} = 23.8 \cdot 0.0609 = 1.449$ .

Значения  $m_v$  по обоим формулам с учетом округления практически одинаковы.

Следовательно, коэффициент вариации генеральной совокупности, к которой принадлежит наша выборка не выйдет за пределы  $m_v = 23,8 \pm 4,32$ .

**Средняя ошибка доли.** В отношении качественных признаков, когда средняя арифметическая показывает относительную численность одной из альтернатив и выражается либо в абсолютных значениях, либо в долях единицы или в процентах, средняя ошибка выражается в тех же значениях, что и альтернативы. Так, если признак выражен в абсолютных значениях, то средняя ошибка, называемая ошибкой относительной частоты, равняется:

$$m_D = \pm \sqrt{\frac{p(N-p)}{N}} \quad (9.18)$$

Здесь  $p$  - частота одной из альтернатив;  $N$  - общее число наблюдений, т.е.  $p_1 + p_2 = N$ .

Например, при посадке 100 семян березы карельской получено 44 дерева карельской березы и 56 деревьев березы повислой (обычной). Определим среднюю ошибку этого отношения:

$$m_D = \sqrt{\frac{44 \cdot 56}{100}} = 4,96 \approx 5.$$

Можно сказать, что среди потомства карельской березы есть  $44 \pm 5$  особей.

Если альтернативы выражаются долями единицы, то ошибка относительной частоты определяется по аналогичной формуле (9.19).

$$m = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \quad (9.19)$$

Формула достаточно ясна и без числовых примеров.

Если численность одной из альтернатив близка к нулю, то среднюю ошибку относительной частоты можно определить из отношения

$$m = \frac{N}{N+1}, \quad \text{или} \quad m = \frac{100}{N+1} \%,$$

когда альтернативы выражены в процентах.

**Ошибки показателей асимметрии и эксцесса.** Средняя ошибка показателя асимметрии определяется по следующей формуле:

$$m_{as} = \sqrt{\frac{6}{N}}, \quad (9.20)$$

или более точно по формуле

$$m_{as} = \sqrt{\frac{6N(N-1)}{(N-2)(N+1)(N+3)}} \quad (9.21)$$

Ошибку коэффициента эксцесса можно вычислить по следующим аналогичным формулам:

$$m_{Ex} = 2\sqrt{\frac{6}{N}} \quad \text{или} \quad m_{Ex} = \sqrt{\frac{24}{N}} \quad (9.22)$$

или по более точной формуле

$$m_{Ex} = \sqrt{\frac{24N(N-1)^2}{(N-3)(N-2)(N+3)(N+5)}} \quad (9.23)$$

Определим ошибки асимметрии и эксцесса, используя ранее рассмотренный пример (таблица 8.2) ряда распределения диаметров сосны.

Вспомним, что по данным таблицы 8.2 мы получили  $\alpha=0,203$ ;  $E=-0,55$ . Число стволов в нашем примере составило 200.

Тогда

$$m_{as} = \sqrt{\frac{6}{200}} = \sqrt{0,03} = 0,173$$

или более точно

$$m_{as} = \sqrt{\frac{6 \cdot 200 \cdot 199}{198 \cdot 201 \cdot 203}} = \sqrt{\frac{238800}{8078994}} = \sqrt{0,0296} = 0,172.$$

Результаты получились практически одинаковые. Поэтому при достаточно большом  $N > 30-40$  рациональнее использовать формулу (9.16).

Ошибка эксцесса для нашего примера равна (формула (9.18))

$$m_{Ex} = 2\sqrt{\frac{6}{200}} = 0,343.$$

По уточненной формуле (9.19)

$$m_{Ex} = 2\sqrt{\frac{6 \cdot 200 \cdot 199^2}{197 \cdot 198 \cdot 203 \cdot 205}} = 2\sqrt{\frac{47521200}{162323470}} = 2\sqrt{0,293} = 0,342.$$

Результат получился подобным тому, что видели при вычислении  $m_{as}$ , т.е. при  $N > 30$  лучше пользоваться формулой (9.18).

Таким образом, повторим все сказанное об ошибках статистик. Они определяются по формулам

$$m_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}; \quad \text{а при } N < 30 \quad m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N-1}};$$

или при больших  $N$

$$m_x = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$m_{\sigma^2} = \sigma^2 \sqrt{\frac{2}{N}} \quad \text{или} \quad m_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\frac{N}{2}}}; \quad m_{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}};$$

$$m_v = \frac{V}{\sqrt{2n}} \left\{ 1 + \left( \frac{V}{100} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{или} \quad m_v = V \sqrt{\frac{0.5 + 0.0001V^2}{N}};$$

$$m_{\alpha} = \sqrt{\frac{6}{N}}; \quad m_E = 2\sqrt{\frac{6}{N}} = 2m_{\alpha}.$$

Понятие об ошибках статистик тесно связано с величиной доверительного интервала. Ранее мы уже упоминали доверительные интервалы в  $1\sigma(0,68)$ ,  $2\sigma(0,95)$ ,  $3\sigma(0,999)$ . Здесь дадим более обстоятельное описание доверительных интервалов.

**Доверительные вероятности и уровни значимости.** В математической статистике, а также и в биометрии принято существовать того или иного результата оценивать по значению трех вероятностей, близких к достоверности:  $P_1=0,95$ , или 95%,  $P_2=0,99$ , или 99%,  $P_3=0,999$ , или 99,9%. Эти вероятности получили название доверительных. Вероятности же, которыми решено пренебрегать, т.е.  $P_1=0,05$ , или 5%,  $P_2=0,01$ , или 1%, и  $P_3=0,001$ , или 0,1%, получили название уровней значимости, или уровней существенности. И те и другие вероятности обозначаются символами, как  $P_{0,95}$  или  $P_{0,05}$  и т.д.

Каждой доверительной вероятности соответствует определенное значение нормированного отклонения ( $t$ ):

вероятности	$P_1=0,95$	соответствует	$t_1=1,96$
"-	$P_2=0,99$	"-	$t_2=2,50$

**Доверительный интервал и границы доверия.** Выше было сказано, что величина ошибки выборочной средней определяется по разности между этой средней ( $\bar{X}$ ) и средней генеральной совокупности ( $M$ ), т.е. как  $\bar{X}-M$ . Можно ли по эмпирическим данным определить наиболее вероятные границы, в которых находится средняя ( $M$ ) генеральной совокупности? Математическая статистика дает на этот вопрос положительный ответ. Интервал, в котором с заданной вероятностью или уровнем значимости заключена средняя арифметическая генеральной совокупности, называется доверительным интервалом. Границы этого интервала получили название доверительных границ, или границ доверия. Как же определить доверительный интервал и его границы? Это достигается нормированием отклонения варианты, или выборочной средней, от средней генеральной совокупности. Так, если взять нормированное отклонение варианты от выборочной средней

$$t = \frac{x_i - \bar{X}}{\sigma},$$

то можно преобразовать его следующим образом:  $x_i - \bar{X} = t\sigma$ . Аналогично отклонение выборочной средней  $\bar{X}$  от средней генеральной совокупности ( $M$ ) выражается через

$$\bar{X} - M = t \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \text{ или } \bar{X} - M = t m_{\bar{X}}.$$

Величина этого отклонения зависит, следовательно, от степени вариабельности признака, а также от уровня вероятности, с которой определяется доверительный интервал. Заменяя в этом уравнении знаки на обратные и переставив  $\bar{X}$  в правую часть уравнения получим

$$M = \bar{X} - t m_{\bar{X}}.$$

А так как  $\bar{X}$  может быть и больше и меньше  $M$ , то указанное выражение можно написать в таком виде:  $M = \bar{X} \pm t m_{\bar{X}}$ . Отсюда доверительный интервал для средней арифметической генеральной совокупности выразится следующим неравенством:

$$\bar{X} - t m_{\bar{X}} \leq M \leq \bar{X} + t m_{\bar{X}},$$

где  $\bar{X} - t m_{\bar{X}}$  и  $\bar{X} + t m_{\bar{X}}$  - границы доверительного интервала.

Из изложенного вытекает много важных практических приложений для лесного хозяйства. Например, требуется, чтобы материально-денежная оценка лесосек проводилась достаточно точно на каждой из протаксированных делянок, т.е. достоверность здесь должна равняться  $3\sigma$ .

Приемлемая технология таксации лесосек обеспечивает достоверность в  $3\sigma$  при точности в  $\pm 10\%$ . Правда, 1-2 лесосека из 1000 могут не вложиться в

точность  $\pm 10\%$ , но на это пришлось пойти, так как более высокая точность учета требует иной, гораздо более дорогой технологии, и экономически не оправдана.

Но уже совокупность 3-5 лесосек при отсутствии систематической ошибки должна таксироваться с точностью 5-6%, а при наличии 10 лесосек точность должна составлять 3-4% и т.д.

#### 9.4 Ошибка суммы или разности средних значений

Часто нам надо знать, различаются ли между собой средние величины. Например, спустя  $n$  лет после внесения удобрений средний диаметр опытного древостоя составил 24 см, а контрольного – 22 см. Возникает вопрос, насколько эта разница существенна и является результатом проведенных мероприятий или зависит от случайных причин. Для оценки таких различий используют  $t$ -критерий Стьюдента.

**$t$ -распределение Стьюдента.** Прежде чем приступить к рассмотрению вопросов, связанных с методикой оценки достоверности различий, наблюдаемых между выборочными средними, необходимо рассмотреть еще одну сторону нормированного отклонения, имеющую прямое отношение к статистике малой выборки. В данном случае имеется в виду закон распределения величин нормированного отклонения выборочной средней ( $\bar{X}$ ) от средней арифметической генеральной совокупности ( $M$ ), открытый английским математиком Вильямом Госсетом в 1908 году. Этот ученый печатался под псевдонимом Стьюдент (Student). Стьюдент установил, что вероятность нормированного отклонения  $\bar{X}-M$ :  $\sigma = t$  выражается следующим уравнением:

$$P(t) = C \left( 1 + \frac{t^2}{N-1} \right)^{-\frac{1}{2}N},$$

которое носит название распределения Стьюдента. Здесь  $P(t)$  обозначает вероятность указанного нормированного отклонения, а  $C$  – некоторый множитель, зависящий лишь от объема выборки ( $N$ ).

В практике (при независимых  $x_i$ ) для оценки достоверности разницы между средними используют следующие приемы.

Так, если  $x_i$  независимы, то, например, для  $y = x_1 - x_2$  имеем

$$m_y = m_{x_1 - x_2} = \sqrt{m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2}. \quad (9.24)$$

Выражение (9.24) – основная ошибка разности двух случайных величин. Этот показатель можно применять для оценки значимости различия между средними двух выборок, например, для суждения о том, можно ли считать, что данные выборки принадлежат к одной генеральной совокупности. Для этой цели вычисляют величину



$$t^* = \frac{|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2|}{m_{x_1-x_2}} = \frac{|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2|}{\sqrt{m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2}}. \quad (9.25)$$

Если  $t^* > 2$ , то с вероятностью 0,95, а при  $t^* > 3$  с вероятностью, практически не отличающейся от 1, можно утверждать, что различие между средними значимо.

Приведем пример практического использования t-критерия Стьюдента в лесохозяйственной практике.

Пусть на некотором участке лесных культур сосны возрастом 30 лет II класса бонитета внесли минеральные удобрения. Через 10 лет измерили опытный и контрольный участок, которые 10 лет назад были аналогичны, т.е. имели средние диаметры 10,9 (контроль) и 11 см (опыт), а через десять лет соответственно 14,0 и 15,1 см. Ошибка среднего значения составила в 40 лет 0,3 и 0,4 см. Используя формулу (9.25) найдем

$$t = \frac{15,1 - 14,0}{\sqrt{0,3^2 + 0,4^2}} \frac{1,1}{\sqrt{0,09 + 0,16}} = \frac{1,1}{\sqrt{0,25}} = \frac{1,1}{0,5} = 2,2.$$

Таким образом, с вероятностью 0,95 мы можем утверждать, что удобрения дали положительный эффект.

В практике лесного хозяйства и, особенно при проведении научных исследований, t-критерий применяется повсеместно. Критические значения t-критерия Стьюдента при определенном числе степеней свободы для разных уровней вероятности приведены в приложении Е.

## 10. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

- 10.1. Статистические гипотезы. Простые и сложные гипотезы
- 10.2. Параметрические методы оценки гипотез
- 10.3. Непараметрические методы оценки гипотез
- 10.4. Проверка статистических гипотез в практике лесного хозяйства и их использование а в лесном хозяйстве

### 10.1 Статистические гипотезы. Простые и сложные гипотезы

Гипотеза – это научно обоснованное предположение о вероятности некоторого события, явления, закона и т.д. Гипотезой может считаться не любое предположение, а только такое, которое имеет некоторое научное обоснование, хотя еще недостаточно доказанное и проверенное. Поэтому гипотеза может как подтвердиться, так и быть отвергнутой. Но предварительное научное обоснование сделать надо, чтобы не выполнять явно ненужную работу, проверяя предположения, которые ни на чем не основаны.

Гипотеза, которая находит подтверждение и обоснование, перерастает в теорию, закон, закономерность и т.д. Примером подтвердившихся гипотез, ставших теориями и законами, служит периодическая система элементов Д.И. Менделеева (1834-1907), атомное строение материи, строение атома, наличие кварков. В лесном хозяйстве теория строения древостоев выдвинутая в 19 веке, являлась лишь гипотезой, которая затем подтвердилась работой известных лесоводов А.В. Тюриня (1882-1979), В.К. Захарова (1882-1966), Н.В. Третьякова (1880-1957), Ф.П. Моисеенко (1894-1979) и других.

В настоящем пособии мы будем рассматривать не все гипотезы, а только статистические, т.е. относящиеся к области математической статистики. Для их проверки существует стандартная процедура. Для того, чтобы ее пояснить, возьмем простой пример с появлением перед наблюдателем в крупном городе мужчин или женщин. Мы уже видели, что вероятности появления лиц одного пола равны и составляют  $P_m = P_{ж} = 0,5$ . Такое соотношение будет наблюдаться, если общее число лиц, прошедших мимо наблюдателя  $N$ , достаточно велико  $> 30$ , а лучше  $> 100$ , а в соотношении мужчин и женщин нет асимметрии, т.е. соблюдена симметрия, что обычно для крупных белорусских городов. Допустим, что такая симметрия нарушена, скажем проводим наблюдение в военном городке или в российском «городе невест» - Иваново. В этом случае соотношение полов нарушится, что будет свидетельствовать о некорректности опыта.

При анализе гипотез в начале необходимо остановиться на следующем важном факте: результат эксперимента, подтверждающий справедливость выдвинутой гипотезы, почти никогда не может служить основанием для принятия этой гипотезы. В то же время результат, несовместный с выдвинутой гипотезой, вполне достаточен для отклонения ее как ложной. Ко-

нечно, ошибки всегда могут иметь место, однако высказанное положение является важным и требует тщательного обоснования. Причина того, что результат, подтверждающий выдвинутую гипотезу, не обязательно может являться основанием для ее принятия, состоит в том, что данный результат может быть совместным также и с другими гипотезами и, следовательно, не обязательно может служить доказательством справедливости данной гипотезы против других выдвинутых альтернатив. Например, встреча 53 мужчин из 100, встреченных лиц обоих полов совместно с гипотезой о том, что количество мужчин и женщин в городе примерно одинаково. Этот результат совместен и с предположением, что мужчин в городе не намного, но больше. Таким образом, результат, совместный с первоначально выдвинутой гипотезой, не является стопроцентным доказательством ее достоверности. Даже встреча 50 мужчин не может служить основанием для заключения, что в городе имеется строго одинаковое количество лиц обоих полов. С другой стороны, встреча 90 мужчин при 100 прошедших прохожих могло бы на практике служить для опровержения гипотезы об одинаковом количестве мужчин и женщин в исследуемом населенном пункте, скажем в вахтовом поселке нефтяников в Сибири.

В следующем примере предположим, что средний коэффициент умственного развития некоторой совокупности людей составляет 100. Результат выборки, показавший, что средний показатель равен 102, совместен с выдвинутой нами гипотезой. Однако этот результат совместен также и с предположением, что средний коэффициент умственного развития равен 101 или 99, и, конечно же, совместен с гипотезой о том, что средний показатель исходной совокупности составляет 102. Следовательно, данный результат никоим образом не может являться свидетельством предпочтительности гипотезы, в соответствии с которой средний коэффициент равен 100. Допустим теперь, что некоторая выборка дала средний коэффициент умственного развития, равный 135. Предположив, что объем выборки был достаточно большим, мы могли бы показать следующее: если исходная гипотеза является достоверной, то мы практически никогда не получили бы подобного результата. На основании этого вывода полученный результат вполне обоснованно может быть использован нами в качестве свидетельства ложности выдвинутой гипотезы, причем риск совершения ошибки в данном случае был бы минимальным.

Все вышесказанное основывается на уже высказанном факте, что обычно результат эксперимента, совместный с выдвинутой гипотезой, оказывается также совместным и с рядом других гипотез. В итоге подобный результат не может быть принят в качестве обоснования предпочтительности некоторой гипотезы перед другими гипотезами. Однако мы всегда можем получить расходящийся с выдвинутой гипотезой результат, который может вызвать существенные сомнения в ее достоверности. Гипотезу можно сравнить с показаниями обвиняемого в суде. Он не может доказать истинности своих слов. В то же время некоторые

приведенные им факты оставляют открытой возможность для выдвижения предположений о том, что он мог действовать не так, как описывал. И прокурор может подвергнуть сомнению точность его рассказа, показав, что можно интерпретировать приведенные факты по-другому.

В то же время для доказательства виновности обвиняемого должны быть предоставлены неопровержимые доказательства. Во всех цивилизованных странах действует принцип «презумпции невиновности». Это значит, что все сомнительные гипотезы трактуются в пользу обвиняемого с целью исключения осуждения невиновного, т.е. соблюдается правило, что для общества менее вредно не осудить виновного, чем наказать невиновного. К сожалению этот принцип в нашей стране долгое время (с 20 и до середины 50-х годов 20 века) нарушался, а господствовала презумпция виновности, что привело к тяжелым последствиям и гибели миллионов граждан.

В биометрии для доказательства некоторого утверждения часто применяют метод, известный в математике, как «доказательство от противного». Для этого в качестве рабочего инструмента используют так называемую «нулевую гипотезу». Поясним ее суть.

Нулевая гипотеза. Когда мы не в состоянии отвергнуть гипотезу, мы тем самым признаем, что эта гипотеза может оказаться верной. С другой стороны, если мы можем отвергнуть выдвинутую гипотезу, то тем самым делаем вполне определенный вывод о ее ложности.

Последнее положение является очень важным. При проверке гипотез мы можем сделать окончательный вывод только в случае, когда в состоянии отвергнуть выдвинутую гипотезу. Следовательно, цель проводимого нами эксперимента должна заключаться в *опровержении* проверяемой гипотезы. Это означает, что в качестве гипотезы мы должны сформулировать предположение, *альтернативное* тому, во что верим.

Например, если надо показать, что деревья дуба в целом выше, чем деревья граба, то выдвинем гипотезу об *отсутствии различий* в их росте. Затем попробуем отвергнуть эту гипотезу. В другом случае чтобы доказать, что между анатомическим строением древесины дуба и березы есть существенные различия, нужно подвергнуть проверке гипотезу, что между ними *не существует различий*. И вновь мы должны попытаться отвергнуть эту последнюю гипотезу, чтобы тем самым установить истинность нашего исходного предположения.

О п р е д е л е н и е . *Гипотеза, в соответствии с которой отсутствуют различия между различными совокупностями, называется нулевой гипотезой.*

Гипотеза, которую мы будем в состоянии проверить, не может быть сформулирована на основе любого суждения. Мы это уже наблюдали на примере встречи с лицами разных полов. Суждение о том, что мужчин и женщин в городе имеется одинаковое количество при встрече 50 мужчин и столько же женщин, недостаточно, чтобы на его основе можно было сформулировать некоторую определенную гипотезу. Подобные случаи обычны в практике исследований. Из сказанного следует, что экспериментатор дол-

жен сформулировать альтернативу тому, что он пытается доказать, в виде вполне определенной гипотезы. Только в случае, если это возможно, он может попытаться отвергнуть ее с тем, чтобы доказать справедливость своих исходных предположений.

Таким образом, первый шаг, предпринятый экспериментатором, должен состоять в формулировке статистической гипотезы, которую он надеется *опровергнуть* с тем, чтобы показать истинность своего исходного предположения. После этого он будет в состоянии применить процедуру проверки гипотезы.

В биометрии (статистике) применяются достаточно конкретные гипотезы, связанные с проведением числовых вычислений. Из этого следует, что понятие статистической гипотезы уже, чем понятие научной гипотезы вообще, и предполагает возможность статистического эксперимента для объективного подтверждения (или отклонения) рассматриваемого предположения. Иначе говоря, статистические гипотезы относятся к статистическим моделям.

Примерами гипотез такого рода являются предположения относительно параметров распределения - среднего, дисперсии и т.д. (параметрические гипотезы), либо относительно типа распределения или связи - непараметрические гипотезы. Так, параметрическими гипотезами являются утверждения: среднее значение в некоторой генеральной совокупности равно числу  $a$  (обозначается  $H_0 : \bar{X} = a$ ), среднее и (или) дисперсии двух выборок равны (не равны) между собой ( $H_0 : \bar{X}_1 = \bar{X}_2$ ,  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  и т.д.). Непараметрическая гипотеза, например, одна из следующих: распределение диаметра данного древостоя подчиняется нормальному закону, рост древостоя в высоту есть экспоненциальная кривая и т.д. Гипотезы называют простыми, если они относятся к конкретному значению параметра (числу); сложные гипотезы представляют объединение простых.

На основании эксперимента, т.е. выборочных данных, решают вопрос: принять или отвергнуть гипотезы, т.е. свидетельствуют полученные данные “за” или “против” испытуемой гипотезы. Для решения этого вопроса мало рассматривать только проверяемую гипотезу  $H_0$ ; необходимо знать и область “против” гипотезы  $H_0$  - некоторую (их может быть несколько) исключаящую ее альтернативную гипотезу  $H_a$ .

Для проверки необходимо выбрать статистическую характеристику критерия - показатель, разделяющий зоны, каждая из которых свидетельствует в пользу гипотезы  $H_0$  или  $H_a$ . Если речь идет о параметрических гипотезах, то в качестве статистической характеристики обычно используют определенные значения рассматриваемого параметра, а основой для заключений служит распределение статистики, оценивающей данный параметр. Поэтому проверка гипотез теснейшим образом связана с интервальным оцениванием, но позволяет делать более глубокие заключения.

Рассмотрим в качестве примера гипотезу о том, что количество осадков в мае – июле влияет на текущий прирост древостоев. Для этого рас-

смотрим текущий прирост за разные годы с разным количеством осадков, выпавших за исследуемый период, например, 200 мм и 600 мм. Мы считаем, что при 600 мм осадков прирост будет выше. Проверке подлежит утверждение, что среднее значение текущего прироста (обусловленного влиянием осадков) в генеральной совокупности равно нулю, т.е. испытываемой является гипотеза  $H_0: \bar{X} = 0$  против альтернативной  $H_a: \bar{X} \neq 0$ . Выбор такой альтернативы говорит о том, что нас интересуют как положительные отклонения от проверяемой гипотезы (осадки в количестве 600 мм увеличивают прирост), так и отрицательные. В этом случае проверку гипотезы называют двусторонней. Если бы нас интересовали отклонения в одну сторону - только положительные (тогда альтернативная гипотеза  $H_a: \bar{X} > 0$ ) или отрицательные ( $H_a: \bar{X} < 0$ ), то проверка была бы односторонней. В данном случае испытываемая гипотеза простая, а все три альтернативные - сложные.

Основные идеи проверки гипотез рассмотрим на примере среднего значения. Пусть проверяется гипотеза  $H_0: \bar{X} = X_0$  и распределение статистики  $\tilde{X}$  известно (рисунок 10.1).

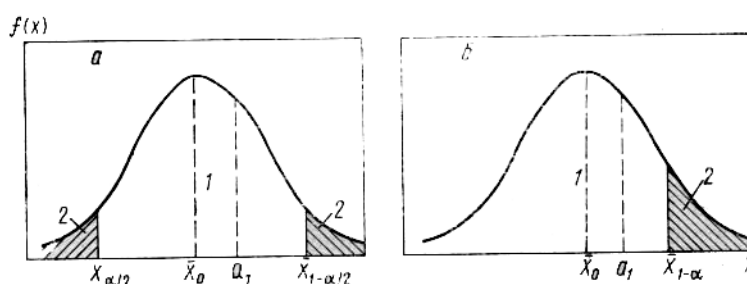


Рисунок 10.1 Зоны принятия (1) и отклонения (2) гипотез при уровне значимости  $\alpha$ :  
а - двусторонняя проверка; б - односторонняя

На основании выборки получено выборочное среднее  $\tilde{X}=a_1$ . Если  $a_1$  не отличается сильно от  $X_0$ , то естественно считать, что экспериментальные данные не противоречат проверяемой гипотезе, в противном случае ее отклоняют. В оценку величины различия вкладывается более конкретный смысл, а именно: еще до получения выборки задаются некоторой вероятностью  $\alpha$ , которая делит распределение статистики на две зоны. В первую относят все те значения статистики, которые признаются практически возможными (область допустимых значений), в другую - те значения статистики, появление которых в отдельном испытании (на основе одной выборки) признаются практически невозможными при условии, что проверяемая гипотеза верна. Поэтому величина  $\alpha$  должна быть достаточно мала, например 0,05 и 0,01. При двусторонней проверке критическая область имеет вид

$$p(|\tilde{X}| > x_{1-\alpha/2}) = p(\tilde{X} < x_{\alpha/2}) + p(\tilde{X} > x_{1-\alpha/2}) = \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha, \quad (10.1)$$

а при левосторонней и правосторонней односторонних проверках соответственно

$$p(\tilde{X} < x_{\alpha}) = \alpha; \quad p(\tilde{X} > x_{1-\alpha}) = \alpha; \quad (10.2)$$

где  $\tilde{X}$  - выборочное значение статистики;

$x_{\alpha}$  и  $x_{1-\alpha}$  - соответствующие квантили распределения данной статистики (статистические характеристики критерия).

Далее вычисляют конкретное выборочное значение  $\tilde{X}$ . Если оно попадает в область допустимых значений - гипотеза не отклоняется, если в критическую - гипотеза отклоняется, в связи с чем эти две области называют соответственно **областью принятия и непринятия гипотез**.

**Число  $\alpha$  называют уровнем значимости критерия.** От его величины зависит решение относительно испытуемой гипотезы. Если гипотеза  $H_0$  верна, то  $\alpha$  дает нам вероятность того, что статистика попадет в критическую область, и правильная гипотеза ошибочно будет отвергнута: при  $\alpha=0,001$  - в одном случае из 1000, при  $\alpha=0,05$  - в пяти случаях из 100 и т.д. Следует различать уровни значимости ( $\alpha$ ), уровень достоверности ( $p$ ) и доверительный коэффициент ( $t$ ). Между ними есть тесная связь, которая видна из таблицы 10.1

Таблица 10. 1 – Соотношение между различными критериями оценки статистических величин

Уровень значимости, $\alpha$	Уровень достоверности, $P$	Доверительный коэффициент, $t$
32%	68%	1,00
5%	95%	1,96
1%	99%	2,58
0,1%	99,9%	3,39

Дадим пояснение к таблице 10.1. Уровень значимости ( $\alpha$ ) – это значение вероятности, которое показывает, что различия между средними значениями можно считать несущественными.

Уровень достоверности ( $P$ ) – это случайная величина, для которой известен закон ее распределения. Обычно используют его критические значения для определенного уровня значимости ( $\alpha$ ) и числа степеней свободы ( $\gamma$ ). Например,  $t = 1$  - критическое значение t-критерия Стьюдента.

Методы оценки достоверности подразделяются на параметрические и непараметрические, о чем речь пойдет ниже.

Чем меньше уровень значимости, тем меньше вероятность ошибочного отклонения правильной гипотезы. Однако уменьшение величины уровня значимости не всегда целесообразно. Если нулевая гипотеза неверна (например, среднее генеральной совокупности в действительности отличается от  $X_0$ ), то с уменьшением  $\alpha$  уменьшается критическая область и увеличивается область допустимых значений, т.е. статистика при очень малых  $\alpha$  попадет в область допустимых значений проверяемой гипотезы  $H_0: \bar{X} = X_0$  и последняя не отклоняется, являясь в действительности ложной. Поэтому мало проверить гипотезу  $H_0$ , одновременно нужно испытывать альтернативную гипотезу  $H_a$ . Только в таком случае можно оценить риск отклонения гипотезы, когда она верна, или принятия гипотезы, когда она неверна, а верна альтернативная.

Итак, при оценке гипотез возможны ошибки двух типов:

1) гипотеза верна, но отвергается; вероятность этой ошибки дается уровнем значимости и равна  $\alpha$ . Величина  $1-\alpha$  дает нам вероятность принять гипотезу, если гипотеза верна;

2) гипотеза не верна, но принимается; если обозначить вероятность ошибки второго рода  $\beta$ , то  $1-\beta$  (мощность критерия) есть вероятность отклонить гипотезу, если она не верна, а верна альтернативная.

Соотношение между ошибками первого и второго рода иллюстрирует рисунок 10.2 применительно к среднему значению  $\bar{X}$ .

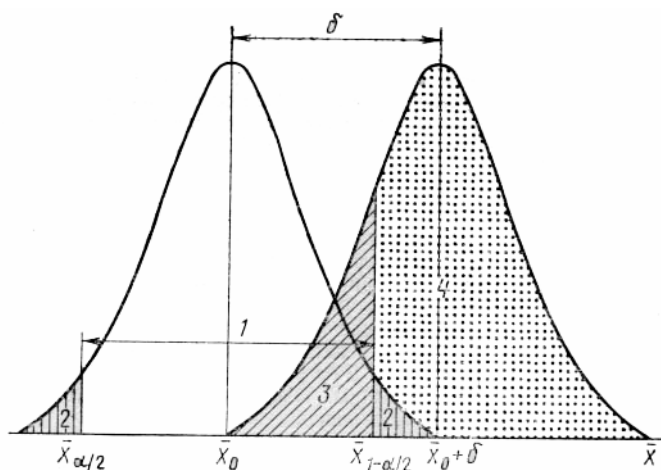


Рисунок 10.2 Ошибки первого и второго рода  
 1 - зона принятия  $H_0$ ; 2 - вероятность ошибки 1-го рода;  
 3 - вероятность ошибки 2-го рода; 4 - мощность критерия.

Если гипотеза верна, то площадь  $1-\alpha$  дает вероятность принять гипотезу  $H_0$ ,  $\alpha = \alpha/2 + \alpha/2$  - уровень значимости или вероятность ошибки 1-го рода. Пусть в действительности среднее генеральной совокупности



равно  $\bar{X} + \delta$ . Кривая распределения статистики  $\tilde{X}$  не изменяется, но центр распределения сдвигается на величину  $\delta$ . Тогда заштрихованная площадь  $\beta$ , соответствующая области допустимых значений проверяемой гипотезы, даст вероятность принять гипотезу  $H_0: \bar{X} = X_0$ , в то время как в действительности верна гипотеза  $H_a: \bar{X} = X_0 + \delta$ , а площадь  $1 - \beta$  дает величину мощности критерия.

Критическую область для проверяемой гипотезы выбирают так, чтобы обеспечивалась максимальная мощность используемого критерия; в таком случае при заданном уровне значимости  $\alpha$  гарантирована минимальная вероятность ошибки 2-го рода  $\beta$ . Критерии, для которых обеспечивается это условие, называют наиболее мощными.

Из рисунка 10.2 видно, что мощность критерия при прочих равных условиях есть функция  $\delta$ , а величины  $\alpha$  и  $\beta$  взаимосвязаны; для выборки фиксированного объема  $N$  (от которого также зависит распределение данной статистики) уменьшение вероятности одной из ошибок и ведет к увеличению вероятности другой.

Уменьшить одновременно обе вероятности можно только путем увеличения объема выборки. Но это связано с техническими и экономическими проблемами и потому не всегда возможно. Поэтому с учетом того, что практические последствия ошибок 1 и 2-го рода неодинаковы, поступают следующим образом. Если, например, практический риск, связанный с ошибками 1-го рода, больше, чем риск, связанный с ошибками 2-го рода, то следует уменьшить  $\alpha$  за счет увеличения  $1 - \beta$ . Если же представляется возможность оценить последствия ошибочных решений численно (в кубометрах древесины, в стоимостном выражении или как-нибудь иначе), то соотношение величин  $\alpha$  и  $\beta$  может быть установлено на этой основе.

Так, при проверке гипотезы о влиянии удобрений на прирост древостоев ошибка 1-го рода приводит к отклонению гипотезы о том, что удобрения не влияют на увеличение текущего прироста, хотя в действительности это может быть не так, т. е. влияния нет или оно незначительно. Эта ошибка влечет за собой неоправданные затраты на внесение удобрений, которые не увеличивают продуктивности древостоев. Ошибка 2-го рода приводит к потере некоторого дополнительного количества древесины.

Очевидно, что последствия ошибки 1-го рода более существенны. Соотношение ошибок 1 и 2-го рода можно оценить с учетом, с одной стороны, стоимости удобрений и затрат на их внесение и, с другой, - стоимости дополнительно полученной древесины, с учетом того, что эта древесина может быть использована лишь через  $A$  лет, а  $A$  достигает и 30, и 60 лет.

Конечно, далеко не всегда стоимость определяет уровень допускаемых ошибок. Приведем несколько отвлеченный пример. Если в системе ПВО проверяют гипотезу о наличии в зоне обороны вражеской ракеты, то ошибка 1-го рода приведет к пропуску ракеты к цели, а ошибка 2-го

рода - к объявлению ложной тревоги, и обе ошибки нежелательны, но следствия первой ошибки более значимы.

## 10.2 Параметрические методы оценки гипотез

Параметрические методы оценки достоверности статистических гипотез базируются на основе анализа некоторых параметров выборочной совокупности. Для применения таких оценок вычисляют среднее значение ( $\bar{X}$ ), среднеквадратическое отклонение ( $\sigma$ ) или дисперсию ( $\sigma^2$ ).

Наиболее часто употребляемым методом параметрической оценки является уже упомянутый выше критерий Стьюдента. Этот критерий всегда обозначается латинской буквой  $t$ , в интерпретации автора критерия.

Стьюдент установил, что закон распределения случайной величины зависит от объема выборки и основного отклонения. Опуская достаточно сложные описания распределения вероятностей, которые вывел Стьюдент, т.к. это выходит за пределы относительно небольшого курса лесной биометрии, значение  $t$  можно определить по формуле

$$t = \frac{\bar{X} - M}{\sigma} * \sqrt{N}, \text{ где}$$

$\bar{X}$  - среднее значение выборочной совокупности

$\sigma$  - стандартное (среднеквадратическое) отклонение

$M$  – среднее значение в генеральной совокупности.

$N$  – объем ряда распределения.

В практике наибольшее значение  $t$ -критерия Стьюдента выбирают из специальных таблиц (приложение Е), где критическая величина  $t$ -критерия определяется уровнем значимости ( $P$ ) и числом степеней свободы  $\nu$ , где  $\nu = N_1 + N_2 - 2$ , где  $N_1$  и  $N_2$  - величина выборок.

Критерий Стьюдента ( $t$ ) используют для сравнения существенности разницы между средними значениями двух выборок в следующих вариантах

1. При  $N_1 = N_2$

$$|t| = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}$$

2. При  $N_1 \neq N_2$

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\sigma^2 * \frac{N_1 + N_2}{N_1 - N_2}}}, \text{ где}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X_i^1 - \bar{X}_1)^2 + \sum (X_i^2 - \bar{X}_2)^2}{N_1 + N_2 - 2};$$

$N_1, N_2$  – объем соответствующих выборок;

$m_1$  и  $m_2$  – основные ошибки средних значений ( $\bar{X}_1$  и  $\bar{X}_2$ ) исследуемых двух выборок;

$\sigma^2$  – объединенная дисперсия двух выборок.

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{N}}$$

Интересующиеся описанием уравнений, выведенных Стьюдентом, могут найти их в книге Митропольского А. К. «Техника статистических вычислений», а также в других пособиях, например, М. П. Горошко, С. И. Миклуш, П.Г. Хамюк «Биометрия», которые приведены в списке литературы.

Наряду с проверкой нулевой гипотезы равенства средних величин в генеральной совокупности выполняется проверка равенства среднеквадратического отклонения ( $\sigma$ ) и коэффициента вариации ( $V$ ). Это вызвано тем, что при  $\bar{X}_1 = \bar{X}_2$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , а, соответственно  $V_1$  и  $V_2$  могут отличаться и целесообразно знать, насколько эти отличия существенны.

Для этого используют следующие формулы

$$|t| = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N} + \frac{\sigma_2^2}{N}}}$$

$$|t| = \frac{V_1 - V_2}{\sqrt{\frac{V_1^2}{N} + \frac{V_2^2}{N}}}$$

Критические значения  $t$  при заданном уровне значимости берут из уже упомянутых специальных таблиц (приложение Е) для  $\nu$  степеней свободы, где  $\nu = N_1 + N_2 - 2$ . Сравнивая вычисленные и табличные величины  $t$  выбираем нулевую ( $H_0$ ) (нулевую) или альтернативную гипотезу, а именно

$$t_i \leq t_{кр} = H_0; \quad t_i > t_{кр} = H_p.$$

Примеры использования  $t$  критерия будут приведены ниже в 10.4.

**Критерий Фишера.** Помимо критерия Стьюдента в ряде случаев проверка нулевой гипотезы проводится по критерию Фишера. Этот критерий считается более точным при оценке равенства дисперсий в генеральной и выборочной совокупностях или двух генеральных совокупностей.

Р. Фишер открыл закон F-распределения, который описал специальной F-функцией. Учитывая краткость курса биометрии для лесоводов, мы описание этой функции опускаем. Отметим только, что функция Ф. Фишера (F) является непрерывной и зависит только от числа степеней свободы.

При выборках не очень малого размера ( $n > 30$ ) значимость различия между стандартными отклонениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  оценивают с помощью

$$t = (\sigma_1 - \sigma_2) / \sqrt{\sigma_{\sigma_1}^2 + \sigma_{\sigma_2}^2} \quad (10.4)$$

где  $\sigma_{\sigma_1}$  и  $\sigma_{\sigma_2}$  - ошибки стандартного отклонения, определяемые по формуле  $p = (\sigma_{\bar{x}} / \bar{x}) \cdot 100\%$ .

При выборках малого объема разности стандартных отклонений имеют распределение, отличающееся от нормального, и рассмотренный метод оценки этих разностей (по доверительным границам или проверкой  $H_0$  на основе  $t$ -критерия) является неточным. Здесь можно воспользоваться формулой

$$t = \frac{\bar{x} - a}{\sigma} \sqrt{n}, \text{ которая подчиняется } t\text{-распределению Стьюдента с } k=n-1$$

степенями свободы.

Р.А. Фишер предложил вместо разностей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  оценивать разность  $Z = \ln \sigma_1 - \ln \sigma_2$ , которая имеет нормальное распределение и при выборках среднего объема. При вычислении  $Z$  можно пользоваться десятичными логарифмами  $Z = 1,15131 \lg (\sigma_1^2 / \sigma_2^2)$ .

Критерий Фишера (F) для оценки различия между выборочными дисперсиями обычно применяют в виде, который предложил Д. Снедекор.

$$F = \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \quad (10.2)$$

В уравнении (10.2) значение  $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ . Критические значения F для разных уровней значимости в практике определяют по специальным таблицам в зависимости от числа степеней свободы  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . При этом  $\nu_1 = N_1 - 1$ , а  $\nu_2 = N_2 - 1$ . Первой совокупностью ( $N_1$ ) будет та, где величина  $\sigma^2$  больше ( $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ).

Для уровней достоверности 0,95, 0,99 и 0,999 критические значения F приведены в приложении Ж.

После сравнения вычисленного и критического (табличного) значений F выбирают нулевую ( $H_0$ ) или рабочую (альтернативную) –  $H_p$ -гипотезу.

$$F_i \leq F_{кр} = H_0; F_i > F_{кр} = H_p.$$

Примеры применения F критерия приведены ниже в 10.4.

**Значимость различий качественных признаков.** Качественные признаки, распределяющиеся по модели биномиального распределения, оценивают на основе долей. Методы оценки аналогичны вышерассмотренным для средних, выраженных в количественной мере.

Ошибка разности выборочных долей  $p_1$  и  $p_2$  определяется по формуле:

$$\sigma_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{N_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{N_2}} \quad (10.6)$$

Для критерия t с числом степеней свободы  $\nu = N_1 - N_2 - 2$  имеем

$$t = (p_1 - p_2) / \sigma_{p_1-p_2} \quad (10.7)$$

Когда имеется одна выборка, значение средней ее доли может быть оценено путем сравнения с гипотетической (теоретической) долей. Например, в отношении теоретической доли рождаемости мальчиков может быть выдвинута нулевая гипотеза  $H_0: P=0,5$ .

В этом случае критерий

$$t = P - p / \sqrt{[p(1-p)] / N}, \quad (10.8)$$

где P - теоретическая доля или вероятность, p - выборочная доля, N - численность выборки.

При  $H_0: P = 0,$   $t = p / \sqrt{[p(1-p)] / N}. \quad (10.9)$

### 10.3 Непараметрические критерии

Непараметрические критерии оценки статистических гипотез не требуют вычисления показателей ( $\bar{X}$ ,  $\sigma$  и  $\nu$ ) в выборочной совокупности. Они не базируются на нормальном распределении случайных величин в совокупности, и здесь часто применяют другие законы распределения. В ряде случаев для определения этих оценок используют условные значения, порядковые номера и т. д.

В современной практике математической статистики из непараметрических критериев чаще всего применяют следующие критерии:  $\bar{x}$ -критерий Ван-дер-Вардена, T-критерий Уайта, Z-критерий знаков и W-критерий Вилкоксона

Не приводя доказательств соответствующих теорем, дадим формулы для их применения в практике.

$\bar{x}$ -критерий Ван-дер-Вардена находят по формуле

$$\bar{x} = \sum \psi \left( \frac{R}{N_1 + N_2 + 1} \right), \text{ где}$$

R – порядковый номер (ранг);

$N_1, N_2$  – объемы выборок

$\Psi$  – значение функции, определенное по специальной таблице в зависимости от величины  $R/(N_1+N_2+1)$  (приложение 3).

$\bar{x}$ -критерий Ван-дер-Вардена используется для выборок с несвязанными парными вариантами. Для этого варианты обоих рядов ранжируют по мере их возрастания. В результате ранжирования каждое значение  $x_i$  получает порядковый номер (ранг). Затем находят отношение

$$K = \frac{R}{N_1 + N_2 + 1}.$$

Критическое значение  $\bar{x}$ -критерия находят по специальной таблице (приложение И) для разных уровней значимости (5%, 1%) с числом степеней свободы ( $Y \neq N_1 + N_2 - 2$ ) и при разнице между объемами выборок:  $N_1 - N_2$ . По  $\bar{x}$ -критерию выбираем нулевую ( $H_0$ ) и рабочую ( $H_p$ ) гипотезу.

$$x \leq x_{кр} = H_0;$$

$$x > x_{кр} = H_p.$$

Поясним изложенное примером. Пусть мы измерим высоты в двух дубовых древостоях II класса бонитета в возрасте 80 лет в типе леса дубрава кисличная (Д. кис) и дубрава папоротниковая (Д. пап). (таблица 10.2)

Таблица 10.2 – Результаты измерений высот в двух древостоях дуба

Тип леса	Высота измеренных деревьев ( $x_i$ ), м										Среднее значение ( $\bar{x}$ )
Д. кис.	22,0	22,5	21,7	17,9	20,8	28,4	25,6	19,6	23,6	20,9	22,3
Д. пап.	26,3	18,8	20,6	21,9	17,5	22,4	22,6	28,3	17,8	-	21,8

Проведем ранжирование данных таблицы 10.2 и найдем  $K$  и  $\psi$  (таблица 10.3).

Таблица 10.3 – Расчет  $\bar{x}$ -критерия Ван-дер-Вардена

Высоты (м) по типам ( $x_i$ ) леса		Ранг дерева (R)	$K_1 = \frac{R}{N_1 + N_2 + 1}$	$\psi\left(\frac{R}{N_1 + N_2 + 1}\right)$
Д. кис.	Д. пап.			
-	17,5	1	0,050	-1,64
-	17,8	2	0,100	-1,28
17,9	-	3	-	-
-	18,8	4	0,200	-0,84
19,6	-	5	-	-
-	20,6	6	0,300	-0,53
20,8	-	7	-	-
20,9	-	8	-	-
21,7	-	9	-	-
-	21,9	10	0,500	0,00
22,0	-	11	-	-
-	22,4	12	0,600	0,25
22,5	-	13	-	-
-	22,6	14	0,700	0,52
23,6	-	15	-	-
25,6	-	16	-	-
-	26,3	17	0,850	1,04
-	28,3	18	0,900	1,28
28,4	-	19	-	-
$N_1 = 10$	$N_2 = 9$			-1,20

В таблице 10.3 мы вычислили  $K_1 = R / (N_1 + N_2 + 1)$  для второй (меньшей) совокупности ( $N_2$ ). Затем, используя таблицу в приложении И, где даны величины  $\chi$ ,  $\psi$  в зависимости от величины  $R$ , нашли критерий Ван-дер-Вардена для наших рядов. Он оказался равен -1,2. По таблице в приложении И нашли критические значения критерия  $\chi$  при  $N_1 - N_2 = 1$ . Он равен (при 1% уровне значимости) для  $Y = 19$  ( $Y = N_1 + N_2$ ) 4,77. Так как у нас  $1,20 < 4,77$ , то принимается нулевая гипотеза, т. е., что различие при разнице в средних значениях на 0,5 м не значимо. Это значит, что обе выборки принадлежат к одной статистической совокупности высот дуба II класса бонитета, а тип леса не оказал существенного влияния на величину средней высоты.

**Критерий Уайта.** Этот критерий тоже используют для оценки разницы между средними значениями ( $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$ ) двух выборок с попарно несвязанными вариантами. Схема вычисления Т-критерия Уайта показана в таблице 10.5. Для примера воспользуемся вышеприведенными данными замеров высот дуба (таблица 10.2). Приведем парные величины высот в порядке их возрастания и покажем объем каждой выборки (таблица 10.4)

Таблица 10. 4 – Попарные замеры высот ( $H_i$ ) дуба по мере возрастания

№ ряда	Высоты, м										Объем выборки	Сумма $x_i$	Среднее значение
1	17,9	19,6	20,8	20,9	21,7	22,0	22,5	23,6	25,6	28,4	10	223	22,3
2	17,5	17,8	18,8	20,6	21,9	22,4	22,6	26,3	28,3	-	9	196,2	21,8

На основе таблицы 10.4 построим таблицу 10.5.

В таблице 10. 5 мы выписали ранги деревьев по мере возрастания высот:  $X$  ранги равны от 1 до 19, т.к.  $N_1 + N_2 = 19$ . Затем против каждого дерева указываем номер выборки, из которой оно взято (графа 2). В графе 3 суммируем ранги деревьев (графа 1), которые попарно размещены в таблице 10. 4. Например, ранг дерева с высотой 20,8 м в первом ряду равен 7, а парного ему дерева в ряду 2 (18,8 м) – 4. Средний ранг этой пары будет  $(7+4)/2=5,5$ . В графы 5 и 6 выписываем средние ранги, принадлежащие первой и второй выборкам.

Таблица 10.5 – Порядок расчетов для нахождения Т-критерия Уайта

Ранги	Номер выборки	Высота, м	Совместный ранг	Ранги для первой выборки	Ранги для второй выборки
1	2	3	4	5	6
1	2	17,5	2	-	2
2	2	17,8	3,5	-	3,5
3	1	17,9	2	2	-
4	2	18,8	5,5	-	5,5
5	1	19,6	3,5	3,5	-
6	2	20,6	7,0	-	7,0
7	1	20,8	9,5	5,5	-
8	1	20,9	9,5	7,0	-
9	1	21,7	11,5	9,5	-
10	2	21,4	11,5	-	9,5
11	1	22,0	13,5	11,5	-
12	2	22,4	13,5	-	11,5
13	1	22,5	16	13,5	-
14	2	22,6		-	13,5
15	1	23,6	16	16	-
16	1	25,6	17	17	-
17	2	26,3	19	-	16
18	2	28,3		-	17
19	1	28,4		19	-
Итого			173	104,5	85,5

Проверка правильности вычислений проводится по формуле  $\sum R = \frac{(N+1) \cdot N}{2}$ , где  $N = N_1 + N_2$ . В нашем примере  $\sum R = 104,5 + 85,5 = 190$ .  
 $\frac{N+1}{2} = \frac{20+19}{2} = \frac{390}{2} = 190$ . Таким образом, требуемое равенство соблюдено, т. е. вычисления сделаны правильно.

За значение Т-критерия Уайта принимается меньшая сумма рангов. В нашем примере это 85,5. По таблице в приложении К находим критическое значение Т-критерия для большего ( $N_1$ ) и меньшего ( $N_2$ ) объемов выборки при 1 % уровне значимости. Для  $N_1 = 10$  и  $N_2 = 9$  Т-критерий Уайта равен 58. Сравнив вычисленную нами величину ( $R_{\min} = 85,5$ ) с критическим значением Т-критерия при 1% уровне значимости, видим, что  $T_{\text{факт}} > T_{\text{крит}}$ , т. е.  $85,5 > 58$ . Таким образом, Т-критерий Уайта тоже подтверждает, что измеримые высоты дуба в возрасте 80 лет из типов леса кисличный и папоротниковый принадлежат к одной статистической совокупности, определяемой вторым классом бонитета.

**Z-критерий знаков** используется для сравнения попарно связанных вариантов, которые можно обозначить знаками (+) или (-). Обычно этот критерий



используют при сравнении опытных и контрольных измерений после проведения лесохозяйственных опытов.

Применение Z-критерия знаков основано на предположении, что количество опытов со знаком (+) и (-) одинаково при однородной выборке, и наоборот – неоднородная выборка показывает различное количество знаков как следствие влияния исследуемого фактора.

Опыт применения названного критерия покажем на следующем примере. Пусть имеем 2 однорядных участка ольхи черной в типе леса черноольшанник болотно-папоротниковый в возрасте 20 лет, класс бонитета – III. Разница в высотах этих участков, выявленная путем замеров, незначительна. В одном из участков провели гидротехническую мелиорацию. Через 10 лет провели повторные замеры высот как на контрольном (без мелиорации), так и на опытном участке и получили следующие результаты (таблица 10.6).

Таблица 10.6 – Расчет Z-критерия знаков для двух черноольховых древостоев

Вариант	Высоты измеренных деревьев, м															$\Sigma$	$\bar{x}$
	16,3	17,0	17,9	10,9	10,8	14,3	13,0	18,2	10,6	11,5	16,4	14,1	14,3	11,9	12,7		
Опыт	16,3	17,0	17,9	10,9	10,8	14,3	13,0	18,2	10,6	11,5	16,4	14,1	14,3	11,9	12,7	210,8	14,1
Контроль	15,4	17,2	16,8	10,6	11,8	13,2	13,4	17,0	10,8	11,0	13,6	14,1	14,5	10,7	10,9	200,8	13,4
Эффект с (+)	+		+	+		+		+		+	+		+	+	+	10	
Эффект с (-)		-					-		-							3	
Нет эффекта (0)					0							0				2	

Значение Z-критерия знаков соответствует большему количеству эффектов без учета нулевых. В нашем примере положительный эффект наблюдали в 10 случаях, отрицательный – в 3, нулевой – 2. Объем выборки без нулевых эффектов равен  $15 - 2 = 13$ . Число степеней свободы –  $12 * (N - 1)$ .

По специальной таблице (приложение Л) находим величину Z-критерия для  $N = 12$  при 1% уровне значимости он равен 11. Нулевая гипотеза предполагает отсутствие влияния исследуемого фактора, т. е.

$$Z < Z_{кр} = H_0 - \text{нулевая гипотеза}$$

Z

**W-критерий Вилкоксона.** Определение этого критерия базируется на ранжировании положительных и отрицательных эффектов (без учета нулевых) при сравнении попарно связанных вариантов в опытной и контрольной выборке. За вычисленное (фактическое) значение W-критерия принимается сумма рангов, которая имеет наименьший знак.

Критическое значение W-критерия при заданном уровне значимости берем из специальных таблиц (приложение М). Нулевая (влияния нет) и альтернативная (рабочая) гипотезы определяются по методу, описанному выше.

$W_{\text{факт}}$  -

В нашем случае сумма рангов с (-) меньше, и ее принимаем за фактический  $W$ -критерий, который равен 19,5. Тогда  $W_{\text{факт}} = 19$ ,  $W_{\text{кр}} = 13$ , т. е.  $W_{\text{факт}} > W_{\text{кр}}$ .

Таким образом,  $W$ -критерий Вилкоксона показывает недостоверность имеющихся различий.

В практике чаще применяются параметрические критерии как более научно обоснованные. Как видно из приведенных примеров применение двух разных непараметрических критериев для одного и того же опыта с влиянием мелиорации на черноольховый древостой ( $Z$ -критерий знаков и  $W$ -критерий Вилкоксона) показывает противоположные результаты.

Если бы мы для приведенных двух примеров (таблицы 10.2 и 10.6) применили параметрические (верность вычисления  $\bar{x}$ )

ложить отдельные единицы в ранжированный ряд от худших к лучшим, допустим, по форме, вкусу, запаху или другим свойствам. Если подобного рода ранжирование ряда объектов или вариантов эксперимента будут проведены при помощи случайной выборки из числа экспертов, то можно сделать определенные выводы о ранжированном ряде в генеральной совокупности. Предположим, шесть случайных экспертов оценивают лекции, сделанные двумя лекторами. В основу оценки положен учет ряда не измеряемых количественно факторов: содержание прочитанного материала, форма его подачи, культура чтения и пр. Предположим, независимые оценки с подразделением их на два ранга (1-лучше, 2-хуже) были такие: первый лектор получил пять оценок 1-го ранга и одну 2-го ранга, второй лектор, наоборот.

Нулевая гипотеза состоит в том, что нет значимого различия в качественной оценке лекций. Для оценки используют критерий  $\chi^2$  (хи-квадрат), формула для которого при малых выборках имеет выражение:

$$\chi^2 = (n_1 - n_2 - 1)^2 / N, \text{ где}$$

$n_1$  - число однородных оценок;  
 $n_2$  - число неоднородных оценок.

Для рассматриваемого примера имеем  $\chi^2 = (5 - 1 - 1)^2 / 6 = 1,5$ . Число степеней свободы при двух группах оценок равно 1. Из таблицы приложения Н находим  $\chi_{0,05}^2 = 3,8$ .

Нулевая гипотеза на уровне значимости 5% (т.е. при вероятности безошибочности заключения  $p=0,95$ ) не отвергается. Она отвергается с вероятностью 0,90, которую в подобных случаях можно было бы считать достаточной, если повторение эксперимента было бы найдено затруднительным.

#### **10.4 Проверка статистических гипотез в практике лесного хозяйства**

В практике лесного хозяйства и, особенно при проведении научных исследований в лесном хозяйстве, часто возникают вопросы оценки эффекта от проведенных лесохозяйственных мероприятий или от причиненного вреда: рубки ухода, применение удобрений, селекция, мелиорация, вредители и болезни леса, пожары и т. д.. Примеры таких оценок с помощью критериев Стьюдента и Фишера, а также при использовании непараметрических оценок приведены выше. Наиболее часто, как уже отмечено, для этих целей используют параметрические оценки как более строгие. Здесь мы опишем типичную методику проведения таких оценок, которая принципиально применима к большинству оценок гипотез в лесном хозяйстве.

В опытах, чаще всего, возникают проблемы оценки эффектов, например, между высотами, диаметрами, приростами деревьев, получивших разные дозы удобрений, остающиеся при проведении рубок ухода разной интенсивно-

сти, при повреждениях пожарами или вредителями. При проведение таких исследований образуются парные наблюдения, где одно из них относится к первому варианту опытов (обычно это контроль), а другое ко второму. Разности между значениями признаков по парам образуют выборку, анализируя которую с помощью t-критерия Стьюдента, F-критерия Фишера или непараметрических критериев, делают соответствующее заключение.

Разности в опытах могут быть следствием достигнутого эффекта, но бывают из-за случайных причин, которые обычно остаются неизвестными. Если бы действовали только случайные причины, то по законам теории вероятности они имели бы разные знаки и их средняя в одной выборке равнялась бы нулю. Если же средняя здесь не равна нулю, то ее значимость требуется оценить.

Методику такой оценки покажем на искусственной модели двух выборок из одной совокупности. Допустим, заложена пробная площадь насаждений дуба в возрасте 95 лет II класса бонитета на площади в 1 га – 100×100 м. На этой пробной площади замерено 238 диаметров и высот (таблица 10.8). Данные замеры примем как генеральную совокупность и найдем ее статистические оценки. Для упрощения сделаем группировку диаметров по ступеням толщины через 4 см (таблица 10.8), а высот по ступеням высоты через 2 м (таблица 10.10). На основе распределения сгруппированных данных вычислим статистические показатели.

Для распределения диаметров схема вычислений показана в таблице 10.9  
Методика расчетов (вычисление

Таблица 10.8 – Ведомость измерения диаметров (Д) и высот (Н) дуба

№ дер.	Д, см	Н, м	№ дер.	Д, см	Н, м	№ дер	Д, см	Н, м	№ дер	Д, см	Н, м	№ дер	Д, см	Н, м	№ дер	Д, см	Н, м	№ дер	Д, см	Н, м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	44,3	25,4	35	22,6	22,1	69	16,3	17,1	103	40,0	28,1	137	11,8	16,5	171	45,9	28,8	205	28,2	24,4
2	23,6	22,7	36	25,4	24,1	70	21,5	21,0	104	28,1	23,3	138	40,5	28,3	172	25,9	24,0	206	32,7	25,8
3	18,2	17,4	37	24,4	25,7	71	28,8	26,0	105	44,0	28,3	139	40,0	27,5	173	32,0	24,6	207	24,4	25,3
4	36,6	18,7	38	10,5	29,3	72	28,0	26,2	106	33,5	24,6	140	36,3	26,6	174	24,9	24,1	208	38,8	27,6
5	30,5	26,0	39	36,7	28,4	73	24,3	20,5	107	36,4	26,7	141	33,0	25,7	175	39,6	27,3	209	24,0	23,1
6	33,4	26,5	40	30,1	24,7	74	30,2	25,8	108	28,7	24,1	142	44,1	29,6	176	33,8	25,6	210	36,2	25,6
7	40,1	29,1	41	33,0	26,6	75	36,0	27,4	109	32,4	25,8	143	30,7	25,8	177	28,8	26,1	211	27,0	24,2
8	29,3	24,7	42	32	27,1	76	34,1	28,1	110	45,6	29,3	144	40,5	30,2	178	26,1	23,3	212	30,3	27,0
9	28,4	24,4	43	27,6	22,3	77	33,2	27,5	111	29,4	25,6	145	28,4	25,1	179	44,3	27,2	213	31,9	27,2
10	27,5	24,2	44	28,1	24,6	78	38,5	27,7	112	29,6	25,5	146	42,6	30,8	180	31,7	26,0	214	27,4	25,0
11	15,5	16,0	45	31,4	26,4	79	40,9	28,8	113	24,3	23,3	147	18,7	20,3	181	24,8	23,3	215	43,3	28,5
12	32,2	25,5	46	16,3	25,1	80	49,9	30,6	114	18,1	20,7	148	36,0	26,1	182	39,0	26,3	216	23,3	24,0
13	30,6	25,3	47	21,7	20,2	81	45,7	30,1	115	44,8	30,0	149	42,7	30,3	183	28,0	23,0	217	31,1	26,6
14	28,5	24,7	48	34,5	26,3	82	12,2	16,1	116	26,1	27,1	150	33,1	25,7	184	30,6	24,0	218	22,1	22,7
15	27,1	24,2	49	37,7	26,8	73	14,7	15,5	117	24,5	20,9	151	34,0	25,6	185	24,0	23,5	219	36,0	25,8
16	26,6	23,7	50	19,5	19,5	84	26,6	24,8	118	40,6	27,3	152	36,2	26,8	186	48,1	31,0	220	23,5	23,0
17	36,8	27,1	51	18,2	18,4	85	32,0	26,3	119	25,6	23,5	153	38,3	27,0	187	32,0	25,1	221	30,6	25,1

Продолжение таблицы 10.8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
18	34,1	26,5	52	24,4	22,3	86	33,4	26,4	120	32,0	25,0	154	33,4	26,6	188	23,5	23,1	222	28,7	25,0
19	32,5	28,8	53	41,2	30,5	87	34,5	26,8	121	39,7	28,7	155	36,1	26,9	189	36,9	26,2	223	45,7	28,5
20	30,6	25,4	54	40,1	29,3	88	37,8	26,6	122	26,8	24,4	156	27,7	24,4	190	30,1	21,4	224	24,0	22,8
21	33,8	26,0	55	20,5	18,4	89	42,2	29,3	123	36,0	27,8	157	44,0	30,0	191	32,8	25,8	225	33,3	26,1
22	23,0	21,7	56	20,4	18,9	90	33,5	27,2	124	19,4	21,5	158	32,1	25,0	192	35,1	24,3	226	28,8	26,0
23	17,7	17,0	57	32,5	27,0	91	16,6	19,1	125	40,1	27,1	159	25,0	22,1	193	20,6	20,5	227	40,3	28,2
24	31,5	25,6	58	31,9	25,2	92	36,1	26,5	126	20,0	18,8	160	36,0	27,3	194	22,1	22,0	228	33,8	27,6
25	11,3	14,6	59	30,6	25,8	93	18,0	20,3	127	33,7	24,7	161	29,1	25,3	195	18,1	20,0	229	32,2	26,8
26	39,8	28,8	60	29,5	24,1	94	36,5	32,0	128	36,1	25,8	162	32,3	25,4	196	40,2	19,1	230	29,5	26,2
27	22,5	20,5	61	26,1	23,5	95	30,8	25,4	129	22,0	22,0	163	37,0	26,7	197	25,7	24,1	231	40,6	28,5
28	20,0	21,6	62	27,0	24,0	96	40,6	27,5	130	40,1	28,8	164	32,0	24,4	198	28,0	23,4	232	43,9	30,4
29	16,4	18,0	63	28,1	24,7	97	26,6	18,2	131	20,5	20,4	165	31,6	24,6	199	19,9	18,6	233	34,0	27,7
30	37,2	28,4	64	34,6	27,4	98	36,0	25,7	132	34,4	26,5	166	38,0	26,7	200	34,9	25,3	234	32,1	27,6
31	35,4	28,1	65	36,6	28,2	99	37,2	28,9	133	40,8	27,4	167	28,2	25,0	201	24,0	25,0	235	38,8	23,5
32	31,1	26,5	66	40,8	29,0	100	16,2	19,7	134	20,7	20,8	168	32,0	25,0	202	26,3	22,4	236	40,1	29,4
33	30,8	25,8	67	23,0	22,4	101	15,1	16,8	135	19,4	17,6	169	36,2	25,5	203	22,8	20,5	237	28,4	26,6
34	29,1	25,5	68	28,5	26,6	102	44,8	29,5	136	20,2	19,6	170	28,3	24,4	204	36,1	26,7	238	36,3	27,7

На основе таблицы 10.9 вычислим  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  и начальные моменты.  
Среднее значение



Равенство -- и , вычисленных разными способами, говорит о верности расчетов.

С помощью моментов сделаем проверку вычисления

На основе таблицы 10.10 найдем начальные, центральные и основные моменты для определения асимметрии и эксцесса рядов распределения, используя формулы, приведены выше.

Таблица 10.11 – Частичные выборки деревьев с замеренными диаметрами и высотами из 238 деревьев на пробной площади в дубовом насаждении

№ деревьев	Выборка №1		Выборка №2
	Диаметры, см Σ (Д)	Высоты, м Σ	



Обобщая изложенное в настоящей главе, приведем алгоритм проверки статистических гипотез, который используется в лесном хозяйстве.

При проведении исследований - определении целей и конкретных путей его проведения - следует рассматривать возможность статистического подтверждения результатов, т.е. исследование в итоге должно сводиться к проверке (одной или нескольким) статистических гипотез, явно сформулированных.

Для лесоводственных исследований предварительный анализ такого рода тем более важен, что во многих ситуациях математическая формализация достаточно сложна. Кроме отмеченных выше трудностей перехода от объекта к модели (зачастую проверка гипотез относится именно к обоснованию возможности представления данного объекта при помощи определенной статистической модели), дальнейшие трудности вытекают из необходимости знания выборочных распределений используемых статистик. Здесь для простых случаев могут быть предложены стандартные методы, например использование предпосылки о нормальности распределения статистик, вычисленных на основании больших выборок.

Проверку статистических гипотез в исследованиях по лесному хозяйству обычно проводят для готовых результатов наблюдений. Порядок работы при этом следующий.

- Выбирают статистическую характеристику критерия, выяснив соответствие структуры задачи предпосылкам, лежащим в основе применяемых критериев. В частности, это могут быть выборочные распределения статистик, независимость наблюдений и пр.

- Выбирают и формулируют  $H_0$  и  $H_a$  - проверяемую и альтернативную гипотезы. Нулевую гипотезу обычно принимают таким образом, чтобы последствия ошибки 1-го рода были более существенны, чем последствия ошибки 2-го рода.

- На основе последствий ошибок 1 и 2-го рода устанавливают допустимый уровень значимости  $\alpha$  (односторонний или двусторонний в зависимости от типа альтернативной гипотезы) и вычисляют критические значения статистической характеристики, т.е. те значения, которые разделят распределение статистической характеристики на область допустимых значений и критическую.

- Вычисляют выборочное значение статистической характеристики и проверяют испытываемую гипотезу; если она не отклонена (полученное выборочное значение принадлежит области допустимых значений), то вычисляют мощность критерия  $1-\beta$ ; при достаточной мощности гипотезу принимают, иначе заключение остается неопределенным и требуется увеличение объема выборки.

При планировании выборки объемом  $N$  можно вычислить мощность критерия или соответствующее этой мощности различие между параметрами, которое критерий может уловить. Если мощность оказывается недостаточной, то повышают объем выборки, обеспечивающий необходи-

мую мощность. При уровне значимости, равном или меньшем величине ошибки 2-го рода, неотклонение гипотезы означает ее принятие, ибо в таком случае критическая область альтернативной гипотезы при данном уровне значимости соответствует области допустимых значений проверяемой гипотезы.

Необходимо подчеркнуть, что термин “принятие” гипотезы не является синонимом абсолютной истинности  $H_0$ , поскольку  $H_0$  и  $H_a$ , как правило, не исчерпывают всех влияний и обстоятельств, сказывающихся на изучаемом явлении. Они справедливы лишь в том смысле, что данные эксперимента не противоречат (либо противоречат) проверяемой гипотезе. Если для признания неверным какого-либо положения достаточно привести один пример, то в таком случае отклонение гипотезы (с вероятностью наличия ошибки 1-го рода), является свидетельством того, что она является ложной. В этом случае любое число подтверждений может оказаться недостаточным для того, чтобы гипотеза была справедливой.

При проведении исследований часто ограничиваются лишь частичным использованием вышеприведенных положений, применяя один из методов сравнения. Но при сложных случаях и при высокой практической важности исследований необходимо делать полный цикл проверки статистических гипотез.

## **11. КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В ЛЕСНОМ ХОЗЯЙСТВЕ**

- 11.1 Критерии согласия
- 11.2 Критерий согласия Пирсона
- 11.3 Критерий согласия Колмогорова-Смирнова
- 11.4 Применение статистического оценивания в лесном хозяйстве

### **11.1 Критерии согласия**

Статистические критерии являются важнейшей частью оценивания рядов распределения. Во многих случаях на основании некоторых гипотез или каких-то данных делается предположение о виде законов распределения интересующей нас случайной величины  $X$ . Мы часто имеем опытные данные в виде эмпирических дискретных рядов распределения, которые аппроксимируем некоторой кривой распределения: нормальной, типа  $A$ ,  $\beta$ -распределения, логнормальной, Пуассона и т.д. Но здесь без дополнительных исследований нельзя утверждать, что примененная для аппроксимации кривая отвечает имеющемуся закону распределения искомой случайной величины  $X$ .

Например, сделав перемер диаметров деревьев, мы в зависимости от возраста древостоя, его происхождения, густоты, условий произрастания можем аппроксимировать эмпирическое распределение разными кривыми. Заранее нельзя с полной уверенностью заявить, какое распределение соответствует нашему ряду распределения замеренных диаметров. Поэтому появляется потребность проверить соответствие теоретического распределения опытным данным.

В силу ограниченного числа наблюдений теоретическая кривая будет в какой-то мере отличаться от фактического распределения опытных данных, даже если предположение о законе распределения сделано правильно. В связи с этим возникает необходимость решать следующую задачу: является ли расхождение между опытным законом распределения и предполагаемым законом распределения следствием ограниченного числа наблюдений, т.е. зависит от случайных причин, существенно не влияющих на характер распределения, или оно является существенным и связано с тем, что действительное распределение случайной величины отличается от предполагаемого. Для решения поставленной задачи служат критерии согласия.

Идея этих критериев заключается в том, что на основании определенного статистического материала они позволяют проверить гипотезу  $H$ , состоящую в том, что случайная величина  $X$  имеет функцию распределения  $F(x)$ .

Для того чтобы принять или опровергнуть гипотезу  $H$ , будем рассматривать случайную величину  $Y$ , характеризующую степень расхождения теоретического и статистического распределений. Величину  $Y$  можно выбирать различными способами. Например, в качестве  $Y$  можно взять максимальное отклонение статистической функции распределения  $F^*(x)$ . Очевидно, закон

распределения случайной величины  $Y$  зависит от закона распределения случайной величины  $X$ , над которой производились опыты, и от числа опытов  $n$ .

Предположим, что закон распределения случайной величины нам известен. Тогда пусть в результате проведенных  $n$  опытов над случайной величиной  $X$  величина  $Y$  приняла некоторое значение  $y$ . Спрашивается, можно ли объяснить принятое значение  $Y=y$  случайными причинами или же это значение слишком велико и указывает на наличие существенной разницы между теоретическим и статистическим распределениями, т.е. непригодность гипотезы  $H$ .

Для ответа на этот вопрос допустим, что верна гипотеза  $H$ , и вычислим вероятность того, что случайная величина  $Y$  за счет случайных причин, связанных с ограниченным объемом опытного материала, примет значение не меньше, чем наблюдаемое значение  $y$ , т.е. вычислим вероятность  $P(Y \geq y)$ . Если эта вероятность мала, то гипотезу  $H$  следует опровергнуть как мало правдоподобную, а если же эта вероятность значительна, то экспериментальные данные не противоречат гипотезе  $H$ .

Для вычисления вероятности  $P(Y \geq y)$  необходимо знать закон распределения случайной величины  $Y$ , который, как мы уже отмечали, зависит от закона распределения случайной величины  $X$  (функции распределения  $F(x)$ ) и от числа опытов  $N$ . Оказывается, что при некоторых способах выбора случайной величины  $Y$  ее закон распределения при достаточно большом  $N$  практически не зависит от закона распределения случайной величины  $X$ . Именно такими мерами расхождения и пользуются в математической статистике и в биометрии в качестве критериев согласия, по которым оценивают соответствие распределения, полученного в опыте, теоретическому.

Критерии согласия можно разделить на две группы: в первой не используют значения выборочных статистик, во второй – критерии строят с использованием параметров генеральной совокупности, т.е. оценок последних на основе статистик. Из критериев второй группы наиболее интересны критерии Колмогорова-Смирнова и  $\omega^2$  для сравнения выборочной и теоретической функций распределения. Однако использование статистик вместо параметров, которые неизвестны в задачах аппроксимации, обычно приводит к завышению (иногда значительному) вероятностей согласия.

Из параметрических критериев наиболее употребляем и научно обоснован критерий согласия Пирсона.

## 11.2 Критерий согласия Пирсона

Этот критерий был предложен К. Пирсоном в 1900 году. Он базируется на определении некоторой статистики, которую автор определил как  $\chi^2$ . Опустим доказательства для обоснования величины  $\chi^2$ , которые сводятся к исследованию распределения случайной величины  $\chi^2$  с  $\nu$ -степенями свободы, в силу краткости курса лесной биометрии. Здесь же отметим, что крите-



рий  $\chi^2$  представляет сумму отношений между квадратами разностей эмпирических и вычисленных или ожидаемых частот к ожидаемым частотам:

$$\chi^2 = \sum \frac{(p - p')^2}{p'}. \quad (11.1)$$

Здесь  $\sum$  - знак суммирования;  $p$  – эмпирическая частота;  
 $p'$  - ожидаемая или теоретически вычисленная частота.

Если разность между эмпирическими и вычисленными частотами обозначить через  $d$ , т.е. принять  $p - p' = d$ , то формула (11.1) приобретает более простой вид:

$$\chi^2 = \sum \frac{d^2}{p'}. \quad (11.2)$$

Чтобы вычислить критерий хи – квадрат, необходимо каждое отклонение эмпирического ряда от его ожидаемого значения возвести в квадрат и разделить на величину ожидаемого значения, затем полученные результаты сложить.

Когда эмпирические и вычисленные численности полностью совпадают друг с другом, разность  $p - p' = d$  равна нулю. Чем больше различия между наблюдаемыми и ожидаемыми численностями, тем больше и указанная разность, а следовательно, и величина критерия хи – квадрат, которая может возрасти до бесконечности. Поскольку различия между ожидаемыми и эмпирическими частотами возводятся в квадрат, то значения критерия хи – квадрат могут быть только положительными. Поэтому при установлении разности  $p - p' = d$  знаки можно не учитывать.

Преимущественное значение этого критерия состоит в том, что он применим к оценке опытных и ожидаемых значений в самых различных случаях – как при сравнении данных по одному, так и по нескольким независимым признакам, а также и для сравнения данных опыта и контроля. Особенно часто критерий хи–квадрат используется в генетике для сравнительной оценки результатов расщепления. Находит свое широкое применение этот критерий во многих областях лесного хозяйства, в частности, в лесной таксации.

Критерием «хи-квадрат» часто руководствуются для оценки выборочных распределений с их теоретически вычисленными частотами. Методика расчета теоретических значений эмпирических частот вариационного ряда изучена нами ранее.

Критерий согласия  $\chi^2$  Пирсона для сравнения рядов распределений определяют по одной из эквивалентных формул, первую из которых применяют при сравнении эмпирических  $n_i$  и теоретических  $\tilde{n}_i$  частот, вторую – частот  $p_i$  и вероятностей  $p_i$ ,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i} = N \sum_{i=1}^m \frac{(p_i - \tilde{p}_i)^2}{\tilde{p}_i}, \quad (11.3)$$

где  $N$  – общее число наблюдений;

$m$  – количество сравниваемых групп частот.

Критические значения  $\chi^2$  берут по таблицам (приложение Н) с учетом числа степеней свободы ( $V$ ).

Если верна нулевая гипотеза  $H_0$ , заключающаяся в том, что распределение в генеральной совокупности соответствует выбранному теоретическому закону распределения, т.е.  $H_0 : \chi^2 > 0$  (против альтернативной, или рабочей  $H_a : \chi^2 = 0$ , - проверку проводят одностороннюю. Так как  $\chi^2$  не может быть отрицательным, то величина  $\chi^2$  из (11.3) асимптотически подчиняется распределению  $\chi^2$  с  $\nu = m - l - 1$  степенями свободы, где  $l$  – число параметров, использованных при расчете теоретического распределения. Количество параметров ( $l$ ) зависит от вида распределения. Для распределений, которые наиболее часто применяются в лесном хозяйстве, число параметров следующее:

- распределение Пуассона – 1 ( $\bar{\delta}$ );
- нормальное, логнормальное, биномиальное – 2 ( $\bar{\delta}, \sigma$ );
- обобщенное нормальное (типа А или Грамма-Шарлье), Вейбула, система кривых Пирсона или Джонсона – 4 ( $\bar{\delta}, \sigma, \alpha, E$ ).

Из разности  $m - l$  вычитают единицу, поскольку одна дополнительная связь накладывается на частоты, чтобы суммы частот выборочного и теоретического распределений были равными.

Вывод распределения критерия  $\chi^2$  получают при условии, что все из сравниваемых частот не очень малы, поэтому при использовании (11.3) частоты  $n_i$  должны быть больше 5, т.е.  $n_i > 5$ . В связи с этим в практических задачах для одновершинных распределений, сходных с нормальным, частоты крайних интервалов рядов распределения нужно объединять. Отсюда следует, что одним из недостатков критерия  $\chi^2$  является его малая чувствительность к отклонениям частот для крайних значений.

Второй его недостаток – зависимость от способа группировки частот. В некоторых работах по математической статистике утверждается, что лучшие результаты дает использование вместо интервалов равной длины интервалов равных вероятностей. Последний способ пока не привился в практике из-за усложненной сводки материалов, т.к. необходимо рассматривать упорядоченную по возрастающим значениям случайных величин выборку. Однако, несмотря на приближенный характер критерия  $\chi^2$ , он удобен и достаточно надежен для получения обоснованных заключений в задачах для лесного хозяйства.

Порядок применения  $\chi^2$  обычен. По (11.2) вычисляют статистическую характеристику критерия  $\chi^2_{\text{выч}}$  и сравнивают ее с табличным (критическим)

значением  $\chi^2_{1-\alpha}(\gamma)$  при уровне значимости  $\alpha$ . Если  $\chi^2_{\text{выч}} < \chi^2_{1-\alpha}(\gamma)$ , то гипотезу принимают, т.е. можно считать, что эмпирический ряд подчиняется выбранному закону распределения.

При выборе величины  $\alpha$  следует проверять гипотезу  $H_0$  на тот предмет, что между выборочным и теоретическим рядами нет существенных различий, т.е. ошибка 1-го рода заключается в том, что в действительности имеющееся согласие признается ложным. Тогда ошибка 2-го рода сводится к тому, что, хотя в действительности ряд распределения не подчиняется данному теоретическому закону, критерий признает согласие. В этом случае ошибка 2-го рода более важна, чем ошибка 1-го рода, т.е. при формулировке гипотезы о согласии мы отступили от правил, изложенных выше. Однако здесь «поменять местами»  $H_0$  и  $H_p$  невозможно, так как существуют разные теоретические законы распределения, по которым можно получить практически одинаковые частоты - значения  $\chi^2$ . Поэтому вычисление мощности критерия согласия не имеет большого практического значения и обычно не производится, а уровень значимости выбирают относительно большим, чтобы уменьшить вероятность ошибки 2-го рода. Для задач в лесном хозяйстве можно рекомендовать  $\alpha = 0,1$  или даже  $0,2$ .

Приведем пример применения критерия согласия  $\chi^2$ .

Возьмем распределение диаметров в древостое дуба (таблица 10.9), которое попытаемся аппроксимировать кривой нормального распределения.

Вычислим выравнивающие частоты для этого ряда распределения (схема вычислений описана в главе 5). В таблице 11.1 приведена схема нахождения  $\chi^2$  по данным о численностях – фактическим и аппроксимированным кривой нормального распределения, и показана схема нахождения  $\chi^2$ .

Таблица 11.1 – Схема вычисления  $\chi^2$  для распределения 238 диаметров в древостое дуба

Ступени толщи- ны $x_i$	Численности		$n_i - \tilde{n}_i$	$(n_i - \tilde{n}_i)^2$	$\chi^2 = \frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{n_i}$	Провер- ка $\frac{n_i^2}{\tilde{n}_i}$
	фактиче- ские, $n_i$	теоретиче- ские, $\tilde{n}_i$				
1	2	3	4	5	6	7
$\geq 16$	12	10	2	4	0,4	14,40
20	21	18	3	9	0,4	24,50
24	30	33	-3	9	0,3	27,27
28	44	45	-1	1	0,0	43,02
32	54	48	6	36	0,7	60,75
36	35	37	-2	4	0,1	33,11
40	23	24	-1	1	0,1	22,04
$\geq 44$	19	20	1	1	0,1	18,05
$\Sigma$	238	235	3	69	2,1	243,14

В таблице 11.1 мы величины численности  $\leq 5$  объединили с соседними значениями, о чем было сказано выше.

Вычисленный критерий  $\chi^2$  равен 2,1. Колонка 7 служит для контроля. При условии, если  $N = \tilde{N}$ , то

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{n_i^2}{\tilde{n}_i} - N \quad (11.4)$$

должен быть равен вычисленному по схеме таблицы 11.1. Поскольку у нас  $N \neq \tilde{N}$ , то следует внести поправки, тогда формула приобретет вид

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{n_i^2}{\tilde{n}_i} - N - (N - \tilde{N}) \quad (11.5)$$

Для нашего примера

$$\chi^2 = 243,14 - 238 - 3 = 2,1.$$

Сравним найденный критерий  $\chi^2=2,1$  с его табличным критическим значением ( $\alpha$ ) для разных уровней значимости ( $\alpha$ ), взятых из специальной таблицы (приложение Н). Число степеней свободы у нас равно:  $m-l-1 = 8-2-1 = 5$ . Для  $\gamma=5$  имеем  $\alpha_{0,9} = 9,24$ ;  $\alpha_{0,8} = 7,29$ ;  $\alpha_{0,5} = 4,35$ ;  $\alpha_{0,2} = 2,67$ ;  $\alpha_{0,1} = 1,62$ ;  $\alpha_{0,05} = 1,15$  и т.д. Следовательно, по критерию  $\chi^2$  наш ряд распределения диаметров в древостое дуба соответствует нормальной кривой Гаусса-Лапласа с вероятностью более 80% (примерно 85-86%).

Рассмотренные выше критерии (t-критерий Стьюдента,  $\chi^2$ ) вводились в предположении, что выборки взяты из нормально распределенной генеральной совокупности, а сами наблюдения независимы. Между тем во многих практических случаях распределение случайной величины неизвестно, а в некоторых – известно то, что оно не соответствует кривой нормального распределения. Поэтому нам надо знать, какие отклонения от нормальности не искажают заключений, получаемых при помощи критериев, и как улучшить условия их применения. Не приводя системы доказательств по причинам, отмеченным выше (краткость курса изучаемой дисциплины), скажем лишь следующее.

В целом, критерии, относящиеся к средним генеральной совокупности (t-критерий Стьюдента), достаточно нечувствительны к отклонениям от нормальности распределений, особенно, если последние не очень асимметричны. Критерии, относящиеся к дисперсиям  $\chi^2$  и F, наоборот, очень чувствительны, при этом отклонения от нормального эксцесса играют гораздо большую роль, чем отклонения от симметричной формы. Применение критериев о дисперсии требует осторожности и проверки исходного распределения на нормальность, особенно при малых выборках. Если не подтверждается гипо-

теза о нормальности, то хорошие результаты дает применение преобразования распределений в нормальные. Так, если необходимо выровнять дисперсии выборок с приближенно равными коэффициентами изменчивости, то хорошие результаты дает логарифмическое преобразование  $y = \ln x$ . Преобразование Джонсона хороший пример преобразования к нормальному виду. Для распределений, близких биномиальному, хорошие результаты дает преобразование  $y = \arcsin \sqrt{x}$ , для пуассоновского  $y = \sqrt{x}$  или  $y = \sqrt{x+0,5}$  (для малых значений), для распределений со значительной левой асимметрией преобразование Фишера  $y = 1/2 \ln[(1+x)/(1-x)]$  и т.д.

Одним из критериев для проверки отклонения от нормальности (в случае больших выборок) могут служить основные ошибки асимметрии и эксцесса. В соответствии со стандартными методами распределение следует считать приближенно нормальным, если  $\alpha/m_\alpha < 2$  и  $E/m_E < 2$ . Для более точного суждения о значимости  $\alpha$  и  $E$  в зависимости от уровня значимости и числа наблюдений можно использовать специальные таблицы для  $\alpha$  (приложение О) и  $E$  (приложение П). При пользовании этими таблицами надо иметь в виду, что распределение  $\alpha$  симметрично, т.е.  $(1-\alpha) = -(\alpha)$  при данном  $N$ . Так, если  $\alpha = 0,05$ , а выборочные значения  $\alpha < 0,389$  и  $E < 0,77$  при  $N = 100$ , то гипотезу о нормальности распределения принимают.

Для вышеприведенного примера с распределением 238 стволов дуба по диаметру и высоте (глава 10) мы получили следующие величины.

Для ряда распределения диаметров:

$$\bar{\delta}=30,7; \sigma=1,9; \bar{\sigma}=7,6; \nu=24,7\%; \alpha=-0,01; E=-0,44; \\ m_x=0,49; m_\sigma=0,09; m_{\bar{\sigma}}=0,35; m_\alpha=0,39; m_E=0,78.$$

Для ряда распределения высот:

$$\bar{\delta}=25,0; \sigma=1,7; \bar{\sigma}=3,4; \nu=13,6\%; \alpha=-0,79; E=0,35; \\ m_x=2,21; m_\sigma=0,078; m_{\bar{\sigma}}=1,56; m_\alpha=0,39; m_E=0,78.$$

В нашем случае:

$$\frac{\alpha_d}{m_{\alpha D}} = \frac{0,01}{0,39} = 0,03 < 2; \quad \frac{\alpha_i}{m_{\alpha i}} = \frac{-0,79}{0,39} = 2,02 \approx 2;$$

$$\frac{E_d}{m_{ED}} = \frac{0,44}{0,78} = 0,56 < 2; \quad \frac{E_i}{m_{\alpha i}} = \frac{0,35}{0,78} = 0,45 < 2.$$

На основе проведенных вычислений можем утверждать, что распределение диаметров соответствует нормальному закону (это подтверждается критерием согласия  $\chi^2$ ), а распределение высот этому распределению не отвечает.

Величина критических значений  $\alpha$  и  $E$  (приложение О, П, Р) для распределения диаметров и высот (объем совокупности, от которой зависят  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , одинаков)  $\beta_1 = 0,246$ ;  $\beta_2 = 0,55$ . Величины  $\beta_1$  и  $\beta_2$  подтверждают сделанный выше вывод о соответствии кривой нормального распределения ряда распределения по диаметру и отклонению от него (по  $\alpha$ ) для ряда высот.

### 11.3 Критерий согласия Колмогорова-Смирнова

Сравнительную оценку двух однородных вариационных рядов, как и сопоставление частот эмпирического и вычисленного распределений, можно произвести и с помощью так называемых непараметрических, или порядковых, критериев. В отличие от критерия хи-квадрат и критерия  $t$  Стьюдента, применение которых основано на использовании выборочных характеристик (параметров)  $\bar{x}$  и  $\sigma$ , при вычислении непараметрических критериев этого не требуется. Но для их применения необходимо упорядочение в виде кумуляции эмпирических и теоретических распределений, т.е. получение рядов накопленных частот.

Для непараметрических критериев характерно то, что они в равной мере пригодны для оценки выборочных распределений любого вида, тогда как применение параметрических критериев исходит из положения о нормальности распределения оцениваемых рядов.

Один из наиболее простых и удобных при сопоставлении эмпирических совокупностей большого объема – критерий, предложенный советскими математиками А.Н. Колмогоровым (1903-1987) и Н.В. Смирновым (1900-1966). Этот непараметрический показатель, обозначаемый греческой буквой  $\lambda$  (лямбда), представляет собой максимальную разность ( $d_{\max}$ ) между значениями накопленных частот эмпирического и вычисленного рядов (без учета знаков  $d$ ), отнесенную к корню квадратному из суммы всех вариант совокупности:

$$\lambda = \frac{d_{\max}}{\sqrt{n}}. \quad (11.6)$$

В отличие от критерия хи-квадрат критерий «лямбда» не только прост по конструкции, но не требует и специальных таблиц, хотя такие таблицы имеются (приложение С) и применяются при уточненных расчетах, но пользуются ими редко. Для упрощенной оценки критерия Колмогорова-Смирнова используют предельные значения критерия лямбда, соответствующие трем уровням доверительной вероятности –  $P_1 = 0,95$ ,  $P_2 = 0,99$  и  $P_3 = 0,999$ , которые соответственно равны 1,36, 1,63 и 1,95. Этот вывод вытекает из следующего расчета. Предельное значение критерия  $\lambda = \sqrt{\frac{1}{2} \ln \frac{2}{P}}$ , где  $P$  – соответствующий уровень значимости. Если принять  $P_1=0,05$ , то  $\lambda = \sqrt{\frac{1}{2} \ln 40} = 1,36$ . При  $P_2=0,01$   $\lambda=1,63$  и т.д. При вычислении критерия «лямбда» отпадает необходимость определения числа степеней свободы.

В тех случаях, когда сравниваются два эмпирических распределения, взятых из одной и той же генеральной совокупности, но имеющих разный объем, критерий «лямбда» вычисляется по следующей формуле:

$$\lambda = d_{\max} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} \quad (11.7)$$

Здесь  $d_{\max} = \sum \frac{p_1}{n_1} - \sum \frac{p_2}{n_2}$ , т.е. эта максимальная разность между значениями первого  $\left(\frac{p_1}{n_1}\right)$  и второго  $\left(\frac{p_2}{n_2}\right)$  рядов накопленных частот.

Вычисление критерия Колмогорова-Смирнова продемонстрируем на примере распределения 238 диаметров в дубовом древостое (таблица 10.9). Результаты приведены в таблице 11.2

Таблица 11.2 – Вычисление критерия  $\lambda$  для распределения 238 диаметров дуба, аппроксимированных кривой нормального распределения

Ступени толщины (разряды) ( $x_i$ )	Численности		Накопленные частоты ( $P_i$ )		$d = P_{\phi} - P_{\tau}$
	фактические ( $n_i$ )	выровненные	фактические $P_{\phi}$	теоретические $P_{\tau}$	
12	3	3	3	3	0
16	9	7	12	10	2
20	21	18	33	28	5
24	30	33	63	61	2
28	44	45	107	106	1
32	54	48	161	154	7
36	35	37	196	191	5
40	23	24	219	215	4
44	17	16	236	231	5
48	2	4	238	235	3
Сумма	238	235	-	-	-

Максимальная величина разности  $d = P_{\phi} - P_{\tau}$  (без учета знаков) равна 7. Тогда  $\lambda = \frac{d}{\sqrt{N}} = \frac{7}{\sqrt{238}} = \frac{7}{15,7} = 0,45$ .

Полученная величина  $\lambda$  (0,45) значительно меньше его предельного значения (1,36) для  $P=0,05$ . Таким образом, можно утверждать, что расхождения между теоретически вычисленными частотами (по кривой нормального распределения) и фактическими носят случайный характер, и наш ряд распределения можно описать с помощью кривой Гаусса-Лапласа (нормального распределения).

Теперь рассмотрим пример, когда сопоставлены два ряда распределения, и необходимо оценить, принадлежат ли они к одной генеральной совокупности. Для этого сравним данные замеров диаметров на 2 пробных площадках, заложенных в двадцатилетних сосновых насаждениях в типе леса сосняк мшистый II класса бонитета, различных по происхождению: естественный

древостой и лесные культуры. При этом объемы выборок отличаются (таблица 11.3).

Вычисление  $\lambda$  проводится по формуле (11.7):

$$\lambda = d_{max} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$$

$$\lambda = 0,232 \cdot \sqrt{\frac{320 \cdot 434}{320 + 434}} = 0,232 \cdot \sqrt{\frac{138880}{754}} = 0,232 \cdot \sqrt{184,2} = 0,232 \cdot 13,57 = 3,149.$$

Вычислить  $\lambda$  можно также по формуле

$$\lambda^2 = d^2 \frac{N_1 \cdot N_2}{N_1 + N_2} = 0,232^2 \cdot \frac{138880}{754} = 0,05382 \cdot 184,2 = 9,9136;$$

$$\lambda = \sqrt{9,9136} = 3,15,$$

т.е. получили одинаковые величины в пределах точности округлений.

Таблица 11.3 – Вычисление критерия Колмогорова-Смирнова для двух пробных площадей, заложенных в сосновых молодняках

Ступени толщины (классовые промежут- ки) ( $x_i$ )	Численно- сти		Частоты		Накоплен- ные частоты		$d_i =$ $ P_1 - P_2 $	$\max$ $d_i$
	$n_i^1$ л/к	$n_i^2$ ес- теств.	$P_1 = \frac{n_i^1}{\sum n_1}$	$P_2 = \frac{n_i^2}{\sum n_2}$	$\sum P_{i1}$	$\sum P_{i2}$		
2	-	86	-	0,198	-	0,148	-	-
4	61	98	0,191	0,225	0,191	0,423	0,232	0,23 2
6	76	102	0,237	0,235	0,428	0,658	0,230	-
8	91	69	0,284	0,150	0,712	0,816	0,104	-
-10	46	35	0,144	0,080	0,856	0,896	0,040	-
12	29	27	0,091	0,062	0,947	0,958	0,011	-
14	17	12	0,053	0,027	-	0,985	-	-
16	-	5	-	0,015	-	1,000	0	-
$\sum(N)$	32 0	434	1,000	1,000	-	-	-	-

Анализ вычисленного значения  $\lambda$  показывает, что сравниваемые совокупности принадлежат к разным генеральным совокупностям, и описываются различающимися кривыми:  $\lambda=3,15 > 2,1$ , т.е. достоверность различий превышает 99% уровень. Это соответствует материалам, приводимым многими учеными, которые исследовали строение искусственных и естественных со-



сновых молодняков: И.И. Григалюнас, В.Ф. Багинский, В.С.Моисеев, А.А.Макаренко и другие.

Из опыта применения критериев  $\lambda$  и  $\chi^2$  следует, что критерий Колмогорова-Смирнова менее чувствителен, чем  $\chi^2$ . В спорных случаях (при граничных значениях)  $\lambda$  обычно подтверждает соответствие теоретическому распределению, а  $\chi^2$  может это утверждение опровергать. В этом случае исследователь в силу своей классификации, особенностей задачи, ее важности и сложности принимают нулевую или альтернативную (рабочую) гипотезу.

При применении критерия  $\lambda$  непременным условием применения должно быть относительно большое число (не менее 100) наблюдений. Поэтому простой по своей конструкции, он не приложим к оценке малочисленных совокупностей.

### 11.4 Применение статистического оценивания в лесном хозяйстве

Статистические критерии находят широкое применение в лесном хозяйстве, особенно при проведении научных исследований. Про применение t-критерия Стьюдента и F-критерия Фишера уже описано в главе 10.

Критерии согласия используют при многочисленных исследованиях товарности древостоев. Товарность насаждения зависит от многих факторов (их изучает лесная таксация и древесиноведение), но одним из главных являются закономерности распределения числа стволов по ступеням толщины в зависимости от среднего диаметра древостоя. Для того, чтобы убедиться, что распределение выбрано верно, применяют критерии согласия  $\chi^2$  и  $\lambda$ . Ошибка в выборе верного распределения может дорого стоить в прямом смысле этого слова, т.к. товарность древостоя определяет цену 1 м<sup>3</sup> и стоимость древостоя на выделе.

Критерии согласия используют также для оценки относительной однородности разных выборок. Это часто имеет значение для доказательства принадлежности древостоев на разных пробных площадях к одной или разным генеральным совокупностям как в примере, представленном выше. Такое сравнение важно при подборе серии пробных площадей, закладываемых с разными целями в древостоях примерно одинакового возраста, но отличающихся происхождением, полнотой и густотой, режимом ухода, проведенными мелиоративными мероприятиями и т.д.

Заканчивая рассмотрение про статистическое оценивание приведем основные статистические оценки в компактном виде для удобства пользователя.

Ошибка среднего значения  $m_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , где

$\sigma$  - среднее квадратическое отклонение

$$P(|x_i - \bar{x}| \leq m) = 0,683$$

$$P(|x_i - \bar{x}| \leq 2m) = 0,95$$

$$P(|x_i - \bar{x}|) \leq 3m = 0,99$$

Ошибка среднего квадратического отклонения

$$m_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$$

Ошибка коэффициента вариации

$$m_V = \frac{V}{\sqrt{2N}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{V}{100}\right)^2} \quad \text{или} \quad m_V = V \cdot \sqrt{\frac{0.5 + 0.0001V^2}{N}}$$

Ошибка асимметрии

$$m_\alpha = \sqrt{\frac{6}{n}}$$

Ошибка эксцесса

$$m_E = 2m_\alpha$$

Точность опыта

$$P = \frac{V}{\sqrt{n}}$$

Количество наблюдений при заданной точности

$$n = \frac{V^2}{P^2}$$

Достоверность вывода

$$t = \frac{\bar{x}}{m_x}$$

Ошибка суммы средних величин ( $\bar{x}$ )

$$m_{\bar{x}_1 = \bar{x}_2} = \sqrt{m_{\bar{x}_1}^2 + m_{\bar{x}_2}^2}$$

$$m_{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n} = \sqrt{m_{\bar{x}_1}^2 + m_{\bar{x}_2}^2 + \dots + m_{\bar{x}_n}^2}$$

Средняя ошибка разности двух средних величин при  $N_1 = N_2$

$$m_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}$$

при  $N_1 \neq N_2$   $m_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\sigma_{\sigma\sigma}^2 (N_1 + N_2) / N_1 N_2}$

$$\sigma_{\sigma\sigma}^2 = \left[ \sum (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_{i2} - \bar{x}_2)^2 \right] / (N_1 + N_2 - 2)$$

Ошибка произведения средних величин

$$m_{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}_1}}{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{x}_2}}{\bar{x}_2}\right)^2}$$

Средняя ошибка частного средних величин

$$m_{\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}} = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} \sqrt{\left(\frac{m_{\bar{x}_1}^2}{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{m_{\bar{x}_2}^2}{\bar{x}_2}\right)^2}$$

Оценка существенности различий между средними

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2}} = \frac{D}{m_D}$$

**t** – критерий достоверности

$$|t| \geq 3$$

Достоверность различия между дисперсиями

$$t = \frac{\sigma^2_1 - \sigma^2_2}{m^2_\sigma} = \frac{D}{m^2_\sigma}$$

$$m_\sigma = \sqrt{\frac{\sigma^2_1}{2n_1} + \frac{\sigma^2_2}{2n_2}}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(p - p')^2}{p}, \text{ где}$$

$p$  – эмпирические частоты

$p'$  – теоретические частоты

$$\lambda = d_{\max} \sqrt{\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}}$$

$$d_{\max} = \sum \frac{p_1}{N_1} - \sum \frac{p_2}{N_2}, \text{ где}$$

$N_i$  - объем ряда распределения

$p_i$  - накопленные частоты

## 12. СТАТИСТИКИ СВЯЗИ

12.1 Понятие о корреляции

12.2 Коэффициент корреляции как мера линейной связи

12.3 Корреляционное отношение как мера криволинейной связи

12.4 Другие статистические показатели корреляции. Использование корреляции в лесном хозяйстве

### 12.1 Понятие о корреляции

Исследуя лесные насаждения, мы замечаем, что в них гармонично сочетаются различные признаки. В лесу нет хаоса, а существуют законы и закономерности, по которым лесной биогеоценоз развивается и на основе которых существует. Подобные закономерности присущи как другим биологическим объектам, так и человеческому сообществу.

Взаимная зависимость двух величин (или явлений), когда изменение одной из них ведет к закономерному изменению другой называется корреляцией. Это понятие широко используется в науке, особенно в биологии, физике, химии. Например, в лесном хозяйстве известны тесные связи между диаметром и высотой дерева. Для одной породы, например березы, при большей высоте, как правило, наблюдается и больший диаметр. В свою очередь высота дерева в определенном возрасте зависит от плодородия почвы. С высотой, значит, и с плодородием почвы, тесно связана производительность древостоев. Форма ствола зависит от таксационной характеристики насаждения: его густоты, высоты дерева.

Зависимости и связи в природе и обществе, имеющие общие методы их статистического измерения, называют корреляцией, связью или зависимостью. Последние два слова - это синонимы термина "корреляция".

Известны функциональные и корреляционные связи. Последние еще называют стохастическими. К функциональным относят законы математики и физики. Например  $E = mc^2$ ;  $L = 2\pi R$ ;  $V = at$ ;  $S = gt^2/2$  и другие известные из школьного курса математики и физики. Здесь изменение одной из величин всегда ведет к обязательному, четко обозначенному и всегда определенному изменению другой величины. Общие связи такого рода называются физическими или природными законами. Закон, примененный к некоторому частному случаю, называется закономерностью. Например, есть общий физический закон - металлы при нагревании расширяются. В отношении же конкретного металла, скажем меди, конкретные коэффициенты температурного расширения – это уже закономерность. Применительно к лесному хозяйству можно привести следующий пример. Рост дерева в высоту – биологический закон роста растений. Параметры роста (скорость увеличения высоты дерева с возрастом) для конкретного древесного вида, скажем, березы, - это закономерность.

В природе явления развиваются под воздействием различных факторов внешней среды. Поэтому связь между признаками проявляется в виде корреляционной связи, или корреляции.

В этом случае каждому значению одного признака здесь соответствует не одно, а несколько значений другого признака, т.е. его распределение. Один из признаков (обычно легче или точнее измеримый) принимают за факториальный, а другой – за результативный. Иногда, в условном значении, один называют независимым, а другой – зависимым от первого.

Статистическое исследование корреляции сводится к установлению факта связи, определению ее формы, направленности и тесноты. Установление факта связи специалисты в определенной отрасли производят сначала на основе общего анализа явления. Например, можно сказать о наличии корреляции между размерами дерева: толщиной и высотой еще до их измерения. В других случаях наличие корреляции между изучаемыми признаками нельзя предсказать столь определенно. Например, без измерений и последующего анализа трудно оценить связь формы ствола с его высотой. В этом случае решают вопрос о наличии корреляции на основе измерения и статистического анализа его результатов.

Поясним сказанное примерами. Так, мы уже говорили, что с увеличением диаметра дерева становится больше и его высота. Пусть у нас есть деревья ели I бонитета с диаметрами 20, 24, 28, 32 см. Высоты этих стволов равны 23, 25, 29, 32 м. Но, если мы измерим, скажем, по 20 деревьев каждого из названных диаметров, то окажется, что высоты колеблются в таких пределах

Диаметр, см	Высота (от-до), м
20	21-25
24	23-27
28	26-32
32	29-35

Общая закономерность (увеличение высоты с ростом диаметра) выдерживается, среднее значение высоты тоже, но высота будет соответствовать вычисленному значению (23, 25, 29, 32) с определенной вероятностью (0,68) и среднеквадратической ошибкой. Это и есть вероятностная или стохастическая связь.

Корреляцию называют простой, если она измеряется на основе двух признаков, или множественной, если изменение результативного признака изучают в связи с влиянием или изменением нескольких факториальных признаков. Например, когда мы рассматриваем связь диаметр дерева – высота, то это простая корреляция. Связь, когда высоту дерева изучают в зависимости от почвенного плодородия, густоты древостоя, древесной породы, будет множественной.

По форме различают корреляцию линейную, когда зависимость между признаками отражается прямой линией, и криволинейную, когда ее отражает уравнение какой-нибудь кривой. Во многих случаях форму корреляции можно предсказать еще до опыта. Например, между

длиной и толщиной корней молодых деревьев в древостое можно ожидать линейную корреляцию. Но нельзя ожидать такой же формы корреляции у деревьев, растущих в старых древостоях. Статистический анализ дает ответ о форме связи и в тех случаях, когда на основе биологического анализа ее установить трудно или вообще невозможно.

По направленности различают корреляцию прямую, когда с увеличением одного признака в среднем увеличиваются и значения другого, а с уменьшением - уменьшаются, и обратную, когда с увеличением значений одного признака значения другого в среднем уменьшаются и наоборот. Пример прямой связи приведен выше – диаметр и высота дерева. Обратную связь мы можем наблюдать, изучая влияние вредителей (допустим, обыкновенного соснового пилильщика) на прирост сосны. С увеличением количества гусениц на одном дереве прирост уменьшается.

Типичные картины статистических связей наблюдаются в двух практически разных случаях:

а) изучается связь между случайными величинами;

б) в действительности изучается функциональная связь, но погрешности измерений порождают изменчивость и создают видимость статистической связи.

С точки зрения статистического анализа на этапе выяснения существования зависимости эту разницу можно не учитывать; на этапе построения моделей возникают существенные различия в ее интерпретации и использовании.

Можно дать следующую трактовку стохастическим связям. При изучении связи между двумя величинами нельзя гарантировать, что одна величина полностью определяет значения другой, т.е. что учтены все основные факторы, общие для обеих величин. Кроме того, может существовать различная доля основных факторов, общих для обеих величин. Кроме основных существуют и случайные факторы, влияющие на изучаемые величины и затушевывающие имеющуюся закономерность. Поэтому чем больше общих факторов для изучаемых величин и чем полнее они учтены, тем отчетливее связь между изучаемыми величинами и тем уже “зона рассеивания”, которая в пределе превращается в некоторую линию, отражающую функциональную зависимость.

Из вышеприведенных рассуждений вытекает очевидная необходимость в статистических показателях, отражающих наличие и степень тесноты связи. Такие показатели (для выборки) называют статистиками связи. Важность статистик связи в моделировании очевидна: прежде чем конструировать модель, следует выяснить, в каких отношениях между собой находятся интересующие показатели. По смыслу здесь наблюдается полнейшая аналогия со статистиками распределений: статистики связи являются выборочными оценками параметров связи в генеральной совокупности.

Исходными данными для статистического анализа при большом числе наблюдений служат таблицы распределения, составляемые с со-

блюдением правил, идентичных правилам для составления рядов распределения, но наблюдения “разносятся” с учетом обоих признаков. Пример распределения такого показан в таблице 12.1. Наглядно подобные распределения видны на графиках. Для примера такие графики приведены на рисунке 12.1. На рисунке 12.1а четко просматривается закономерная зависимость исследуемых признаков, а на рисунке 12.1б она выражена гораздо слабее.

Таблица 12.1 – Распределение диаметров и высот для 238 деревьев дуба

Ступени толщины, см (середины классов)	Число стволов, шт. (частоты)									Сум ма час- тот	Услов ные сред- ние
	Ступени высоты, м (середины классов)										
	16	18	20	22	24	26	28	30	32		
12	3	-	-	-	-	-	-	-	-	3	16,0
16	3	3	3	-	-	-	-	-	-	9	18,0
20	2	5	10	4	-	-	-	-	-	21	19,5
24	-	2	2	11	12	3	-	-	-	30	22,8
28	-	-	-	3	28	11	2	-	-	44	24,5
32	-	-	-	-	5	38	11	-	-	54	26,2
36	-	-	-	-	1	22	11	-	1	35	26,7
40	-	-	-	-	-	1	15	7	-	23	28,5
44	-	-	-	-	-	-	7	10	-	17	29,2
48	-	-	-	-	-	-	-	1	1	2	31,0
Сумма частот	8	10	15	18	46	75	46	18	2	238	-
Условные средние	15,5	19,6	19,7	23,8	27,6	32,3	37,2	42,7	42,0	-	-

Таблицы, составляемые подобно 12.1, используют затем для расчета тесноты связи между искомыми величинами. При малом числе наблюдений тесноту связи можно вычислять непосредственно, т.е. без сводки исходных данных в таблицы.

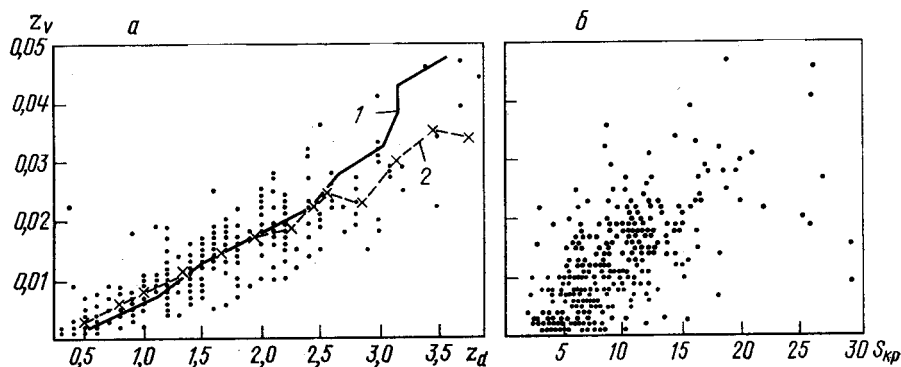


Рисунок 12.1 – Точечные диаграммы (по К.Е. Никитину и А.З. Швиденко):  
а - текущего прироста по диаметру  $z_d$  и по объему  $z_v$ ;  
(1 - регрессия  $y$  на  $x$ ; 2 - регрессия  $x$  на  $y$ )  
б - площади проекций крон  $S_{кр}$  и  $z_v$

Требуется пояснить смысл терминов “связь” и “зависимость”. Как и во всем статистическом анализе, основным здесь является выяснение причинной сути установленных корреляций. Так, если рассматривается связь между диаметром дерева и его высотой, то очевидно, что  $y_i (D_i)$  зависит от  $x_i (H_i)$ , но можно считать и наоборот. Поэтому в некоторых задачах возможна симметрия воздействия. Но если рассматривается связь между количеством выпадающих осадков и производительностью древостоев, то здесь может быть только зависимость «в одном направлении», хотя статистически можно попытаться установить и зависимость осадков от производительности древостоев, и даже получить какое-то ее цифровое выражение, но бесплодность подобных упражнений очевидна.

Тесноту корреляции, или степень сопряженности между значениями одного и другого признака, выражают в виде отвлеченных статистических характеристик (показателей) связи - коэффициента корреляции  $r$  и корреляционного отношения -  $\eta$ .

## 12.2 Коэффициент корреляции как мера линейной связи

Коэффициент корреляции – это статистика, которая является численной характеристикой связи между признаками, когда она имеет линейный характер. Это значит, что связь между величинами  $x$  и  $y$  выражается общей формулой  $y = a_0 + a_1x$ , где  $a_0$  и  $a_1$  – коэффициенты, которые определяют на основе выборочных наблюдений. Коэффициент корреляции численно выражает отношение числа факторов, действующих на изменение обоих признаков к общему числу факторов.

Указанное содержание коэффициента корреляции достаточно хорошо выражает формула

$$r_{yx} = \frac{\sum n_{ij} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2}} \quad (12.1)$$

Это выражение также можно записать

$$r = [\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})] / N\sigma_x \sigma_y \quad (12.2)$$

В формуле (12.1)  $x_i$  и  $y_i$  – случайные (исследуемые) величины;  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  – средние значения для  $x$  и  $y$ .

Величина  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  в формуле (12.2) – среднеквадратические отклонения распределений  $X$  и  $Y$ ;  $N$  - число сопоставляемых пар или число наблюдений.

Из формулы видно, что при независимом варьировании признаков, когда любое из отклонений  $X_i - \bar{X}$  может сочетаться с любыми  $Y_i - \bar{Y}$  (как



с положительными, так и с отрицательными, притом одинаково часто), числитель ее будет равен нулю или близкой к нулю величине. Следовательно, и  $r \approx 0$ . При сопряженном варьировании отклонения  $X_i - \bar{X}$  сочетаются только с некоторыми отклонениями  $Y_i - \bar{Y}$ , например, положительные в основном только с положительными (при прямой связи) или положительные с отрицательными (при обратной связи). В этом случае сумма произведений будет иметь положительное (при прямой связи) или отрицательное (при обратной связи) значение, притом тем большее по своей величине (при данном  $N$ ), чем связь сопряженнее.

Делением суммы произведений отклонений на число коррелирующих пар получают среднюю величину произведения, а делением на стандартные отклонения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  выражают это произведение отвлеченным числом, характеризующим тесноту связи.

В целом коэффициент корреляции представляет собой эмпирический первый основной смешанный момент, т.е.

$$r = \frac{m_{1/1}}{\sigma_1 \sigma_2} \quad (12.3)$$

Для его вычисления надо найти первый начальный смешанный момент  $m_{1/1}$  и первые два начальных момента каждого из рядов распределения. Вычисление моментов для одномерных рядов распределения описано ранее (глава 5). Здесь же покажем вычисление требуемых нам моментов для двухмерной совокупности.

Эмпирическим смешанным начальным моментом порядка  $(k_1, k_2)$  двух случайных величин  $(x_i, y_i)$ , которые сведены в таблицу и сгруппированы по определенным разрядам, называется сумма произведений каждой пары отклонений  $x_{1(i2)}$  и  $x_{2(j2)}$ . Отклонения берут от начальных значений  $x_{1(a)}$  и  $x_{2(a)}$  в  $h_1$  и  $h_2$  степени и умножают на соответствующую частность  $P'_{i1/j2}$  (формула (12.4)).

$$m_{k_1/k_2} = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} P'_{k_1/k_2} x_{1(i/1)}^{k_1} x_{2(j/2)}^{k_2} \quad (12.4)$$

Придавая величинам  $k_1$  и  $k_2$  разные значения, получаем смешанные моменты  $m_{1/1}$ ,  $m_{2/1}$ ,  $m_{1/2}$ ,  $m_{1/3}$ ,  $m_{2/2}$ .

Соотношения между определенными выше смешанными центральными и начальными моментами даются формулами:

$$\begin{aligned} \mu_{1|1} &= m_{1|1} - m_{1|0} m_{0|1}, \\ \mu_{2|1} &= m_{2|1} - 2m_{1|1} m_{1|0} - m_{0|1} (\mu_{2|0} - m_{1|0}^2), \\ \mu_{1|2} &= m_{1|2} - 2m_{1|1} m_{0|1} - m_{1|0} (\mu_{0|2} - m_{0|1}^2), \\ \mu_{3|1} &= m_{3|1} - 3m_{2|1} m_{1|0} + 3m_{1|1} m_{1|0}^2 - m_{0|1} (\mu_{3|0} - m_{1|0}^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{1|3} &= m_{1|3} - 3m_{1|2}m_{0|1} + 3m_{1|1}m_{0|1}^2 - m_{1|0}(\mu_{0|3} - m_{0|1}^3), \\ \mu_{2|2} &= m_{2|2} - 2(m_{2|1}m_{0|1} + m_{1|2}m_{1|0}) + 4m_{1|1}m_{1|0}m_{0|1} + m_{1|0}^2(\mu_{0|2} - m_{0|1}^2) + m_{0|1}^2\mu_{2|0}.\end{aligned}$$

Для проверки вычислений применяются формулы:

$$\begin{aligned}\mu_{1|1} &= m_{1|1} - m_{1|0}m_{0|1}, \\ \mu_{2|1} &= m_{2|1} - 2\mu_{1|1}m_{1|0} - m_{2|0}m_{0|1}, \\ \mu_{1|2} &= m_{1|2} - 2\mu_{1|1}m_{0|1} - m_{0|2}m_{1|0}, \\ \mu_{3|1} &= m_{3|1} - 3\mu_{2|1}m_{1|0} + 3\mu_{1|1}m_{1|0}^2 - m_{3|0}m_{0|1}, \\ \mu_{1|3} &= m_{1|3} - 3\mu_{1|2}m_{0|1} + 3\mu_{1|1}m_{0|1}^2 - m_{0|3}m_{1|0}, \\ \mu_{2|2} &= m_{2|2} - 2(\mu_{2|1}m_{0|1} + \mu_{1|2}m_{1|0}) + 4\mu_{1|1}m_{1|0}m_{0|1} + m_{0|2}m_{1|0}^2 + \mu_{2|0}m_{0|1}^2.\end{aligned}$$

Эмпирические смешанные основные моменты порядка  $(h_1; h_2)$  находят-ся при помощи центральных:

$$r_{h_1|h_2} = \frac{\mu_{h_1|h_2}}{\sigma_1^{h_1}\sigma_2^{h_2}}.$$

В частности,

$$\begin{aligned}r_{1|1} &= \frac{\mu_{1|1}}{\sigma_1\sigma_2}, & r_{2|1} &= \frac{\mu_{2|1}}{\sigma_1^2\sigma_2}, & r_{1|2} &= \frac{\mu_{1|2}}{\sigma_1\sigma_2^2}, \\ r_{3|1} &= \frac{\mu_{3|1}}{\sigma_1^3\sigma_2}, & r_{1|3} &= \frac{\mu_{1|3}}{\sigma_1\sigma_2^3}, & r_{2|2} &= \frac{\mu_{2|2}}{\sigma_1^2\sigma_2^2}.\end{aligned}$$

Смешанный основной момент первого порядка  $r_{1|1}$  называется коэффициентом корреляции и обозначается через  $r$ :

$$r = \frac{\mu_{1|1}}{\sigma_1\sigma_2}. \quad (12.5)$$

Смешанные моменты различных порядков могут быть вычислены как по способу произведений, так и по способу сумм.

По способу произведений вычисляется смешанный момент  $m_{1|1}$  порядка  $(1,1)$ . Для этого применяется схема, в которой наряду с таблицей распределения составляется еще вспомогательная таблица.

Схема вычисления  $m_{1|1}$  показана в таблице 12.2. Для примера взято распределение 238 деревьев дуба по диаметру и высоте (таблица 12.1). Схема вычисления  $m_{1|1}$  представляет собой таблицу распределения, в заголовках которой разрядные значения первой величины (диаметра) и разрядные значения второй величины (высоты) заменяются отклонениями  $x'_{1(i/1)}$  и  $x'_{2(j/2)}$  значений от соответствующих начальных величин начальных значений.

Таблица 12.2 – Схема вычисления  $m_{1/1}$  для распределения диаметров и высот по способу произведений для 238 деревьев дуба

Ступени тол- щины, см	Число стволов, шт. (частоты)										Сумма частот
	Ступени высоты, м (середины классов)										
		16	18	20	22	24	26	28	30	32	
	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4		
12	-5	+20 3	-	-	-	-	-	-	-	-	3
16	-4	+16 3	+12 3	+8 3	-	-	-	-	-	-	9
20	-3	+12 2	+9 5	+6 10	+3 4	-	-	-	-	-	21
24	-2	-	+6 2	+4 2	+2 11	12	-2 3	-	-	-	30
28	-1	-	-	-	+1 3	28	-1 11	-2 2	-	-	44
32	0	-	-	-	-	5	38	11	-	-	54
36	1	-	-	-	-	1	+1 22	+2 11	-	+4 1	35
40	2	-	-	-	-	-	+2 1	+4 15	+6 7	-	23
44	3	-	-	-	-	-	-	+6 7	+9 10	-	17
48	4	-	-	-	-	-	-	-	+12 1	+16 1	2
Сум- ма частот	-	8	10	15	18	46	75	46	18	2	238

Таблица 12.3 – Вспомогательная таблица для вычисления  $m_{1/1}$  в древо-  
стое дуба

$x_2$ x	Четверти				$\Sigma$ стр. 1+4	$\Sigma$ стр. 2+3	$\Sigma$ стр. 5+6	Стр.0*стр.7	Проверка
	I	II	III	IV					
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	11	-	22	25	11	14	14	1.127+16+ +46+54- -5=238
2	11	3+2	-	11+1	23	5	18	36	
3	4	-	-	-	4	-	4	12	
4	2	-	-	1+15	18	-	18	72	
6	10+2	-	-	7+7	26	-	26	156	2.14+18+ +4+18+ +26+3+ +15+6+4+ +3=111
8	3	-	-	-	3	-	3	24	
9	5	-	-	10	15	-	15	135	
12	2+3	-	-	1	6	-	6	72	
16	3	-	-	1	4	-	4	64	
20	3	-	-	-	3	-	3	60	
$\Sigma$	-	-	-	-	127	16	111	645	

Частоты строки и столбца таблицы, расположенных против отклонений, равных нулю, будучи умножены на нуль, дадут в результате нуль. Выделив эти нулевые строку и столбец при помощи жирных линий, мы разделим всю таблицу распределения на четыре четверти.

В I (левой верхней) четверти таблицы частоты должны быть умножены на отрицательные отклонения  $x_{1(j1)}$  и отрицательные отклонения  $x_{2(j2)}$ ; во II (правой верхней) четверти отклонения  $x_{1(j1)}$  отрицательны; а отклонения  $x_{2(j2)}$  положительны; в III (левой нижней) четверти отклонения  $x_{1(j1)}$  положительны, а отклонения  $x_{2(j2)}$  отрицательны; наконец, в IV (правой нижней) четверти как отклонения  $x_{1(j1)}$  так и отклонения  $x_{2(j2)}$  положительны.

Таким образом, в I и IV четверти частоты должны быть умножены на положительные произведения отклонений  $x_{1(j1)} x_{2(j2)}$ , а во II и III четверти – на отрицательные произведения отклонений  $x_{1(j1)} x_{2(j2)}$ . Каждое такое произведение отклонений с указанием знака выписывается в правом верхнем углу соответствующей клетки таблицы распределения цифрами меньшего размера.

Вспомогательная таблица (таблица 12.3) состоит из десяти столбцов (0)–(9). В столбце (0) выписывают в возрастающем порядке, не обращая внимания на знак и на число повторений, все произведения отклонений  $x_{1(j1)} x_{2(j2)}$ , помеченные маленькими цифрами в клетках таблицы распределения. В столбце (1) против соответствующих абсолютных произведений отклонений выписывают из I четверти таблицы распределения все частоты, соединяя их знаком плюс. Подобным же образом, в столбцах (2), (3) и (4) выписывают все частоты из II, III и IV четвертей таблицы распределения. В столбце (5) записывают суммы чисел каждой строки (1) и (4) столбцов, а в столбце (6) – суммы чисел каждой строки (2) и (3) столбцов. Затем находят итоги чисел столбца (5) и столбца (6). В рассматриваемом примере итог столбца (5) равен 127, а итог столбца (6) равен 16.

Прежде чем делать дальнейшие вычисления, необходимо произвести проверку правильности предыдущей работы. Для этого складывают итоги столбцов (5) и (6) вспомогательной таблицы 12.3 с итогами нулевой строки и нулевого столбца таблицы 12.2 распределения и из полученной суммы вычитают число, стоящее в центральной нулевой клетке таблицы распределения 12.2, так как это число, как нетрудно видеть, было подсчитано дважды. В результате таких действий должно получиться число, равное объему таблицы распределения. В рассматриваемом примере имеем:

$$127+16+46+54-5=238.$$

Проверка записывается в верхней части столбца (9) вспомогательной таблицы 12.3. Это проверка 1.

Убедившись, таким образом, в правильности проделанной вычислительной работы, составляют затем числа столбца (7), которые получаются путем вычитания чисел столбца (6) из чисел столбца (5); при этом необходимо проставлять знак полученной разности. Для проверки этого шага вы-

числительной работы заметим, что сумма чисел столбца (7) вспомогательной таблицы 12.3 должна равняться разности итогов столбцов (5) и (6) этой же таблицы. В рассматриваемом случае

$$127-16=111.$$

Эта проверка записывается в нижней части столбца (9) вспомогательной таблицы 12.3. Это проверка 2. У нас равенство получилось.

Последний шаг работы при вычислении смешанного момента  $m_{1/1}$  делается в столбце (8) вспомогательной таблицы. В этом столбце помещаются произведения чисел столбцов (0) и (7). Сумма чисел столбца (8) представляет числитель смешанного момента  $m_{1/1}$ . Разделив эту сумму на объем таблицы распределения, получим искомый момент. В рассматриваемом примере имеем

$$m_{1/1} = \frac{645}{238} = 2,170.$$

При ручном счете большой объем вычислительной работы и отсутствие возможности полной проверки в самом ходе вычислений смешанного момента  $m_{1/1}$  были существенными недостатками способа произведений. Для вычисления же смешанных моментов более высокого порядка ручной способ оказывается совершенно непригодным.

В настоящее время все подобные расчеты автоматизированы и, естественно, практически никто вручную коэффициент корреляции не вычисляет, но специалист должен знать суть этого процесса и алгоритм вычислений.

Для ручного счета ранее применялся способ сумм как более легкий в расчетах. При компьютерных вычислениях проще применять способ произведений (легче составлять программу), поэтому описание громоздкого способа сумм здесь опускаем.

Вычислив первый смешанный момент, определяем коэффициент корреляции по приведенной выше формуле (12.5). Для этого необходимо вычислить первый смешанный центральный момент  $\mu_{1/1}$ . Формула для его вычисления приводилась выше:

$$\mu_{1/1} = m_{1/1} - m_{1x} \cdot m_{2y}, \quad (12.6)$$

где  $\mu_{1/1}$  – первый основной смешанный момент;

$m_{1x}$  и  $m_{2y}$  – соответственно первые начальные моменты распределения по  $x$  и  $y$ . У нас это диаметр и высота. Эти моменты вычислены ранее (глава 10, табл. 10.9 и 10.10). Они равны  $m_{1x(D)} = 0,672$ ;  $m_{2y(M)} = 0,500$ .

$$\text{Тогда } \mu_{1/1} = 2,71 - 0,672 \cdot 0,500 = 2,76 - 0,336 = 2,374.$$

Среднеквадратическое отклонение для рядов распределения по диаметру и высоте вычислены ранее (глава 10) и равны

$$\sigma_D = 1,9 (\bar{\sigma} = 7,6), \sigma_M = 1,702 (\bar{\sigma} = 3,403);$$

$$\text{Тогда } r = \frac{2,374}{1 \cdot 9 \cdot 1,7} = \frac{2,374}{3,23} = 0,74.$$

При малых выборках коэффициент корреляции можно вычислить непосредственно по приведенным выше формулам (12.1-12.2).

Пример вычисления коэффициента корреляции, который приводит Н.Н. Свалов, для малых выборок показан в таблице 12.4. Подставив в формулу величины, вычисленные в 12.4, получим

$$r = \frac{227 - (55 \cdot 40) / 10}{\sqrt{(313 - \frac{55^2}{10})(166,26 - \frac{40^2}{10})}} = \frac{7,0}{\sqrt{10,50 \cdot 6,26}} = 0,86.$$

Таблица 12.4 – Вычисление коэффициента корреляции между длиной стволиков и длиной корней сеянцев сосны

Длина стволика X, см	Длина корня Y	Отклонение					Вычисление
		x	y	xy	x <sup>2</sup>	y <sup>2</sup>	
5	3,5	-0,5	-0,5	+0,25	0,25	0,25	$\bar{X} = \sum X/N = 55/10 = 5,5 \text{ см}$ $\bar{Y} = \sum Y/N = 40/10 = 4,0 \text{ см}$ $r = \sum xy / \sqrt{\sum x^2 \sum y^2} =$ $= 7,00 / \sqrt{10,50 \cdot 6,26} = 0,86$
6	4,0	+0,5	0	0	0,25	0	
5	4,1	-0,5	+0,1	-0,05	0,25	0,01	
7	5,0	+1,5	+1,0	+1,50	2,25	1,00	
6	3,5	+0,5	-0,5	0,25	0,25	0,25	
4	3,1	-1,5	-0,9	+1,35	2,25	0,81	
5	3,5	-9,5	-0,5	+0,25	0,25	0,25	
4	3,0	-1,5	-1,0	+1,50	2,25	1,00	
7	5,3	+1,5	+1,3	+1,95	2,25	1,69	
6	5,0	+0,5	+1,0	+0,50	0,25	1,0	
$\Sigma 55$	40,0	0	0	+7	10,50	6,26	

**Оценка показателей связи при малых выборках.** При оценке коэффициента корреляции при малой выборке возникают некоторые новые проблемы в связи с тем, что при высоких значениях корреляции в генеральной совокупности ( $\rho$ ) выборочные коэффициенты корреляции ( $r$ ) имеют

не нормальное, а позитивно (правостороннее) асимметричное распределение. В таких случаях на основе выборочного  $r$  и его ошибки  $\sigma_r$  можно применить лишь оценку значимости  $r$  при гипотезе  $\rho=0$ , т.е. лишь одну форму оценки из двух.

Для данных таблицы 12.4 при  $r=0,86$  имеем следующую его оценку

$$\sigma_r = \sqrt{(1-r^2)/(N-2)} = \sqrt{(1-0,86)(10-2)} = 0,18.$$

Затем вычислим  $t$ -критерий и сравним его с табличными значениями (приложение Е)

$$t_r = r / \sigma_r = 0,86 / 0,18 = 5,33.$$

Полученное значение  $t_r$  превышает даже  $t_{0,001} = 5,0$ . Следовательно,  $r$  значимо на высоком уровне достоверности.

Эту форму оценки нельзя применять при других гипотезах, кроме  $\rho=0$ . Равным образом критерий  $t$  нельзя использовать для построения доверительного интервала. Р.А. Фишер предложил для этих целей  $z$ -преобразование величины  $r$ .

Величина  $z$

$$z = 1/2 [\ln(1+r) - \ln(1-r)] \quad (12.7)$$

имеет нормальное распределение с дисперсией

$$\sigma_z^2 = 1/(N-3) \quad (12.8)$$

Для получения  $z$  имеются номограммы и таблицы, которые здесь не приводятся.

Для совокупности длин стволиков и корней при  $r=0,86$   $z=1,293$ . Ошибка этой величины  $\sigma_z = \sqrt{1/(10-3)} = 0,378$ . Доверительный интервал для  $z_r$  в генеральной совокупности равен  $z \pm t_{0,05} S_z = 1,293 \pm 2,3 \cdot 0,378$ , т.е. от 0,424 до 2,162. Тогда интервал для  $\rho$  равен от 0,40 до 0,97.

Преобразование  $z$  применяется также при сравнении двух выборочных коэффициентов корреляции и при нахождении обобщенного для них коэффициента, когда оказывается, что выборки взяты из одной совокупности. Пусть взято 2 выборки всходов сосны, предположительно из одной совокупности:  $r_1=0,86$ ,  $S_{r1} = 0,18$ ,  $N_1=10$  и  $r_2=0,70$ ;  $\sigma_{r2} = 0,25$ ,  $N_2=10$ . Можно ли считать различие в коэффициентах значимым?

Квадратическая ошибка разности  $z_1$  и  $z_2$  следующая:

$$\sigma_{z1-z2} = \sqrt{[1/(N_1-3)] + [1/(N_2-3)]} \quad (12.9)$$

Для сравниваемых выборок имеем

$$\sigma_{z_1-z_2} = \sqrt{[1/7 + 1/7]} = 0,54,$$

$$t_{z_1-z_2} = (z_1 - z_2) / S_{z_1-z_2} = (1,293 - 0,867) / 0,54 = 0,78 < t_{0,05}.$$

Имеющееся различие между коэффициентами корреляции следует считать случайным, а выборки – взятыми из одной генеральной совокупности.

Объединение выборочных коэффициентов корреляции целесообразно, если корреляция между признаками в выборках существенно не различается, как в рассмотренном примере. Обобщенный коэффициент корреляции является более надежной оценкой коэффициента корреляции  $\rho$  в общей совокупности.

Для получения  $r$  также пользуются значениями  $z$ , находя из них среднюю взвешенную величину. В качестве веса принимают число наблюдений в каждой выборке, уменьшенное на 3 единицы, т.е.

$$z = [z_1 (N_1 - 3) + z_2 (N_2 - 3)] / [(N_1 - 3) + (N_2 - 3)]$$

Для двух выборок сеянцев сосны имеем

$$z = (1,293 \cdot 7 + 0,867 \cdot 7) / (7 + 7) = 1,080.$$

Квадратическая ошибка среднего взвешенного  $z$

$$\sigma_z = 1 / \sqrt{(N_1 - 3) + (N_2 - 3)}$$

Для нашего примера  $\sigma_z = 0,071$ ,  $t_z = z / S_z = 1,080 / 0,071 = 15 > t_{0,05}$  и даже  $t_{0,01}$ , т.е.  $z$  является значимым на высоком уровне значимости.

Найденному значению  $z = 1,080$  соответствует  $r = 0,79$ , который является наиболее надежной оценкой  $\rho$  в генеральной совокупности.

Коэффициент корреляции может принимать значения от +1 до -1. При полной прямой корреляции  $r = +1$ , при полной обратной  $r = -1$ . При  $r = 0$  или близкой к 0 прямолинейная связь отсутствует (криволинейная связь при этом может быть, например, окружность). Обычно считают, при величине до 0,1 – связи нет;  $r = 0,11-0,30$  – связь слабая, при  $r = 0,5-0,6$  – средняя; при  $r = 0,7-0,9$  – сильная или тесная;  $r = 0,9-1,0$  – очень высокая.

Таким образом, в нашем примере связь между диаметрами и высотами в древостое дуба оказалась сильной. Наличие или отсутствие связи между различными явлениями или признаками можно подтвердить и другими примерами. Так, нет связи между классом бонитета древостоя и наличием лесных дорог. Слабая связь между водообеспеченностью древостоев и уровнем грун-



товых вод на гидроморфных почвах: она проявляется только в засушливые годы. Средняя связь между величиной текущего прироста ( $m^3/\text{га}$ ) и полнотой, т.к. здесь идут два взаимно противоположные процесса: уменьшение числа деревьев и увеличение прироста на оставшихся стволах. Сильная связь наблюдается между классом бонитета древостоя и уровнем почвенного плодородия. Очень высокая связь существует в древостое между диаметрами и высотами, высотами и видовыми числами.

Детальные исследования в теории корреляции показали, что степень сопряженности случайных величин  $x$  и  $y$  более точно описывает квадрат коэффициента корреляции, получивший название коэффициента детерминации ( $d$ ), определяемый как  $d=r^2$ . Коэффициент детерминации, выраженный в процентах, показывает ту часть изменчивости зависимой переменной ( $y$ ), которая вызвана влиянием независимой переменной ( $x$ ), т.е. он более отчетливо выражает зависимость  $y=f(x)$ .

### 12.3 Корреляционное отношение как мера нелинейной связи

Связь между  $x$  и  $y$  далеко не всегда выражается линейно. Поэтому для любой формы связи К. Пирсон предложил статистику зависимости между случайными величинами  $x$  и  $y$ , которую назвал корреляционным отношением. Статистическое обоснование этого показателя имеет определенную сложность и здесь не приводится. Наиболее важно знать вычисление корреляционного отношения. Особенно если с помощью коэффициента корреляции установлено, что связь слабая или средняя ( $r < 0,7-0,8$ ). В этом случае связь может быть даже сильной, но иметь криволинейный характер. Например, для зависимости  $y=f(x)$ , имеющей вид окружности,  $r=0$ , хотя связь есть и весьма тесная. Поэтому и был предложен новый показатель – корреляционное отношение, – который с успехом отражает как линейную, так и нелинейную связь. Корреляционное отношение выражают греческой буквой эта –  $\eta$ . Предварительную оценку криволинейной связи можно сделать, построив график функции  $y=f(x)$ , на котором вид связи (прямолинейная или криволинейная) будет виден.

Для вычисления корреляционного отношения строят таблицу распределения. Подобную мы составляли при определении коэффициента корреляции (таблица 12.5)

Таблица 12.5 – Общий вид таблицы исходных данных для вычисления корреляционного отношения

$x$	$y$	$\bar{y}$
$x_1$	$y_{11} y_{12} y_{13} \dots y_{1n}$	$\bar{y}_1$
$x_2$	$y_{21} y_{22} y_{23} \dots y_{2n}$	$\bar{y}_2$
$x_3$	$y_{31} y_{32} y_{33} \dots y_{3n}$	$\bar{y}_3$
...	.....	...
$x_k$	$y_{k1} y_{k2} y_{k3} \dots y_{kn}$	$\bar{y}_k$

По данным таблицы 12.5 вычисляем следующие суммы квадратов

$$\sigma_y^2 = \sum (y_i - \bar{\gamma}_i)^2,$$

где  $\bar{\gamma}_i$  - условные средние, вычисленные для каждой строки;

$$\sigma_{xy}^2 = \sum (\bar{\gamma}_i - \bar{\gamma})^2,$$

где  $\bar{\gamma}$  - средняя по  $\gamma$  для всей совокупности;

$$\sigma_0^2 = \sum (\bar{\gamma}_i - y_i)^2,$$

где  $\sigma_0$  – остаточная сумма квадратов, обусловленная иными причинами, чем регрессия  $y$  на  $x$ .

Тогда

$$\sigma_y^2 = \sigma_{yx}^2 + \sigma_0^2, \quad (12.10)$$

$$\text{а } \eta^2 = 1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_y^2}. \quad (12.11)$$

После элементарных математических преобразований формулы (12.11) с учетом (12.10) получаем

$$\eta^2 = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_0^2}{\sigma_y^2} = \frac{\sigma_{yx}^2}{\sigma_y^2}. \quad (12.12)$$

Выражение (12.12) есть отношение суммы квадратов отклонений, обусловленной зависимостью  $y$  от  $x$  к общей сумме квадратов отклонений. Для линейной связи это совпадает с определением коэффициента детерминации, но форма связи возможна любая.

Поясним сказанное примером вычисления корреляционного отношения. Возьмем уже ранее рассматриваемое распределение 238 деревьев дуба по диаметру и высоте (таблица 12.1). Для удобства пользования представим ее в виде таблица 12.6, т.к. нам требуется ввести дополнительные графы, а в том виде, как имеется в таблице 12.1, все графы затруднительно разместить на одном листе.

В таблице 12.6 знаком  $\bar{y}_2$  обозначены групповые средние, вычисленные в таблице 12.1. Общее среднее (для совокупности) обозначено  $\bar{y}$ .

По данным таблицы 12.6 определяем

$$\bar{x} = \frac{5952}{238} = 25.$$

Общая дисперсия

$$\sigma^2 = \frac{2758}{238-1} = \frac{2758}{237} = 11,64.$$

Дисперсия групповых средних

$$\sigma_{yx}^2 = \frac{2305,1}{237} = 9,73.$$

Таблица 12.6 – Вычисление корреляционного отношения для связи диаметров и высот в древостое дуба

Ступени толщины $x_i$	Ступени высот $y_i$	$n_i$	$y_i n_i$	$\bar{y}_2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 \cdot n_i$	$\bar{y}_2 - \bar{y}$	$(\bar{y}_2 - \bar{y})^2$	$(\bar{y}_2 - \bar{y})^2 \cdot n_i$
12	16	3	48	16	-9	81	243	-9,0	81,0	243,0
16	16	3	48	18,0	-9	81	243	-7,0	49,0	441,0
	18	3	54		-7	49	177			
	20	3	60		-5	25	75			
	$\Sigma$	9	162		-	-	-			
20	16	2	32	19,52	-9	81	162	-5,48	30,03	630,1
	18	5	90		-7	49	245			
	20	10	200		-5	25	250			
	22	4	88		-3	9	36			
	$\Sigma$	21	410		-	-	-			
24	18	2	36	22,8	-7	49	98	-2,2	4,44	133,2
	20	2	40		-5	25	50			
	22	11	242		-3	9	99			
	24	12	288		-1	1	22			
	26	3	78		+1	1	3			
	$\Sigma$	30	684		-	-	-			
28	22	3	66	24,54	-3	9	27	-0,46	0,21	9,2
	24	28	672		-1	1	28			
	26	11	286		+1	1	11			
	28	2	56		+3	9	18			
	$\Sigma$	44	1080		-	-	-			
32	24	5	120	26,22	-1	1	5	+1,22	1,49	88,5
	26	38	988		+1	1	38			
	28	11	308		+3	9	99			
	$\Sigma$	54	1416		-	-	-			
36	24	1	24	26,74	-1	1	1	+1,74	3,03	106,1
	26	22	572		+1	1	22			
	28	11	308		+3	9	99			
	32	1	32		+7	49	49			
	$\Sigma$	35	936		-	-	-			
40	26	1	26	28,52	+1	1	1	+3,52	12,39	285,0
	28	15	420		+3	9	135			

	30	7	210		+5	25	175			
	$\Sigma$	23	656	-	-	-	311			
44	28	7	196	29,18	+3	9	63	+4,18	17,47	297,0
	30	10	300		+5	25	250			
	$\Sigma$	17	496	-	-	-	313			
48	30	1	30	31,0	+5	25	25	+6,0	36,0	72,0
	32	1	32		+7	49	49			
	$\Sigma$	2	64	-	-	-	74			
$\Sigma$	-	238	5952	25,0	-27		2758	-	-	2305,1

Корреляционное отношение

$$\eta_{yx} = \sqrt{\frac{9,73}{11,64}} = \sqrt{0,836} = 0,914.$$

Оценка достоверности корреляционного отношения.

Основная ошибка:

$$m_{\eta} = \sqrt{\frac{1-n^2}{N-2}} = \sqrt{\frac{0,164}{236}} = \sqrt{0,0007} = 0,03.$$

Критерий Стьюдента:

$$t = \frac{0,914}{0,03} = 30,5.$$

Для  $\gamma=N-2=236$  критическое значение  $t$  (приложение Е) даже при достоверности 99,9% равно  $3,29 < 30,5$ , т.е. наше корреляционное отношение достоверно с высоким уровнем значимости.

Вспомним, что коэффициент корреляции (раздел 12.2) для этих же исходных данных составил 0,74. Значительная разница между величиной коэффициента корреляции и корреляционного отношения показывает, что связь между диаметрами и высотами в древостое носит криволинейный характер. Это хорошо известно лесоводам, которые выражают эту связь уравнением параболы 3 порядка  $y=a_1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$  или иными функциями, имеющими схожие графики.

Для строгого установления, является ли связь криволинейной, существует мера криволинейности ( $K$ ), выражаемая через соотношение  $r$  и  $\eta$ .

$$K = \eta^2 - r^2$$

При  $K < 0,1$  связь прямолинейная;  $K \geq 0,1$  связь криволинейная.

Для нашего примера  $K = 0,836 - 0,548 = 0,288$ , что подтверждает криволинейность связи:  $0,288 > 0,1$ .

Основную ошибку меры криволинейности ( $K$ ) определяют по формуле

$$m_K = \frac{2}{\sqrt{N}} \sqrt{K - K^2(2 - K)},$$

а ее достоверность проверяется по t-критерию Стьюдента

$$t = \frac{K}{m_K},$$

где  $t$  критическое берут по таблицам (приложение Е) для  $\gamma=N-1$ . При  $t < t_{таб}$  мера криволинейности достоверна, а при  $t \geq t_{таб}$  мера криволинейности недостоверна.

Для нашего примера

$$\begin{aligned} m_K &= \frac{2}{238} \sqrt{0,288 - 0,288^2(2 - 0,288)} = 0,0084 \sqrt{0,288 - 0,08294 \cdot 1,712} = 0,0084 \sqrt{0,288 - 0,142} \\ &= 0,0084 \sqrt{0,146} = 0,0084 \cdot 0,382 = 0,032. \end{aligned}$$

Для  $\gamma=237$   $t_{таб}=3,29$ , т.е. мера криволинейности достоверна в 99,9%.

Криволинейность связи может быть установлена и через F-критерий Фишера.

$$F = \frac{\eta^2 - r^2}{1 - \eta^2} \cdot \frac{N - K}{K - 2},$$

где  $N$  – объем выборки,

$K$  – число классов вариационного ряда.

Критические значения  $F$  берут по таблице (приложение Ж) при числе степеней свободы  $\gamma_1=K-2$ ;  $\gamma_2=N-K$ .

При  $F_{факт} < F_{таб}$  связь прямолинейная; при  $F_{факт} \geq F_{таб}$  связь криволинейная.

Для нашего примера

$$F = \frac{0,836 - 0,548}{1 - 0,914} \cdot \frac{238 - 10}{10 - 2} = \frac{0,288}{0,086} \cdot \frac{228}{8} = 3,3488 \cdot 28,5 = 95,4.$$

Табличное  $F_{таб}$  (при  $\gamma_1=236$ ,  $\gamma_2=8$ ) для достоверности 99,9% равно 9,6. Вычисленная нами величина  $F_{факт}=95,4$ . Она больше табличного значения, что доказывает криволинейность связи.

Заметим, что  $\eta$ , как правило, имеет большее значение, чем  $r$ . Лишь в случае, когда  $r \approx 1,0$ , величина  $\eta$  приближается к  $r$ . Поэтому, если окажется, что при вычислениях  $r \geq \eta$  (такое у неопытных студентов случается), то, значит, в вычислениях допущена ошибка.

Есть и другие критерии, показывающие вид связи (прямолинейность или криволинейность): критерии Бокмана, Романовского и др., но здесь мы их не рассматривали. Интересующихся отсылаем к учебнику «Биометрия» (авторы М.П. Горошко и др.), который приведен в списке литературы.

Как уже отмечено, корреляционное отношение показывает, какую часть общей дисперсии (вариации) результативного признака ( $y$ ) составляет дисперсия частных средних этого признака, т.е. измеряет относительную степень варьирования групповых средних  $\bar{y}_i$ .

Можно вычислить два корреляционных отношения  $\eta_{y/x}$  и  $\eta_{x/y}$ . Однако реальное значение имеет, как правило, один из них. Корреляционное отношение имеет всегда положительное значение, изменяющееся от 0 до 1. Когда групповые средние одинаковы (не варьируют),  $\eta=0$ . Связь отсутствует. В случае строго прямолинейной связи (все точки лежат на прямой)  $\eta = r = 1$ . В других случаях  $\eta > r$ . Чем это различие больше, тем связь более криволинейна. В предельном случае, когда связь строго криволинейна и кривая проходит через групповые средние, так что  $\sigma_{y_i} = \sigma_y$ , корреляционное отношение равно 1, а  $r=0$ .

Вычисление по формуле (12.12) значения  $\eta$  возможно лишь в том случае, когда выборка большая и данные расположены в виде корреляционной таблицы, как в таблицах 12.5 и 12.6.

При малом числе наблюдений показатель  $\eta$  недостаточно надежен. В группах может оказаться по одному значению  $y$ . Тогда  $\sigma_{y_i} \approx \sigma_y$ , а  $\eta \approx 1,0$ .

При малой выборке следует вводить корректирование  $\eta$  по формуле:

$$\eta_2 = 1 - \frac{(1 - \eta^2)(N - 1)}{N - m}, \quad (12.13)$$

где  $m$  - число групп.

Ниже для примера по данным, приведенным в таблице 12.6, показан расчет  $\eta$  по названной формуле.

$$\eta_2 = 1 - \frac{(1 - 0,914^2)(238 - 1)}{238 - 10} = 1 - \frac{(1 - 0,8354)237}{228} = 1 - \frac{0,1646 \cdot 237}{228} = 1 - \frac{39,010}{228} = 1 - 0,17 = 0,83$$

Отсюда  $\eta_2 = \sqrt{0,83} = 0,911$ . Разница между величинами  $\eta$ , вычисленными по формулам 12.12 и 12.13 составила 0,3%, что представляет незначительную величину, т.е. значения  $\eta$ , полученные по обоим формулам совпали. Это произошло потому, что наше  $N=238$  велико. При  $N < 30$  разница может быть существенной. Допустим, что при том же  $\eta=0,914$  имеем  $N=29$ , а  $m=12$ . То-

гда  $\eta_2$  будет равно  $\eta_2 = 1 - 0,243 = 0,757$ .  $\bar{\eta} = 0,870$ . Как видим, разница составила  $P = \frac{0,914 - 0,870}{0,914} \cdot 100\% \approx 5\%$ , что уже значимо.

## 12.4 Другие статистические показатели корреляции. Использование корреляции в лесном хозяйстве

При проведении исследований не всегда ограничиваются нахождением коэффициента корреляции и корреляционного отношения. Бывает, что при наблюдении встречаются случаи качественно неизмеримые или те из них, когда проводились отметки только наличия или отсутствия признаков. Тогда производят ранжирование признаков, т.е. присваивают им определенные номера и определяют показатель корреляции рангов.

В практике есть примеры, когда характер распределения неизвестен, но он явно отличается от нормального. В этом случае, если показатели поддаются ранжированию, применяются ранговые коэффициенты корреляции. Опишем нахождение показателя корреляции рангов, в редакции А.К.Митропольского.

Ранг указывает то место, которое занимает данная единица частичной совокупности среди других ее единиц. Если бы каждая из этих единиц отличалась в отношении рассматриваемого признака от всех других единиц совокупности, тогда ранги представляли бы порядковые номера от 1 до числа  $n$ , равного объему частичной совокупности. Если же некоторые из единиц совокупности оказываются в отношении рассматриваемого признака одинаковыми, тогда ранг всех этих единиц принимается равным среднему из соответствующих номеров.

Показатель корреляции рангов  $\rho$  равен

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{h=1}^n d_h^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (12.14)$$

где величины  $d_h$  представляют разности между рангами единиц, извлеченных совместно из двух общих совокупностей.

Подобно коэффициенту корреляции  $r$ , показатель корреляции рангов  $\rho$  изменяется от -1 до +1. Чем теснее будет связь между величинами, тем ближе к единице по своей абсолютной величине будет показатель корреляции рангов; знак же показателя указывает, является ли связь прямой или обратной.

В качестве примера вычислим показатель корреляции рангов, выражающий связь между объемным весом  $X_1$  ( $\gamma$ , г/см<sup>3</sup>) и пределом прочности при сжатии  $X_2$  ( $\sigma_B$ , кг/см<sup>2</sup>) древесины дуба (таблица 12.7, которую приводит А.К. Митропольский).

Для проверки вычислений заметим, что сумма рангов должна равняться сумме натуральных чисел от 1 до  $n$ , т.е.  $\frac{n(n+1)}{2}$ . В рассматриваемом примере

$$\frac{19(19+1)}{2} = 190.$$

Кроме того, сумма отрицательных разностей  $d_h$  должна равняться сумме положительных разностей.

Применяя формулу (12.14), находим

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 171,5}{19(19^2 - 1)} = 0,85$$

Таблица 12.7 – Вычисление показателя корреляции рангов

№	$X_1$	$X_2$	$h_1$	$h_2$	$d_h$	$d_h^2$
1	758	676	19	19	0	0
2	739	646	17	13	4	16
3	719	642	13	12	1	1
4	717	635	10	9,5	0,5	0,25
5	678	567	5	5	0	0
6	613	476	2	2	0	0
7	753	635	18	9,5	8,5	72,25
8	724	665	14,5	18	-3,5	12,25
9	718	661	12	17	-5	25
10	693	610	7	7	0	0
11	658	531	4	3	1	1
12	737	649	16	14	2	4
13	707	635	8	9,5	-1,5	2,25
14	717	635	10	9,5	0,5	0,25
15	653	544	3	4	-1	1
16	724	650	14,5	15	-0,5	0,25
17	717	653	10	16	-6	36
18	685	578	6	6	0	0
19	612	462	1	1	0	0
$\Sigma$	-	-	190	190	-17,5 17,5	171,5
$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 171,5}{19(19^2 - 1)} = +0,85$						

Ранговый коэффициент корреляции Спирмена изложен здесь в редакции М.П. Горощко с соавторами. Уравнение коэффициента корреляции рангов имеет вид



$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{N^3 - N}, \quad (12.15)$$

где  $d$  – разница между рангами;

$x_i$  и  $y_i$  – ранги значений  $x_i$  и  $y_i$  ( $1 \leq x_i \leq N$ ;  $1 \leq y_i \leq N$ );

$N$  – объем выборки.

Приведенный коэффициент является непараметрическим показателем связи и используется при изучении как количественных, так и качественных значений. При этом закон распределения этих величин и форма связи нам могут быть неизвестны, как и обычный коэффициент корреляции  $r_s$  может иметь величину от -1 до +1.

При независимости величин  $x$  и  $y$   $r_s$  распределяется асимптотично нормально при  $N \rightarrow \infty$ , а  $\bar{\delta} = 0$ , где дисперсия  $\sigma^2 = \frac{1}{N-1}$ .

Как и другие выборочные показатели, коэффициент корреляции рангов есть оценка параметра в генеральной совокупности. Его достоверность устанавливают на основе нулевой гипотезы, которую принимают для условия, что  $r_s = 0$  в генеральной совокупности. Эта гипотеза проверяется путем вычисления t-критерия Стьюдента и сопоставления его с критической величиной  $t_{кр}$ .

$$t = r_s \sqrt{\frac{N-2}{1-r_s^2}}.$$

Обычно используют 95% или 99% уровень достоверности, где применяют следующие формулы.

Для уровня достоверности 99%:

$$t_{кр\%} = \frac{2,58}{\sqrt{N-1}} \left(1 - \frac{0,69}{N-1}\right).$$

Для уровня достоверности 95%:

$$t_{кр\%} = \frac{1,96}{\sqrt{N-1}} \left(1 - \frac{0,16}{N-1}\right).$$

При  $t < t_{маб}$  принимают нулевую гипотезу ( $H_0$ ), т.е.  $r_s$  недостоверен.

При  $t \geq t_{маб}$  принимается рабочая (альтернативная) гипотеза ( $H_a$ ) и  $r_s$  является достоверным.

Достоверность  $r_s$  можно оценить и по специальным таблицам критических значений  $r_s$  (приложение У), где оно дается в зависимости от уровня значимости (5%, 1%) и объема выборки ( $N$ ). При  $r_s < r_{маб}$  принимается нулевая гипотеза, а  $r_s \geq r_{маб}$  – альтернативная или рабочая.

Приведем пример вычисления  $r_s$  (таблица 12.8). Пусть у нас есть замеры 15 высот и диаметров в древостое осины с полнотой 0,7 I<sup>a</sup> класса бонитета в 40 лет.

$$\bar{d}_d = 21,3, \quad \bar{x}_i = 21,5.$$

Сумма рангов (по  $x$  и  $y$ ) контролируется по формуле арифметической прогрессии  $s = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ . У нас  $s = \frac{1+15}{2} \cdot 15 = 120$ .

Величину  $r_s$  определяем по формуле (12.15):

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot 28}{3375 - 15} = 1 - \frac{168}{3360} = 1 - 0,05 = 0,95.$$

Как видим, коэффициент ранговой корреляции высок, что соответствует известной закономерности в отношении связи диаметров и высот деревьев в древостое. В этом убедимся, вычислив достоверность  $r_s$ .

Таблица 12.8 – Вычисление коэффициента ранговой корреляции для 15 СТВОЛОВ ОСИНЫ

№ п/п	Диаметр, см $x_i$	Высота, м $y_i$	Ранги ( $P$ )		$d_i = P_1 - P_2$	$d_i^2$	$P_1 P_2$
			$P_1$ по $x_i$	$P_2$ по $y_i$			
1	13,8	17,5	1,0	1,0	0	0	1,0
2	16,9	18,4	2,5	2,0	0,5	0,25	5,0
3	16,8	19,5	2,5	4,5	-2,0	4,0	11,25
4	17,9	19,2	4,0	3,0	1,0	1,0	12,0
5	18,5	20,1	5,0	6,0	-1,0	1,0	30,0
6	19,2	19,5	6,5	4,5	2,0	4,0	29,25
7	19,2	21,5	6,5	8,0	-1,5	2,25	52,0
8	20,3	22,0	8,0	9,5	-1,5	2,25	76,0
9	21,4	22,0	9,0	9,5	-0,5	0,25	85,5
10	22,5	21,3	10,0	7,0	3,0	9,0	170,0
11	23,0	23,6	11,5	12,0	-0,5	0,25	138,0
12	23,0	22,9	11,5	11,0	0,5	0,25	126,5
13	27,6	24,0	13,0	13,5	-0,5	0,25	175,5
14	28,5	26,5	14,0	15,0	-1,0	1,0	210,0
15	30,9	24,0	15,0	13,5	1,5	2,25	202,5
$\Sigma$	319,4	322,0	120	120	0	28,0	1324,5

Основная ошибка  $r_s$  определяется по формуле:

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{N-2}} = \sqrt{\frac{1-0,95^2}{15-2}} = \sqrt{\frac{1-0,9025}{13}} = \sqrt{\frac{0,0975}{13}} = \sqrt{0,0075} = 0,0866.$$

$$t = \frac{r_s}{m_{rs}} = \frac{0,95}{0,0866} = 10,97 \approx 11,0.$$

По таблицам (приложение У) для  $\gamma=N=15$  для  $P=0,001$  находим  $t_{таб}=3,95$ .

Поскольку  $t_{факт} > t_{таб}$  ( $11,0 > 3,95$ ) устанавливаем, что величина  $r_s$  достоверна на высоком уровне значимости.

Есть и другие показатели ранговой корреляции, коэффициенты взаимной сопряженности, описанные в учебниках А.К. Митропольского, М.П. Горошко с соавторами, но эти показатели здесь опущены из-за их редкого использования.

**Использование корреляции в лесном хозяйстве.** В лесном хозяйстве приведенные величины, определяющие корреляцию между различными признаками, применяются очень широко. Уже более 100 лет коэффициент корреляции и корреляционное отношение постоянно вычисляют при проведении научных исследований в лесном хозяйстве. Эти показатели мы встречаем в трудах классиков лесоводства и лесной таксации М.М. Орлова, А.К. Турского, А.В. Тюрина, В.К. Захарова и др. Применение корреляции мы видим в классических трудах видного белорусского (гомельского) ученого, лесоведа и таксатора Ф.П. Моисеенко. Он установил высокую степень корреляции между формой ствола и средним диаметром дерева и доказал небольшую изменчивость средней формы ствола в древостое. Это стало научной основой для составления объемных и сортиментных таблиц по средней форме ствола, что в несколько раз упростило составление этих нормативов и пользование ими.

В настоящее время вычисление  $r$  и  $\eta$  является обязательным условием проведения исследований в случае наличия связи между изучаемыми величинами. Применение ПК сделало эту работу простой и рутинной.

При исследовании лесных биогеоценозов очень часто влияние одних показателей биоценоза на другие не очевидно. Для доказательства (или опровержения) этого влияния пользуются показателями корреляции. Например, влияет ли процент физической глины в разных почвенных горизонтах ( $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B$ ,  $C$ ) на величину класса бонитета без вычисления показателей корреляции для каждого типа леса (типа условий, местопроизрастания) сказать трудно, т.к. в ряде случаев (сухие боры, мокрые условия произрастания) велико влияние и других факторов, например, увлажнения почвы. Таких примеров очень много.

В то же время использование законов корреляции должно сопровождаться логическим анализом сути явления, что могут сделать только специалисты. В лесном хозяйстве это лесоводы, в отдельных случаях биологи (ботаники, зоологи). Механическое сопоставление логически несвязанных величин с вычислением показателей корреляции может привести к неверным, а иногда и абсурдным выводам. Например, мы можем связать величину, характеризующую количество лунного света с уровнем производительности древостоя и даже получим какие-то величины коэффициента корреляции, но результат таких расчетов не будет отражать реальность.

Другой пример. Мы можем связать количество сухостоя на 1 га древостоя только с плодородием почвы, но эти сопоставления будут некорректны,

т.к. на количество сухостоя (отпада) на 1 га влияют (более значимо) другие факторы: густота насаждения, его возраст, рубки ухода.

Здесь, в частном случае, проявляются общие требования к определению статистических показателей – необходимость их логической верификации специалистами.

## 13. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ КАК ИНСТРУМЕНТ НАУЧНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

13.1 Цель и задачи корреляционного анализа

13.2 Множественная корреляция

13.3 Корреляционные модели

13.4 Корреляционные уравнения в лесном хозяйстве

### 13.1 Цель и задачи корреляционного анализа

Ранее (глава 12) мы разобрали связи между двумя величинами. Установили, что они бывают прямолинейные и криволинейные. Для характеристики тесноты связи используется коэффициент корреляции ( $r$ ) и корреляционное отношение ( $\eta$ ).

Но, установив сам факт зависимости одной величины от другой, получили еще недостаточную информацию. Необходимо знать форму этой связи, ее числовое выражение. Тогда, имея одну из коррелирующих величин, обычно ту, которая легче и проще определяется, можно с определенной долей вероятности предсказывать значение другой (искомой) величины  $y=f(x)$ . Для решения этой задачи используют корреляционные уравнения или, как их еще называют, корреляционные модели.

Мы уже отмечали, что определений моделей есть много, но лучше других их выражает следующая формулировка, данная В.А. Штоффом: «Модель – это мысленно представляемая или материально реализуемая система, которая отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что ее изучение дает нам новую информацию об этом объекте». Именно это определение используют в лесных исследованиях К.Е. Никитин и А.З. Швиденко.

Следовательно, модель - это некоторая абстракция, возможная на определенной стадии изучения некоторого предмета или явления, для дальнейшего его познания или используемая для решения практических задач.

Корреляционные уравнения представляют собой разновидность стохастических моделей. При исследовании моделей, выражающих некоторую зависимость между изучаемыми величинами, еще раз подчеркнем, что это может быть и взаимозависимость, либо только зависимость. Примером взаимозависимости служит соотношение диаметра и высоты в древостое, а зависимости – изменение средней высоты или прироста при разном плодородии почвы, но не наоборот.

Теория корреляции разработана в основном в конце XIX и начале XX века Карлом Пирсоном и Юлом. Она позволяет описать разные связи, но не вскрывает причины их происхождения. Здесь нужен специальный анализ: биологический, лесоводственный, генетический и т.п. При этом причинную связь, изучая корреляцию, мы должны знать, т.к. иначе можем совершить ошибку, найдя связь там, где ее нет. Об этом хорошо

сказал великий английский писатель Бернард Шоу (1856-1956) еще в 1906 году в предисловии к «Доктору на распутье»: «Даже опытные статистики часто оказываются не в состоянии оценить, до какой степени смысл статистических данных искажается молчаливыми предположениями их интерпретаторов... Легко доказать, что ношение цилиндров и зонтиков расширяет грудную клетку, удлиняет жизнь и дает относительный иммунитет от болезней... Математик, чьи корреляции привели бы в восхищение Ньютона, может собирая данные и делая из них выводы впасть в совершенно грубые ошибки на основе таких популярных заблуждений, как описанные выше». Здесь Б. Шоу подчеркнул, что не сами цилиндры и зонтики приводят к описанным следствиям, а образ жизни их обладателей, которыми в те времена были богатые люди.

Ранее уже отмечено, что и в начале широкого распространения статистики, а затем в 60-70-е годы, когда математические методы стали широко применять в лесном хозяйстве, математики, слабо разбирающиеся в причинных связях предметов, которые они описывали с помощью корреляционных уравнений, совершили много ошибок. Об этой опасности предупреждали основатели учения о корреляции. Так, Юл в 1926 году напугал ученых примерами высоких корреляций между количеством самоубийств в Англии и принадлежностью к англиканской церкви. Причинной связи здесь нет, а высочайшая корреляция есть. Дело здесь объясняется просто – подавляющее большинство жителей Англии в те годы принадлежало к англиканской церкви.

Поэтому еще раз напомним о важности проведения профессионального анализа причинно-следственных связей, прежде чем взяться за конкретные вычисления.

### 13.2 Множественная корреляция

При рассмотрении корреляции часто встречаются случаи, когда две величины, вроде бы взаимозависимы, но более подробный анализ показывает, что эта «взаимозависимость» есть отражение того факта, что они обе коррелированы с некоторой третьей величиной или с совокупностью величин. В природе мы часто встречаемся с такими явлениями, когда изменение одной величины (функции) определяется изменением не одного, а нескольких аргументов.

Например, высота дерева зависит от почвенного плодородия, количества влаги в корнеобитаемом слое почвы, древесной породы, возраста древостоя и т.д. Величина суммы площадей сечения или запас древостоя зависят от высоты ( $H$ ) и полноты насаждения. Включение в это уравнение диаметра древостоя ( $D$ ) будет лишним из-за высокой корреляции  $H-D$ . Аналогичный пример можно привести, рассматривая коэффициент формы древесного ствола ( $q_2$ ), который равен частному от деления диаметра на половине высоты дерева к диаметру на 1,3 м:  $q_2 = D_{0,5м}/D_{1,3м}$ . Рассматривая корреляцию  $q_2-D$ , мы можем придти к выводу о ее наличии. На самом деле есть корреляция  $q_2-H$  и  $H-D$ .

Такие закономерности приводят нас к понятию множественной корреляции. Ее суть заключается в следующем. Коэффициент множественной корреляции – это показатель тесноты связи (линейной) между одной зависимой величиной и совокупностью независимых.

Если у нас есть 3 сопряженные величины  $X, Y, Z$ , то коэффициент множественной корреляции определяется из матрицы

$$R_{XYZ} = \begin{vmatrix} 1 & r_{XY} & r_{XZ} \\ r_{YX} & 1 & r_{YZ} \\ r_{ZX} & r_{ZY} & 1 \end{vmatrix}$$

Решение этой матрицы приводит к уравнениям для определения  $R_{XYZ}, R_{YXZ}, R_{ZXY}$ :

$$R_{XYZ} = \sqrt{\frac{r_{XY}^2 + r_{XZ}^2 - 2r_{XY}r_{XZ}r_{YZ}}{1 - r_{YZ}^2}} \quad (13.1)$$

$$R_{YXZ} = \sqrt{\frac{r_{XY}^2 + r_{YZ}^2 - 2r_{XY}r_{XZ}r_{YZ}}{1 - r_{XZ}^2}} \quad (13.2)$$

$$R_{ZXY} = \sqrt{\frac{r_{XZ}^2 + r_{YZ}^2 - 2r_{XY}r_{XZ}r_{YZ}}{1 - r_{XY}^2}} \quad (13.3)$$

где  $r_{xy}, r_{xz}, r_{yz}$  – парные коэффициенты корреляции между величинами  $X, Y, Z$ .

Вместо коэффициента множественной корреляции, который обычно обозначают как  $R$  в отличие от парного –  $r$ , часто при моделировании удобнее использовать коэффициент множественной детерминации –  $D=R^2$  (в отличие от парного  $d=r^2$ ). Он измеряет ту долю общей дисперсии зависимой переменной  $y$ , которая может быть объяснена влиянием изменения аргументов.

Значимость коэффициента множественной корреляции оценивают по  $F$ -критерию Фишера

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \left( \frac{N - k}{k - 1} \right),$$

где  $N$  – объем выборки;

$k$  – количество факторов влияния (число независимых переменных).

Критические значения  $F$  берут из таблиц (приложение Ж) при числе степеней свободы  $\gamma_1 = k - 1; \gamma_2 = N - k$ . При  $F_{\text{факт}} < F_{\text{таб}} = H_0$ , т.е. принимается нулевая гипотеза об отсутствии корреляции и, наоборот, принимают альтерна-

тивную или рабочую гипотезу, т.е. о наличии корреляции, при  $F_{факт} \geq F_{таб}$ . Величина  $R$  (как и частные  $r$ ) колеблется в пределах (-1)-(0)-(1).

Пределы ( $l$ ), в которых может находиться  $R_{YZ}$ , если известны  $R_{XY}$  и  $R_{XZ}$  определяют по формуле

$$l = R_{XY} \cdot R_{XZ} - \sqrt{(1-r_{XY}^2)(1-r_{XZ}^2)} < R_{YZ} < R_{XY}R_{XZ} + \sqrt{(1-r_{XY}^2)(1-r_{XZ}^2)} \quad (13.4)$$

Для того чтобы выяснить долю влияния одной из величин на другую в общей системе нескольких взаимовлияющих показателей, введено понятие частного коэффициента корреляции. Графически это можно выразить следующим образом.

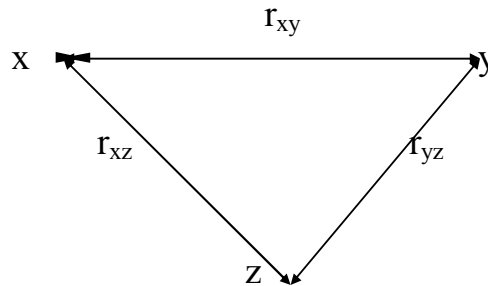


Рисунок 13.1 – Графическая интерпретация частной корреляции

Если существует тесная корреляция между  $x-z$  и  $y-z$ , то связь между  $x-y$  может создаваться за счет одновременного влияния на  $x$  и  $y$  третьего признака  $z$ . Чтобы найти то влияние, которое оказывает  $x$  на  $y$  (или  $y$  на  $x$ ), надо исследовать зависимость  $x-y$  при постоянном  $z$ , т.е.  $x$  и  $y$  будут изменяться, а  $z=const$ , т.е.  $z$  мы элиминируем.

Вычисленный в этом случае коэффициент корреляции  $x-y$  называется частным коэффициентом корреляции. Формула его вычисления следующая

$$r_{xy-(z)} = \frac{r_{xy} - r_{xz} \cdot r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xz}^2)(1-r_{yz}^2)}} \quad (13.5)$$

$$r_{xz-(y)} = \frac{r_{xz} - r_{xy} \cdot r_{zy}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{zy}^2)}} \quad (13.6)$$

$$r_{zy-(x)} = \frac{r_{zy} - r_{zx} \cdot r_{yx}}{\sqrt{(1-r_{zx}^2)(1-r_{yx}^2)}} \quad (13.7)$$

Статистиками множественной нелинейной корреляции являются множественные и частные корреляционные отношения.



Эмпирическое множественное корреляционное отношение  $\eta_{1.23}$  величины  $X_1$  к величинам  $X_2$  и  $X_3$  дается выражением

$$\eta_{1.23}^2 = \sum_{j_2=1}^{k_2} \sum_{j_3=1}^{k_3} p'_{j_2 j_3} \cdot r_{1(j_2 j_3)}^2 \quad (13.8)$$

или равносильными ему выражениями

$$\eta_{1.23}^2 = 1 - \frac{\sum_{j_2=1}^{k_2} \sum_{j_3=1}^{k_3} p'_{j_2 j_3} \cdot \mu_{2|(j_2)(j_3)}}{\mu_{2/0/0}}, \quad (13.9)$$

$$\eta_{1.23}^2 = \frac{\sum_{j_2=1}^{k_2} \sum_{j_3=1}^{k_3} p'_{j_2 j_3} \cdot (m_{1/(j_2)(j_3)} - m_{1/0/0})^2}{\mu_{2/0/0}}. \quad (13.10)$$

Эмпирическое частное корреляционное отношение  $\eta_{12.3}$  величины  $X_1$  и  $X_2$  при данном значении  $X_3$  вычисляется по формуле

$$\eta_{12.3}^2 = 1 - \frac{\sum_{j_2=1}^{k_2} p'_{j_2/(j_3)} \cdot \mu_{2/(j_2)(j_3)}}{\mu_{2/0/(j_3)}}, \quad (13.11)$$

или

$$\eta_{12.3}^2 = \frac{\sum_{j_2=1}^{k_2} p'_{j_2/(j_3)} \cdot (m_{1/(j_2)(j_3)} - m_{1/0/(j_3)})^2}{\mu_{2/0/(j_2)}}, \quad (13.12)$$

где  $m_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  – соответствующие моменты, описанные в разделе 12;  
 $p'_{ij}$  – частоты, описанные там же.

В качестве примера применения частного коэффициента корреляции в лесном хозяйстве приведем установленные зависимости  $q_2$  от  $d$  и  $h$ , где  $q_2$  – второй коэффициент формы,  $d$  – диаметр дерева на 1,3 м,  $h$  – высота дерева.

Коэффициент множественной корреляции здесь достигает 0,95-0,96. В то же время частные коэффициенты корреляции оказались  $r_{HD} = 0,75-0,90$ ;  $r_{DH} = 0,73-0,92$ ;  $r_{Hq_2} = 0,90-0,92$ ;  $r_{Dq_2} = 0,16-0,20$ .

Долгое время считалось, что  $q_2$  зависит от обеих величин  $d$  и  $h$ . Подобную ошибку совершил даже крупный ученый-таксатор Матвеев-Мотин. Лишь Ф.П. Моисеенко, изучив частную корреляцию  $q_2 - d$  и  $q_2 - h$ , доказал, что величина коэффициента корреляции в связи  $q_2 - d$  опре-

деляется высокой корреляцией  $d - h$ . При фиксированных  $h$  коэффициент корреляции  $q_2 - d$  оказался не выше 0,2, т.е. этой связи практически не было. Почему же до Ф.П. Моисеенко ученые впадали в ошибку? Ведь как методически построить исследование большинство из них знало. Но для этого нужен был огромный экспериментальный материал. Имея около 18 тысяч срубленных и обмеренных деревьев, Ф.П. Моисеенко такой материал собрал, смог вычислить частные  $r$ , а у других столь обширных замеров не было. В то же время в те годы, когда проводилась эта работа (1936-1941 гг.), подобные вычисления требовали длительного времени, на что не все шли. Теперь на ПК такая работа делается очень быстро.

### 13.3 Корреляционные модели

Корреляционные модели представляют собой уравнения, где на основе связи или взаимозависимости двух величин строится уравнение, в котором одна из величин выступает в качестве аргумента, а другая - функции, т.е.  $y = f(x)$ . Построение таких моделей связано с вычислением коэффициента корреляции, т.е. здесь предполагается линейная зависимость. Из курса математики мы знаем, что линейная зависимость реализуется в виде уравнения прямой. Ее формула

$$y = a + vx \quad (13.13)$$

где  $a, v$  – некоторые коэффициенты.

Здесь коэффициент  $a$  показывает величину отступления от начала координат, а  $v$  – угол наклона прямой к оси  $ox$ .

Приведем пример. Для этого воспользуемся результатами замеров диаметров и высот сосны в молодом возрасте (таблица 13.1).

Таблица 13.1 – Результаты измерения диаметров и высот молодых деревьев сосны

№ п/п	Диаметр, см	Высота, м	№ п/п	Диаметр, см	Высота, м	№ п/п	Диаметр, см	Высота, м
1	7,6	8,7	6	8,8	9,8	11	8,2	9,2
2	6,4	7,5	7	9,0	10,1	12	4,0	5,6
3	5,2	6,6	8	6,2	7,2	13	5,6	7,0
4	4,1	5,7	9	7,0	8,1	14	4,8	6,5
5	3,7	5,2	10	7,4	8,5	15	6,9	8,0

Для того, чтобы оценить вид модели и общую закономерность изменения функции в зависимости от изменения аргумента построим график. На оси абсцисс будем откладывать диаметры, на оси ординат - высоты (рисунок 13.2)

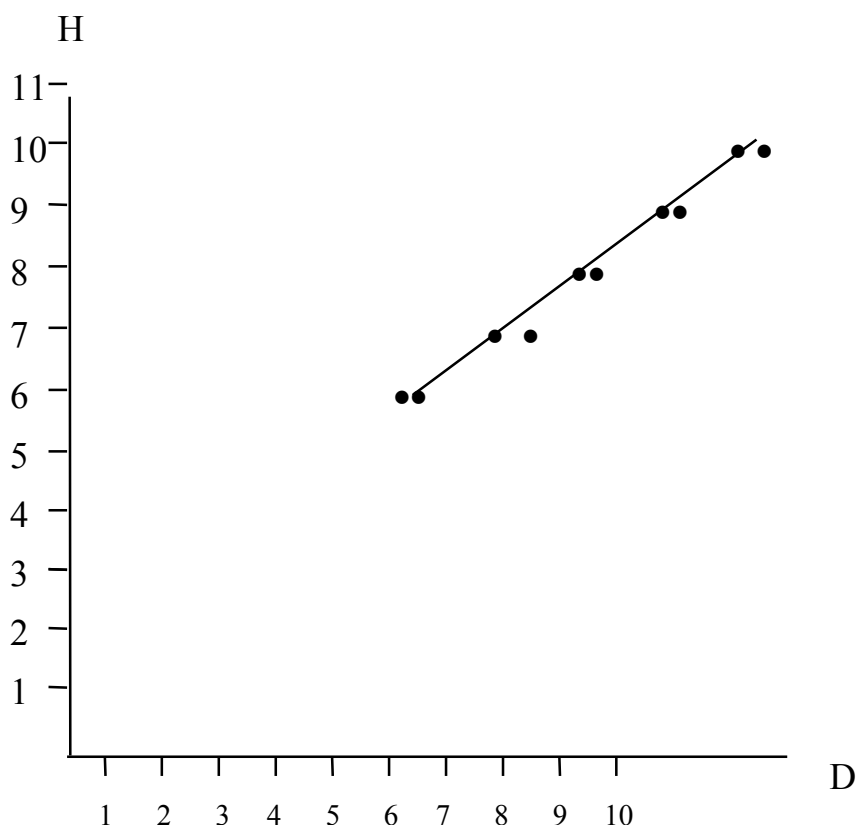


Рисунок 13.2 Зависимость высот и диаметров в сосновых молодняках

Из рисунка 13.2 видно, что точки, показывающие соотношение  $D-H$  лежат практически на прямой линии. Ранее в лесных исследованиях ограничивались графическим построением прямой. Достоинства графического построения очевидны: простота и наглядность. Его недостатками является определенный субъективизм. Даже анализируя убедительный рисунок 13.2, можно разойтись во мнении, как провести прямую линию, хотя расхождения у разных исполнителей будут невелики.

Корреляционные уравнения бывают не только двухмерные (парные), но и многомерные. Их вид следующий:

$$y = ax_1 + bx_2 + cx_3 + \dots + nx_n \quad (13.14)$$

Графическое изображение множественных связей (после трех аргументов) затруднительно. Поэтому графические построения здесь обычно не делают.

Вычисление коэффициентов корреляционных уравнений осуществляют по специальным методикам, которые мы рассмотрим в главе 14.

Здесь же еще остановимся на некоторых особенностях применения корреляционных уравнений.

В общую формулу корреляционного уравнения все показатели представляются в своих единицах измерения: действия производятся над их

абсолютными величинами, не обращая внимания на наименования. Ответ получается в единицах измерения зависимой величины. Для проверки правильности полученного уравнения в него подставляется среднее значение независимого признака в его единицах измерения, а в ответе должно получиться среднее значение зависимого переменного, равное исходному.

Корреляционное уравнение применяется для получения точного среднего значения зависимого переменного, за которое принимается трудно измеримый признак, зная точное среднее значение независимого переменного, за которое принимается более быстро и легко измеримый признак, корреляционно взаимосвязанный с первым. Так при изучении диаметров и высот древостоя за независимую переменную принимают диаметр на высоте 1,3 м, который значительно легче, проще и точнее измеряется, чем высота.

В этом случае необходимое число наблюдений для зависимого признака требуется значительно меньше того, какое было бы необходимо при самостоятельном анализе этого признака, и вычисляется по формуле (если точность задана в процентах)

$$n = \frac{V^2}{p^2}(1 - r^2), \quad (13.15)$$

а точность опыта

$$p = \frac{V}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - r^2} \quad (13.16)$$

Вспомним, что для одного статистического ряда  $n = \frac{V^2}{p^2}$ .

Пусть требуется определить среднюю высоту с точностью 1 %, зная точный средний диаметр на отведенном участке леса. По данным, имеющимся в лесотаксационной литературе, известно, что коэффициент вариации высот в пределах спелого древостоя равен 12 - 15%. Значит, для получения средней высоты с точностью 1% потребовалась бы измерить  $n = \frac{V^2}{p^2} = 15^2/1^2 = 225$  стволов, что трудно выполнимо.

Поскольку есть высокая корреляционная связь между диаметрами и высотами, то для получения средней высоты с той же точностью требуется значительно меньшее количество измеренных высот. Так, при обычном коэффициенте корреляции между  $D$  и  $H$ , равном 0,90, оно составит всего  $225(1 - 0,90^2) = 225(1 - 0,81) = 43$ . Измерив у 43 деревьев высоты и диаметры, обрабатываем полученные данные и составляем корреляционное уравнение, в которое подставляем точную величину среднего диаметра. Среднюю высоту затем находим по корреляционному уравнению с заданной точностью.

Так, пусть по данным измерения высот у 43 стволов уравнение связи получилось  $h=0,40d+14,2$  м, а точный средний диаметр 32,2см; отсюда искомая высота равна  $h = 0,40 \cdot 32,2 + 14,2 = 12,9 + 14,2 = 27,1$  м. При этом оказалось:  $V = 15\%$ , а  $r = 0,90$ . Точность опыта, т.е. полученной средней высоты, будет равняться

$$-p = \frac{15}{\sqrt{43}} \cdot \sqrt{1-81} = 2,27 \cdot 0,436 = 0,99 = 1\%$$

Угловой коэффициент корреляционного уравнения  $R = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$  называется коэффициентом регрессии; он показывает, на сколько единиц в среднем изменяется зависимый признак, если независимый изменился на одну единицу.

В вышеприведенном примере ( $\sigma_d=6,96$  и  $\sigma_h=2,69$  вычислены ранее) угловой коэффициент получился

$$R = 0,90 \cdot \frac{2,69}{6,96} = 0,90 \cdot 0,386 = 0,35 \text{ м.}$$

Это значит, что при изменении диаметра на 1 см высота деревьев в среднем изменяется на 0,36 м.

В общем виде линейная регрессия между двумя переменными величинами может быть выражена с помощью следующего общего уравнения

$$y = \bar{y} + r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}), \quad (13.17)$$

где  $y, x$  – переменные вариационных рядов;

$\bar{y}, \bar{x}$  - средние величины рядов;

$\sigma_y, \sigma_x$  - среднеквадратические отклонения вариационных рядов;

$r$  – коэффициент корреляции.

Основная ошибка уравнения корреляционной связи определяется по формуле

$$m_{y/x} = \sigma_y \sqrt{1-r^2}.$$

#### 13.4 Применение корреляционных уравнений в лесном хозяйстве

Корреляционные уравнения очень широко применяются как в лесных исследованиях, так и в практической работе, особенно в лесоустройстве и при проведении проектных работ. Примеров этому очень много.

Так, связь диаметров и высот и конкретное выражение этой связи самым непосредственным образом используют при построении сорти-

ментных и товарных таблиц. Первые обычно строят по разрядам высот. Для определения разряда высот используют замеры диаметров и высот у 9-12 деревьев. Далее для вычисления объема деревьев применяют специальные сортиментные таблицы, где заложены уравнения связи  $H-D$ , выведенные при проведении научных исследований. Ранее, до выведения таких связей, были таблицы, которые требовали измерения высоты у каждого дерева. Это очень трудоемко. Использование здесь корреляционных уравнений снизило затраты труда на отводах лесосек в десятки и сотни раз.

Продолжая тему сортиментации отметим, что для вычисления объемов стволов и выхода сортиментов у сосны после подсочки, когда форма ствола на высоте 1,3 м деформирована карами, с которых собирают живицу, использована связь диаметра на 1,3 м, измеренного по ремням, т.е. по неповрежденной части ствола и диаметра на 0,5  $H$ .

Запас древостоя при проведении лесоинвентаризации инженер-таксатор определяет по таблице, где входами служат высота и полнота, т.е. используется корреляция. Очень широко используются корреляционные зависимости в охотоведении. Например, по форме следов и их размерам опытные охотоведы определяют пол, возраст, состояние животного.

Велико значение корреляции в защите леса от вредителей. Есть уравнения описывающие характер размножения вредителя, ожидаемый ущерб от состояния популяции в некоторый момент времени, погодных условий и состояния лесного насаждения. Использование таких уравнений позволит сделать прогнозы массового размножения вредителей и принять превентивные меры защиты насаждений.

Нахождение величин  $y$  по корреляционным уравнениям из формулы  $y = a + vx$  называется **выравниванием или аппроксимацией**. Выравненные значения функции отражают закономерное ее изменение (с некоторой основной ошибкой), где исключены случайные влияния на отдельные измеренные значения вариационного ряда.

В научных исследованиях необходимо не просто измерить или определить какие-то величины, но и найти закономерные связи между ними, определить то общее, что связывает функцию и аргументы и выразить это математически.

Более общие случаи определения зависимости  $y = f(x)$  будут рассмотрены в следующей главе.

## 14. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

14.1. Сущность регрессионного анализа. Регрессионные модели

14.2. Методы определения вида регрессионных уравнений и их параметров

14.3. Метод наименьших квадратов

14.4. Вычисление значений зависимого признака на основе уравнений регрессий в лесном хозяйстве

### 14.1. Сущность регрессионного анализа. Регрессионные модели

Рассмотренные в предыдущей главе корреляционные уравнения являются частным случаем более общего вида вероятностных связей, которые выражаются методами регрессионного анализа. Поясним его суть. Пусть у нас имеется некоторая функция  $y = f(x)$ . Она может приобретать разные выражения в зависимости от того, что подразумевается под  $f(x)$ . Например, уже известное нам выражение уравнения прямой  $y = a + bx$  или уравнение параболы второго порядка  $y = a + bx + cx^2$ , или гиперболы  $y = a + b/x$  и т.д.

Для обозначения разных связей в биологической статистике, т.е. в биометрии английским ученым Ф. Гальтоном предложен термин регрессия. Смысл этого термина состоит в том, что коррелирующие пары в биологических объектах, обнаруживающие в потомствах отклонения от средней линии, определяющей корреляцию признаков совокупности, имеют тенденцию возврата к этой средней, если только действуют одни случайные причины. В дальнейшем мы будем пользоваться этим термином как более общим, говоря об уравнениях стохастической связи между случайными величинами.

Регрессионные модели - это уравнения стохастической связи вида  $y = f(x)$ , где  $f(x)$  может быть выражено в любом виде.

Корреляционные модели - частный случай регрессионных, когда связь носит прямолинейный характер.

Регрессионные модели обычно используют для выражения разного рода связей в лесной таксации, лесоводстве и в других лесных дисциплинах. Чаще всего они применяются для нахождения общей зависимости по экспериментальным данным. В этом случае выведенное уравнение служит для выравнивания материала, полученного при постановке опыта. При этом сохраняется главная тенденция изменения функции в зависимости от изменения аргументов, и устраняются случайные отклонения. Такое уравнение удобно использовать для получения величин функции через равный шаг аргумента, хотя в опытном материале этот равный шаг не всегда выдерживается. Например, нам удобнее, изучая ход роста древостоев, иметь данные через 10 лет: в 10, 20, 30, ... 100 лет, а наши пробные площади имеют возраст 9, 22, 29, 44, 57, ... 102 года. Поэтому необходимо найти промежуточные значения в 10, 20, 30 лет по данным заме-

ров пробных площадей, что обычно называют сглаживанием опытных данных.

## 14.2 Методы определения вида регрессионных уравнений и их параметров

При обработке опытных данных очень часто приходится решать задачу, в которой необходимо исследовать зависимость одной физической или биологической величины  $y$  от другой физической или биологической величины  $x$ . Например, зависимость продуктивности древостоя от количества осадков и средних температур, размеров лося от величины его следа, объема дерева от количества физической глины в почвенных горизонтах  $A_1, A_2, B_1, C$ , коэффициента формы ствола от его высоты и т.д.

Пусть производится опыт с целью исследования зависимости величины  $y$  от величины  $x$ , которая в общем случае может быть записана в виде

$$y = f(x).$$

Вид этой зависимости и требуется определить из опыта.

Допустим, что мы исследуем зависимость видового числа древостоя ( $F_q$ ) от его средней высоты ( $H$ ). В результате опыта получен ряд экспериментальных точек  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , которые приведены в таблице 14.1. По данным таблицы 14.1 построен график изменения переменной величины  $y(F_q)$  пр разных независимых переменных  $x(H)$  (рисунок 14.1). На нем показана связь рассматриваемого видового числа (зависимая переменная –  $y$ ) от высоты  $H$  (независимая переменная –  $x$ ). Эта зависимость обычно выражается уравнением гиперболы

$$y = a + \frac{b}{x}.$$

Таблица 14.1 – Средние видовые числа ( $F_g$ ) древостоя ели в зависимости от средней высоты ( $H$ )

$H$	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
$F_g: 0,001$	615	568	541	522	509	495	492	486	482	476	472	469	467	465	464	463



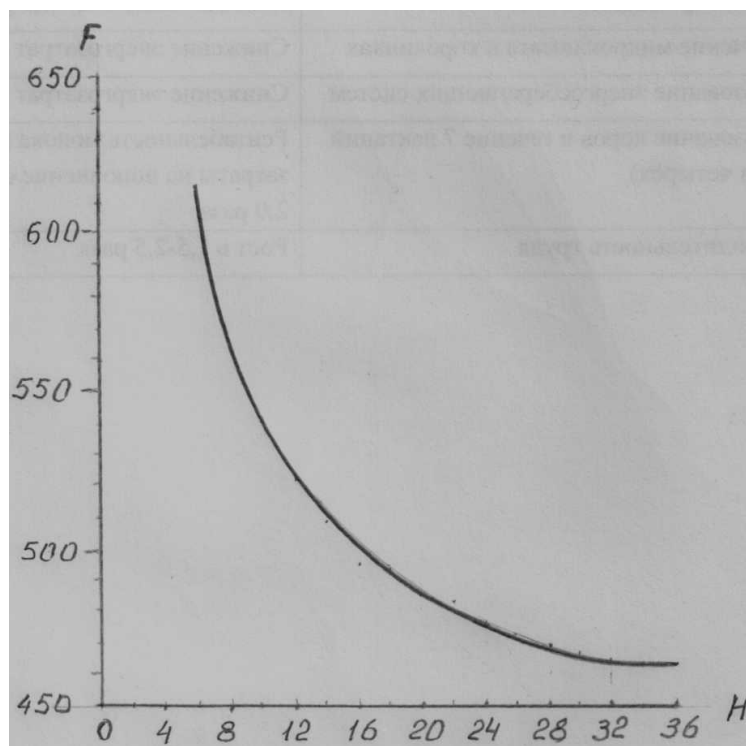


Рисунок 14.1 График изменения видового числа древостоя ели в зависимости от средней высоты

Так как проводимые в ходе опыта измерения связаны с ошибками случайного характера, то обычно экспериментальные точки на графике имеют некоторый разброс относительно общей закономерности. В силу случайности ошибок измерения этот разброс или отклонения точек от общей закономерности также являются случайными.

Следовательно, задача состоит в такой обработке экспериментальных данных, при которой по возможности точно была бы отражена тенденция зависимости  $y$  от  $x$  и возможно полностью исключено влияние случайных, незакономерных отклонений, связанных с погрешностями опыта. Такая задача является типичной для практики и называется задачей сглаживания экспериментальной зависимости.

Очень часто бывает так, что вид зависимости  $y = f(x)$  до опыта известен из физических, биологических или лесоводственных соображений, связанных с существом решаемой задачи. Тогда на основании опытных данных требуется определить только некоторые параметры этой связи, которые входят в нее линейно, или по другой модели. Например, известно, что зависимость диаметра и высоты в молодняках до 10 – 15 лет можно выразить уравнением прямой.

Встречаются и более сложные случаи. Так, запас древесины ( $M$ ) в лесном насаждении определяют через сумму площадей сечений стволов на высоте 1,3 м ( $G$ ), среднюю высоту ( $H$ ) и видовое число ( $F$ ) по формуле  $M = G \cdot H \cdot F$ . Только  $G$  достаточно просто вычислить непосредственно, измерив

диаметры стволов. Среднюю высоту определяют после измерения 12 -15 деревьев ( $D$  и  $H$  у каждого) по связи  $H = f(D)$ . Эта связь выражается полиномами разных степеней, логарифмической кривой и другими моделями, которые подбирают по виду их графиков. Видовое число вычисляют по моделям  $F=f(H)$ , которые описывается простой или усложненной гиперболой. Подобных примеров в лесном хозяйстве множество.

Конечно, если вид связи хотя бы приблизительно известен, это упрощает и облегчает работу по проведению регрессионного анализа. Если же вид связи неизвестен, то его надо установить хотя бы ориентировочно, руководствуясь логической верификацией и профессиональными знаниями. В обычных задачах лесного хозяйства часто бывает достаточно построить график и сопоставить его с графиками известных функций. Последние в большом количестве представлены в специальных альбомах. Иногда (для недостаточно очевидных явлений) приходится перебирать ряд известных моделей или выводить новые. Последнее в лесном хозяйстве происходит редко и доступно лишь ученым с хорошей профессиональной лесоводственной и математической подготовкой. В числе таких наших ученых можно назвать А.З. Швиденко, О.А. Атрощенко, В.В. Севастьянова, В.В. Кузмичева, В.П. Машковского, В.Б. Гедых, В.А. Усольцева, из старшего поколения К.Е. Никитина, В.С. Чуенкова, А.Г. Мошкалева, В.В. Антанайтиса, Я.А. Юдицкого, Н.Т. Воинова и других.

Некоторые уравнения связи относительно просты, другие же отличаются повышенной сложностью с участием нескольких независимых переменных. Например, для нахождения текущего прироста древостоя в качестве независимых переменных для определенной древесной породы должны использоваться такие показатели как возраст, полнота, класс бонитета (высота) и иные аргументы.

При решении описанных задач, когда вид зависимости  $y = f(x)$  известен, применяют различные методы нахождения параметров таких уравнений, т.е. коэффициентов  $a, b, c, \dots$ . Наиболее общий подход разработан здесь русским математиком Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821-1894), создателем петербургской научной школы математиков. Он создал теорию наилучшего приближения функций с помощью многочленов. Хотя метод Чебышева наиболее подходит для решения названных задач, но он сложен и используется редко, в основном профессиональными математиками. В Белорусском НИИ лесного хозяйства его использовал в 1971 г. Н.Т. Воинов (1934-1988), работавший впоследствии доцентом в ГГУ им. Ф.Скорины, для описания кривых, характеризующих образующую древесного ствола осины.

Более прост метод чисел Чебышева, но он требует равных интервалов между опытными данными, т.е. интервалы между

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_n = k$$

должны быть одинаковы ( $k$ ), что можно обеспечить в опыте очень редко. Чаще всего, для нахождения коэффициентов регрессионных уравнений используют метод наименьших квадратов.

### 14.3 Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов применяется для решения различных задач, связанных с обработкой результатов опыта. Наиболее важным применением этого метода является решение задачи сглаживания экспериментальной зависимости, т.е. изображения опытной функциональной зависимости аналитической формулой. При этом метод наименьших квадратов не решает вопроса о выборе общего вида аналитической функции, а дает возможность при заданном типе аналитической функции  $y = f(x)$  подобрать наиболее вероятные значения для параметров этой функции.

Сущность метода наименьших квадратов при решении поставленной задачи заключается в следующем.

Пусть получено  $n$  экспериментальных точек с абсциссами

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

и соответствующими им ординатами

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

Зависимость  $y$  от  $x$ , изображаемая аналитической функцией,

$$y = f(x), \quad (14.1)$$

которая обычно полностью не совпадает с экспериментальными значениями  $y_i$  во всех  $n$  точках. Это означает, что для всех или некоторых точек разность

$$\Delta_i = y_i - f(x_i) \quad (14.2)$$

будет отлична от нуля.

Требуется подобрать параметры функции (14.1) таким образом, чтобы сумма квадратов разностей (14.2) была наименьшей, т.е. требуется обратить в минимум выражение

$$z = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2 \quad (14.3)$$

Таким образом, при методе наименьших квадратов приближение аналитической функции  $y = f(x)$  к экспериментальной зависимости счита-

ется наилучшим, если выполняется условие минимума суммы квадратов отклонений искомой аналитической функции от экспериментальной зависимости.

Следует заметить, что выражение (14.3) представляет собой полином второй степени относительно неизвестных параметров. Эти неизвестные параметры в зависимость  $y = f(x)$  входят линейно, и выражение (14.3) не может принимать отрицательных значений. Поэтому существуют такие значения неизвестных параметров, при которых функция (14.3) достигает минимума, и этот минимум в зависимости от значений  $x_i$  и  $y_i$  будет положительным или равным нулю.

При решении многих практических задач функциональную зависимость  $y$  от  $x$  ищут в виде

$$y = \sum_{k=1}^m a_k f_k(x) \quad (14.4)$$

где  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  - известные функции,  
 $a_1, a_2, \dots, a_m$  - неизвестные параметры.

Так, например, при исследовании колебательных процессов функциями  $f_k(x)$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) являются тригонометрические функции

$$f_k(x) = \cos kx, \quad f_k(x) = \sin kx.$$

При исследовании во многих областях техники, а также в лесном хозяйстве часто встречаются степенные функции

$$f_k(x) = x^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Есть и другие виды функций. Обычно гипотезу о виде требуемой функции принимают, анализируя по экспериментальным данным их графическое изображение и сравнивая его с графиками различных функций, которые приводятся в специальных альбомах.

Таким образом,  $f_k(x)$  в равенстве (14.4) являются известными элементарными функциями аргумента  $x$ .

Исходя из принципа наименьших квадратов, мы должны подобрать такие значения неизвестных параметров  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , при которых обращается в минимум выражение

$$z = \sum_{i=1}^n \left[ y_i - \sum_{k=1}^m a_k f_k(x_i) \right]^2 \quad (14.5)$$

Выражение (14.5) является функцией неизвестных параметров  $a_k$ , поэтому для отыскания минимума этой функции нужно согласно правилам дифференциального исчисления найти частные производные функции  $z$  по всем параметрам  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) и приравнять их нулю:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{da_1} &= 2 \sum_{i=1}^n \left[ y_i - \sum_{k=1}^m a_k f_k(x_i) \right] \cdot [-f_1(x_i)] = 0, \\ \frac{dz}{da_2} &= 2 \sum_{i=1}^n \left[ y_i - \sum_{k=1}^m a_k f_k(x_i) \right] \cdot [-f_2(x_i)] = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dz}{da_m} &= 2 \sum_{i=1}^n \left[ y_i - \sum_{k=1}^m a_k f_k(x_i) \right] \cdot [-f_m(x_i)] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.6)$$

Подставляя в систему (14.6) опытные значения  $x_i$  и  $y_i$ , мы получим систему  $m$  линейных уравнений относительно неизвестных параметров  $a_k$ , решение которой может быть получено с помощью определителей или последовательным исключением неизвестных.

Рассмотрим применение метода наименьших квадратов, когда для изображения экспериментальной зависимости выбрана парабола второго порядка

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Пусть в результате независимых опытов получено  $n$  значений величины  $y$ :

$$y_1, y_2, \dots, y_n,$$

соответствующих значениям величины  $x$ :

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Для определения неизвестных параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$  методом наименьших квадратов составляем сумму квадратов отклонений искомой аналитической функции от наблюдаемых значений в данных точках

$$z = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \quad (14.7)$$

Дифференцируя функцию (14.7) по неизвестным параметрам  $a$ ,  $b$ , и  $c$  и приравнявая производные к нулю, получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{dz}{da} &= \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot x_i^2 = 0, \\ -\frac{1}{2} \frac{dz}{db} &= \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot x_i = 0, \\ -\frac{1}{2} \frac{dz}{dc} &= \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.8)$$

или несколько преобразовав уравнения (14.8), получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \cdot \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i + c \cdot n &= \sum_{i=1}^n y_i. \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

Система (14.9) представляет собой систему трех линейных уравнений относительно неизвестных параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Решая систему (14.9) с помощью определителей третьего порядка или последовательным исключением неизвестных, мы и получим значение параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$  по методу наименьших квадратов.

Здесь приведен метод наименьших квадратов в строгой математической форме, что для студентов университета, изучающих курс высшей математики: матанализ, дифференциальное и интегральное исчисление, вполне понятно.

Но желательно показать и более наглядную форму вычисления коэффициентов уравнений с помощью наименьших квадратов. Для этого приведем следующий пример, где для простоты вычислим коэффициенты для уравнения прямой  $y = a + bx$ . Возьмем пример, приводимый Н. Н. Сваловым (1977), который представляет собой зависимость длины корней сеянца сосны от протяженности его стволика. Измеренные величины сведены в таблице 14.2.

Таблица 14.2 – Зависимость длины корней от высоты ствола сеянцев сосны

Показатели	Величины, см									
Длина корней (y)	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7
Длина стволиков (x)	3,0	3,1	3,5	3,5	4,1	3,5	4,0	5,0	5,0	5,3

Графически это изображено на рисунке 14.2

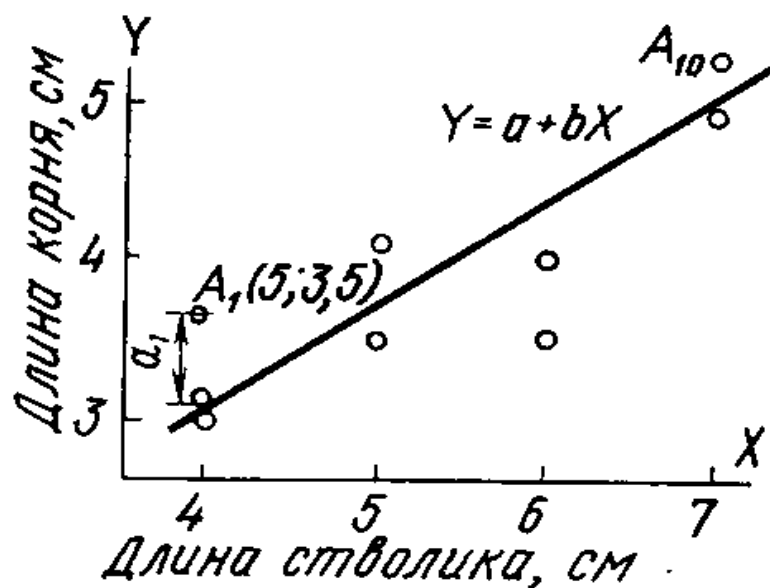


Рисунок. 14.2 Регрессия длины корней на длину стволиков всходов сосны

Здесь десять точек  $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ , изображенных на рисунке. 14.2, имеют соответственно абсциссы  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ , и ординаты  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{10}$ . Проведем визуально для целей рассмотрения метода искомую теоретическую прямую с уравнением

анализе) нас интересуют отклонения вариант не от средней ряда, а от выравненных значений "



$$\left. \begin{aligned} aN + b \sum x &= \sum y \\ a \sum x + b \sum x^2 &= \sum xy \end{aligned} \right\} \quad (14.15)$$

Для нахождения коэффициентов  $a$  и  $b$  необходимо иметь конкретные значения  $N$ ,  $\sum x$ ,  $\sum x^2$ ,  $\sum y$ ,  $\sum xy$ .

При вычислении показателей корреляции между длиной стволиков  $x$  и корней  $y$  указанные суммы получим из таблицы 14.3, построенной на базе таблицы 14.2.

Таблица 14.3 – Исходные данные для вычисления показателей корреляции длины корней и высоты сеянцев сосны

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\Sigma$
Длина корней (x)	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	55
Высота сеянцев (y)	3,0	3,1	3,5	3,5	4,1	3,5	4	5	5	5,3	40
$x^2$	16	16	25	25	25	36	36	36	49	49	313
$y^2$	9	9,61	12,25	12,25	16,81	12,25	16	25	25	28,09	227

Здесь имеем:  $N=10$ ;  $\sum x=55$ ;  $\sum x^2=313$ ;  $\sum y=40$ ;  $\sum xy=227$ .

Следовательно, нормальные уравнения в конкретном виде будут:

$$10a + 55b = 40 \quad (14.16)$$

$$55a + 313b = 227 \quad (14.17)$$

Поделив все члены на коэффициенты при  $b$ , равные 55 и 313, получим:

$$0,1757a + b = 0,7252 \quad (14.18)$$

$$0,1818a + b = 0,7273 \quad (14.19)$$

Вычитая уравнение (14.18) из (14.19), имеем  $0,0061a = 0,0021$ , откуда  $a=0,344$ . Подставляя  $a$  в уравнение (3), получим  $b=0,665$ .

Уравнение регрессии будет таким:

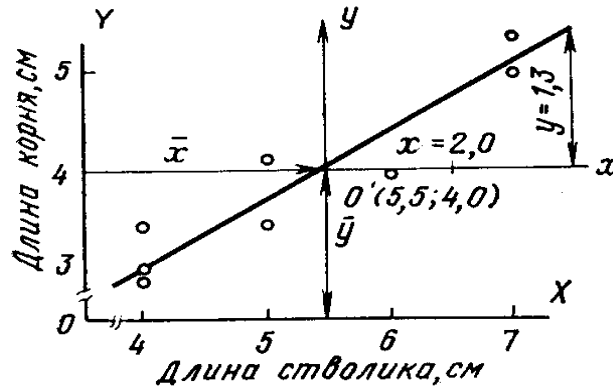


Рисунок 14.3 Регрессия длины корней на длину стволиков всходов сосны

Благодаря указанной замене, имеем:

$$\sum x = \sum(x + \bar{x}) = \sum x + \sum \bar{x} = \sum x + N\bar{x} \quad (14.20)$$

Но так как из формулы средней величины  $\bar{x} = \sum x_i / N$ ,  $N\bar{x} = \sum x_i$ , то очевидно, что в равенстве (14.20)  $\sum x = 0$ . Аналогично и  $\sum y = 0$ , если подобные действия провести для переменной  $y$ .

Из (14.20)

$$\sum x^2 = \sum(x + \bar{x})^2 = \sum(x^2 + 2x\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum x^2 + 2x\sum \bar{x} + N\bar{x}^2 = \sum x^2 + N\bar{x}^2 \quad (14.21)$$

$$\begin{aligned} \sum xy &= \sum(x + \bar{x})(y + \bar{y}) = \sum(xy + \bar{x}y + \bar{y}x + \bar{x}\bar{y}) = \\ &= \sum xy + \bar{x}\sum y + \bar{y}\sum x + N\bar{x}\bar{y} = \sum xy + N\bar{x}\bar{y} \end{aligned} \quad (14.22)$$

Подставив выражения (14.20), (14.21) и (14.22) в уравнение (14.15) получим

$$\left. \begin{aligned} aN + b(\sum x + N\bar{x}) &= N\bar{y} \\ aN\bar{x} + b(\sum x^2 + N\bar{x}^2) &= (\sum xy + N\bar{x}\bar{y}) \end{aligned} \right\} \quad (14.23)$$

Умножив (14.16) на  $\bar{x}$  и вычитая из (14.17), получим одно нормальное уравнение

$$b\sum x^2 = \sum xy \quad (14.24)$$

Из (14.24) следует  $b = (\sum xy) / \sum x^2 \quad (14.25)$

Величина  $b$  называется **коэффициентом регрессии**. Она показывает, на сколько единиц принятой меры изменяется  $y$  при изменении  $x$  на единицу ее меры.

Принимая во внимание общее уравнение линейной регрессии  $y = a + bx$ , имеем в частном случае при  $x = \bar{x}$ ,

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \quad (14.26)$$

Из этого уравнения получим выражение для  $a = \bar{y} - b\bar{x}$  (14.27)

Этот способ нахождения коэффициентов уравнения называется способом определителей. Алгоритм этого способа следующий.

Пусть имеем исходное уравнение

$$\hat{y} = \bar{y} + bx, \quad \text{где } x = X - \bar{x}. \quad (14.28)$$

Нормальное уравнение здесь следующее:  $b \sum x^2 = \sum xy$ ,  $b = (\sum xy) / \sum x^2$ . При уравнении  $y = a + bx$ , где  $x$  - варианты в первоначальных единицах измерения, нормальные уравнения будут

$$\left. \begin{aligned} aN + b \sum x &= \sum y \\ a \sum x + b \sum x^2 &= \sum xy \end{aligned} \right\} \quad (\text{см. 14.15})$$

$$\text{Определитель} \quad D = N \sum x^2 - (\sum x)^2 \quad (14.29)$$

$$a = (\sum y \sum x^2 - \sum x \sum xy) / D, \quad (14.30)$$

$$b = (N \sum xy - \sum x \sum y) / D, \quad (14.31)$$

Применим метод определителей для нахождения коэффициентов  $a$ ,  $b$  в регрессии длины стволиков сосны на длину корней. Исходные данные помещены в таблице 14.1. Они следующие:

$$N=10; \bar{x}=5,5; \bar{y}=4,0; \sum x^2=10,50; \sum y^2=6,26; \sum xy=7,0.$$

Исходное уравнение  $\hat{y} = \bar{y} + bx$  (14.28), нормальное уравнение будет  $b \sum x^2 = \sum xy$ , откуда  $b = (\sum xy) / (\sum x^2) = 7,0 / 10,50 = 0,667$ .

$\hat{y} = 4,0 + 0,667 x$ . Заметим, что в качестве переменной здесь участвуют отклонения вариантов  $x$  от средней  $\bar{x}$ . Если требуется найти выражение регрессии с вариантами  $x$  и  $y$ , следует поставить в исходное уравнение (14.28) вместо  $x$  его значение  $(x - \bar{x})$ .

$$\text{Получим} \quad \hat{y} = \bar{y} + b(x - \bar{x}) \quad (14.32)$$

Для нашего примера имеем

#### 14.4 Вычисление значений зависимого признака на основе уравнений регрессий в лесном хозяйстве

Уравнение регрессии дает возможность найти значения  $\hat{y}$ , которые называют вычисленными или выравненными (иногда - наиболее вероятными значениями).

Для примера с сеянцами сосны, применяя уравнение  $\hat{y}=0,332+0,667 x$ , для  $x$ : 4, 5, 6, 7 см, получим  $\hat{y}$ , соответственно равные 3,0; 3,7; 4,3 и 5,0 см; или наиболее точно: 3,000; 3,667; 4,334; 5,001 см. Вычисленные значения  $\hat{y}$  следует понимать как выравненные (усредненные) с помощью регрессии величины  $y$ , которые наиболее близки к истинным значениям этой величины при данных  $x$ , если бы истинные значения были найдены по большому числу наблюдений. На этом основании обоснованно считать  $\hat{y}$  и наиболее вероятными значениями величины  $y$ .

Чаще всего, величины, которые вычислены по уравнениям регрессии, представляют собой общую закономерность для некоторой совокупности. Например, разрабатывая таблицы хода роста для основных лесобразующих пород Беларуси, В. Ф. Багинским были выведены различные уравнения, описывающие связи таксационных показателей:  $H=f(A)$ ;  $D=f(A)$ ;  $G=f(H)$ ;  $F=f(H)$  и т. д.

Так, для березовых древостоев зависимость величины суммы площадей сечений деревьев на высоте 1,3 м ( $\Sigma q$ ) от средней высоты ( $H$ ) описана уравнением

$$\Sigma q = 5,151 + 1,3208 * H - 0,00842 * H^2 - 0,0000979 * H^3 ,$$

где  $H$  – высота древостоя в пределах от 5 до 32 м. Для вычисления средних видовых чисел древостоя ( $F$ ) использовано уравнение  $F = 0,398 + \frac{0,9845}{H}$

Решая это уравнение, т. е. подставляя последовательно значения  $H$ , равные 5, 6, 7, ..., 32 м, получили следующие величины  $\Sigma q$ . (таблица 14.2)

Таблица 14.2 – Величины  $\Sigma q$  и  $F$  для березовых древостоев, вычисленные по уравнениям регрессии

$H, м$	$\Sigma G, м^2$	$F$
8	15,1	0,521
10	17,4	0,497
12	19,6	0,481
14	21,7	1,469
16	23,7	0,460
18	25,6	0,453
20	27,4	0,448
22	29,1	0,443
24	30,6	0,440
26	32,1	0,437
28	33,4	0,434
30	34,6	0,432

Приведенные величины являются средними для совокупности всех березовых древостоев Беларуси. Для отдельных насаждений отклонения могут достигать 4 – 5%, но уже для совокупности в 5 – 10 выделов (участков однородного березового древостоя) отклонения не выходят за пределы 1 – 1,5%.

Поэтому при таксации лесного фонда лесничества и лесхоза, где однородных выделов обычно не меньше 50 – 100 для лесничества или 300 – 700 для лесхоза, общая ошибка определения при отсутствии систематических отклонений составит незначительную величину 0,1 – 0,3%, а видового числа еще меньше.

Подобным образом в лесном хозяйстве используется большинство данных, полученных по уравнениям регрессии.

## 15. ОЦЕНКА РЕГРЕССИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

- 15.1. Ошибки регрессионных уравнений
- 15.2. Оценки коэффициентов уравнений регрессии
- 15.3. Остаточная дисперсия и ее анализ
- 15.4. Взаимокоррелирующие аргументы. Выбор аргументов в уравнении регрессии при их взаимной корреляции в лесном хозяйстве

### 15.1. Ошибки регрессионных уравнений

Установить наличие связи между зависимой и независимой (независимыми) переменными, конечно, важно, но недостаточно. В наше время исследователь, вооруженный современным компьютером, имеющим мощное программное оснащение (например, систему «MathCAD») за несколько минут получает коэффициенты заданного уравнения. Сегодня для исследования на первый план выходит задача оценки и интерпретации полученных уравнений. Вызвано это тем, что все регрессионные уравнения дают некоторое приближение к тому закону или закономерности, которая существует в природе. Уравнение регрессии характеризует эту закономерность с некоторыми ошибками. Они вызваны в основном недостатками в экспериментальном материале, а иногда и невысоким качеством модели.

Может оказаться, что выборка не охватывает все особенности изучаемого явления, бывают ошибки измерений, на величину исходных данных влияют случайные причины и т.д. Но бывают ошибки и иного рода. Мы не всегда знаем причинно-следственную связь изучаемых явлений, иногда неправильно подбираем форму связи, выражаемую конкретным уравнением. Например, немецкий ученый проф. Продан еще в 60-е годы прошлого века отметил, что уравнение параболы второго порядка  $y = a + bx + cx^2$ , которое в то время часто использовали для описания хода роста древостоев по высоте, является слишком “жестким”: оно занижает значения высот в молодом возрасте и завышает их для спелых и перестойных древостоев. Поэтому очень важно установить, насколько вычисленная линия регрессии достоверна, т.е. найти основную ошибку регрессионного уравнения.

### 15.2 Оценки коэффициентов уравнений регрессии

Подобно коэффициенту корреляции и ряду других статистических показателей, коэффициент регрессии всегда определяется на основе выборочной совокупности. Значит, он является выборочным показателем, само же конкретное уравнение регрессии также может быть названо выборочным. Уравнение истинной линии регрессии будет выглядеть следующим образом:  $y = \alpha + \beta x$

Параметры  $a$  и  $b$  выборочного уравнения регрессии служат для оценки истинных значений  $\alpha$  и  $\beta$ , т.е. их значений в генеральной совокупности.

Нулевой гипотезой является отсутствие связи, т.е. признание того, что коэффициент регрессии ( $b$ ) не отличается от нуля. Для того, чтобы иметь право отбросить нулевую гипотезу, необходимо установить достаточную достоверность этого коэффициента  $\sigma_b$  по отношению  $\sigma_b$  к  $t$  критерию Стьюдента, что может быть сделано путем сопоставления  $b$  с его ошибкой

$$\sigma_{b/t} = b_p / \sigma_b). \quad (15.1)$$

О достоверности  $b$  можно судить по величине ошибки  $\sigma_b$ , а также оценить и степень близости  $b$  к  $\beta$ .

Поскольку в определении линии регрессии участвуют два параметра  $a$  и  $b$ , следует отдельно рассмотреть, как могут они варьировать в выборочных совокупностях, взятых из одной и той же генеральной совокупности.

Теоретическая линия регрессии обычно расположена под большим или меньшим углом по отношению к оси абсцисс. Этот угол определяется величиной (коэффициентом)  $b$ . В геометрическом смысле  $b$  есть тангенс угла между линией регрессии и осью абсцисс (или ординат - если рассматривать вторую линию регрессии). При отсутствии регрессии  $b = 0$ . Тогда линия регрессии  $y$  по  $x$  должна идти горизонтально по отношению к оси абсцисс, а линия регрессии  $x$  по  $y$  - вертикально. Место их пересечения соответствует средним значениям обоих признаков. Таким образом, каждая линия регрессии обязательно пройдет через точку  $K$  (рисунок 15.1), координаты которой  $\bar{x}, \bar{y}$ .

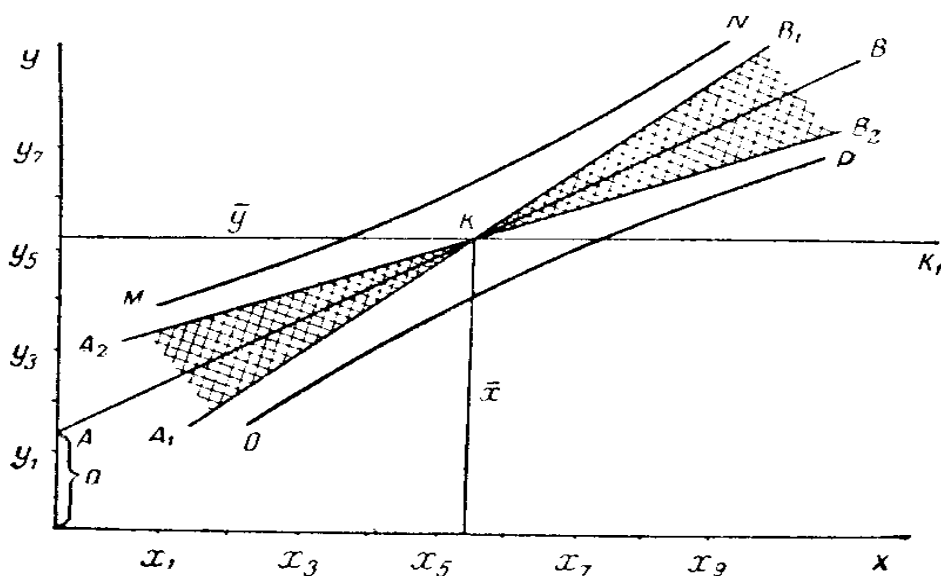


Рисунок 15.1 Доверительные границы для выборочной линии регрессии АВ

Это важно для понимания возможной колеблемости линии регрессии. Так как  $b$  имеет ошибку  $\sigma_b$ , то, очевидно, значения выборочных  $b$  могут находиться в границах, определяемых этой ошибкой. Это значит, что угол наклона линии регрессии может быть или большим, или меньшим.

Как показано на рисунке 15.1, линия регрессии АВ пересекает точку К и имеет угол наклона по отношению к горизонтали ВКК<sub>1</sub>. Но истинная линия регрессии заключена внутри пары углов, образованных пересечением линий А<sub>1</sub>В<sub>1</sub> и А<sub>2</sub>В<sub>2</sub>. Если углы В<sub>1</sub>К и В<sub>2</sub>К построены по верхней и нижней границам  $b$  с учетом только одной ошибки, то вероятность нахождения истинной линии регрессии в этих границах равна 0,68.

Однако уравнение регрессии имеет еще свободный член  $a$ . Он определяет величину отрезка, отсекаемого на оси  $y$  линией регрессии АВ. Величина  $a$  также имеет свои границы колеблемости, поэтому линия регрессии при том же значении  $b$ , т.е. при том же угле наклона ее к оси абсцисс, может проходить или несколько ниже линии АВ, или несколько выше. Так как надо учитывать оба параметра уравнения регрессии, то установление доверительных границ для линии регрессии не так просто. В общем можно считать, что границы доверительного интервала представляют собой кривые линии типа гипербол (линии MN и OP на рисунке 15.1). Это значит, что по мере отдаления от средней точки  $(\bar{x}, \bar{y})$  они расширяются. Крайние точки, по которым строится линия регрессии, обладают большей ошибкой.

Однако при проведении специальных опытов можно добиться достаточно больших  $n$  на всех частях интервала изменений  $x$  (или соответственно  $y$ ) и принять, что дисперсия отдельных значений  $y$  (или  $x$ ) будет примерно одинаковой на всех частях интервала. В таком случае можно применять сравнительно простые методы для оценки достоверности коэффициента и линии регрессии.

Основой для определения возможной вариации линии регрессии является сумма квадратов отклонений фактических значений  $y_i$  от вычисленных теоретически  $\hat{y}_i$  по тем же значениям ряда  $x_i$ .

Формула для определения основной ошибки регрессии  $y$  по  $x$ , т.е.  $y \cdot x$  (если регрессия  $x$  по  $y$ , то записывается  $x \cdot y$ ) следующая

$$\sigma_{y \cdot x}^2 = \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{N - 2} \quad (15.2)$$

$$\sigma_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{N - 2}} \quad (15.3)$$

Здесь  $N-2$  - число степеней свободы. В данном случае число степеней свободы определяется как  $N-2$ , потому что при вычислении откло-



нений используются две величины  $y_i$  и  $\hat{y}_i$ , а не одна, как это делалось при анализе вариационного ряда, когда число степеней свободы определялось как  $N - 1$ .

Поясним изложенное примером вычисления основной ошибки регрессионного уравнения прямой, описывающей зависимость изменения высоты от диаметра в молодых сосновых древостоях. Исходные данные приведены в таблице 15.1.

Таблица 15.1 – Диаметры и высоты в молодых древостоях сосны

№ п/п	Д ( $x_i$ )	Н ( $y_i$ )	$\bar{H}$	Отклонения	Пределы прохождения линии
----------	----------------	----------------	-----------	------------	---------------------------

$$\sigma_{y \cdot x}^2 = \frac{0,89\text{м}}{9} = 0,099\text{м}$$
$$\sigma_{y \cdot x} = \sqrt{0,099\text{м}} = 0,314\text{м}$$

Здесь величина  $\sigma_{y \cdot x}$  имеет такое же значение как и  $\sigma$  в вариационном ряду. В пределах одной  $\sigma_{y \cdot x}$  отклонения распределяются вверх и вниз от линии регрессии в 68% случаев. В 95% они лежат в пределах  $2\sigma_{y \cdot x}$ , а в 99,7% случаев отклонения от теоретической линии регрессии составляют величину  $3\sigma_{y \cdot x}$ , т.е. в нашем примере это 0,942 м.

Пределы изменения

Таблица 15.2 – Вычисление статистик распределения и связи по исходным данным таблицы 15.1.

№ п/п	$x_i$	$y_i$	$K_1=x_i-\bar{x}$	$K_2=y_i-\bar{y}$	$K_1^2$	$K_2^2$	$K_1K_2$
1	3,9	4,8	-2,97	-2,55	8,82	6,50	7,57
2	5,0	6,0	-1,87	-1,35	3,50	1,82	2,52
3	5,5	6,4	-1,37	-0,95	1,88	0,90	1,30
4	6,0	6,1	-0,87	-1,25	0,76	1,56	1,09
5	6,5	7,1	-0,37	0,25	0,14	0,06	0,09
6	6,8	7,7	-0,07	0,35	0,05	0,12	0,02
7	7,4	7,6	0,53	0,25	0,28	0,06	0,13
8	7,7	8,2	0,83	0,85	0,69	0,72	0,71
9	8,2	8,2	1,33	0,85	1,77	0,72	1,13
10	8,9	9,1	2,03	1,75	4,12	3,06	3,55
11	9,7	9,7	2,83	2,35	8,01	5,52	6,65
$\Sigma$	75,1	80,9	0,03	0,05	30,02	21,04	24,76
Среднее	6,87	7,35	-	-	-	-	-

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}} = 1,65$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n}} = 1,38$$

$$r = \frac{\sum K_1 K_2}{\sqrt{K_1^2 K_2^2}} = \frac{24,76}{\sqrt{30,02 \cdot 21,04}} = \frac{24,76}{25,13} = 0,985$$

$$\text{Тогда } R_p = 0,985 \cdot \frac{1,38}{1,65} = 0,824$$

Теперь найдем ошибку коэффициента регрессии

$$\sigma_R = \frac{\sigma_{y \cdot x}}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}} = \frac{0,099}{\sqrt{30,02}} = \frac{0,099}{5,48} = 0,02$$

Небольшая величина ошибки говорит о достоверности линии регрессии.

Это проверяется по формуле

$$t = \frac{R_p}{\sigma_R} = \frac{0,824}{0,02} = 41,2$$

По специальным таблицам t-критерия Стьюдента (приложение Е) находим, что критическая величина t при числе степеней свободы 9 равна 5,04 при  $p=0,001$ , т.е. вычисленное значение t превышает p при 0,001. Поэтому нулевая гипотеза о том, что коэффициент регрессии в генеральной совокупности ( $\beta$ ) равен 0, должна быть отброшена.

Вычисленное уравнение достоверно.

### 15.3 Остаточная дисперсия и ее анализ

Для корректного решения вопроса об адекватности принятой модели, описывающей некоторую закономерность, недостаточно знать ее основную ошибку и определить значимость коэффициентов уравнения. Очень большое значение имеет анализ остаточной дисперсии. Правда, часто этот анализ биологи и лесоводы не делают, т.к. он труден. Просто предполагается, что остаточные величины, которые выходят за пределы уравнения регрессии, т.е. те значения  $x_i$ , что вызваны случайными причинами (их обычно называют просто остатками) распределены нормально и не влияют на результат. Но при строгом исследовании, которое и должны выполнять выпускники университета, делать анализ остатков необходимо. Опишем эту работу в интерпретации К. Е. Никитина и А. З. Швиденко.

Для названного анализа рассмотрим три величины, а именно  $\sigma_y^2, \sigma_{y \cdot x}^2, \sigma_0^2$ , где  $\sigma_y^2 = \sum (y_i - \bar{y})^2$ , здесь  $\bar{y}$  - общее среднее зависимой переменной y, т.е.  $\sigma_y^2$  - сумма квадратов отклонений  $y_i$  от средней.

$\sigma_{y \cdot x}^2 = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ , здесь  $\hat{y}_i$  - значения  $y_i$ , вычисленные по уравнению регрессии, т.е.  $\sigma_{y \cdot x}^2$  - сумма квадратов отклонений, обусловленных регрессией y по x.

$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ , т.е.  $\sigma_0^2$  - остаточная сумма квадратов отклонений, объясняемая иными причинами, чем зависимость  $y$  от  $x$ . Эти три суммы квадратов отклонений находятся в соотношении

$$\sigma_y^2 = \sigma_{y \cdot x}^2 + \sigma_0^2 \quad (15.5)$$

Это выражение представляет разложение общей суммы квадратов отклонений на две составляющие: обусловленную регрессией  $\sigma_{y \cdot x}^2$  и остаточную, объясняющуюся иными причинами, чем зависимость  $y$  от  $x$ . Очевидно, что чем наша модель лучше описывает изучаемую зависимость, тем меньшей должна быть остаточная сумма квадратов  $\sigma_0^2$  и тем ближе к единице коэффициент детерминации  $r^2 = \sigma_{y \cdot x}^2 / \sigma_y^2$ . Поэтому в основу оценки уравнения регрессии может быть положен анализ дисперсий с учетом того, что сумме  $\sigma_y^2$  соответствует  $N - 1$  степень свободы,  $\sigma_{y \cdot x}^2$  - имеет одну степень свободы, поскольку является единственной функцией от  $y_i$ , а  $\sigma_0^2$  имеет  $N - 2$  степени свободы, так как в соответствии с (15.5)  $(N - 1) = (N - 2) + 1$ . Сумма квадратов отклонений, деленная на число степеней свободы, дает соответствующую оценку дисперсии, еще именуемый средний квадрат отклонений.

Обозначим оценку дисперсии, обусловленной регрессией, через  $\sigma_{y \cdot x}^2$ . Если применяемая модель адекватна, то  $\sigma_{y \cdot x}^2 = \sigma^2$ , в противном случае  $\sigma_{y \cdot x}^2 > \sigma^2$ . Оценка остаточной дисперсии  $\hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 / (N - 2)$ . Если в генеральной совокупности связь между величинами  $x$  и  $y$  линейна, то  $\sigma_0^2$  является несмещенной оценкой дисперсии  $\sigma^2$  ошибок  $\varepsilon_i$  или, что то же самое, дисперсии величины  $\tilde{y}_i$ , обозначенной через  $\sigma_{\tilde{y}_i}^2$ . Если связь нелинейна, т.е. модель выбрана неверно, то последнее утверждение неверно. Исходная таблица для анализа линейного уравнения регрессии имеет вид (таблица 15.3).

Таблица 15.3 – Исходные данные для анализа дисперсий регрессионного уравнения

Источник	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Оценка дисперсии
Регрессии	$\sigma_{y \cdot x}^2$	1	...
Остаточная	$\sigma_0^2$	$N - 2$	$\hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 / (N - 2)$
Общая	$\sigma_y^2$	$N - 1$	

При названных выше предпосылках регрессионного анализа и при условии, что истинный коэффициент регрессии  $\beta_1=0$ , отношение

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2} \quad (15.6)$$

подчиняется F-распределению с 1 и N-2 степенями свободы. Если расчетное значение F превышает табличное  $F_{1-\alpha} [1; (N-2)]$ , то гипотезу  $H_0 : \beta_1=0$  отклоняют с уровнем значимости  $\alpha$ . Табличную величину F берут из приложения Ж.

Предположив, что линейная модель адекватна, можно вывести формулы основных ошибок коэффициентов  $b_0$  и  $b_1$  и уравнения регрессии в целом, а также построить доверительные интервалы для истинных  $\beta_0$  и  $\beta_1$ . Применяв формулу основной ошибки функций нескольких случайных величин, можно получить

$$m_{b_1} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (15.7)$$

где  $\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2$  - оценка дисперсии  $\sigma^2$ , т.е. величина  $m_{b_1}$  зависит как от остаточной дисперсии, так и от суммы  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ .

Отсюда следует, что для увеличения надежности выборочного коэффициента регрессии следует брать по возможности больший интервал  $X_{\max} - X_{\min}$ .

Доверительные интервалы для  $\beta_1$  имеют вид

$$b_1 - t_{1-\alpha/2} (N-2) m_{b_1} \leq \beta_1 \leq b_1 + t_{1-\alpha/2} (N-2) m_{b_1}, \quad (15.8)$$

где  $t_{1-\alpha/2} (N-2)$  - табличное значение t для двустороннего уровня значимости  $\alpha$  и при числе степеней свободы  $k=N-2$ .

Для проверки гипотезы  $H_0 : \beta_1 = \beta^*$  против альтернативы  $H_0 : \beta_1 \neq \beta^*$  достаточно убедиться, что  $\beta^*$  находится в доверительном интервале (15.8), если же это не так, то альтернативную гипотезу отвергают.

Основную ошибку  $b_0$  находят из формулы

$$m_{b_0} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (15.9)$$

доверительные интервалы

$$b_0 - t_{1-\alpha/2} (N-2) m_{b_0} \leq \beta_0 \leq b_0 + t_{1-\alpha/2} (N-2) m_{b_0}, \quad (15.10)$$

а проверку гипотезы  $H_0 : \beta_0 = \beta^*$  против  $H_\alpha : \beta_0 \neq \beta^*$  проводят аналогично коэффициенту регрессии  $b_0$ .

Основная ошибка уравнения линейной регрессии  $y = \dots$

Аналогичные рассуждения относительно  $b_0$  предоставляем студентам для самостоятельного решения.

Ранее рассматривался коэффициент детерминации  $r^2$ , вычисляемый (если линейная модель верна) как отношение суммы квадратов, обусловленной регрессией, к общей сумме квадратов и измеряющий ту часть изменчивости зависимой переменной  $y$ , которая определяется зависимостью  $y$  от  $x$ . В нашем примере  $r^2 = 148,31/162,31 = 0,913$ , т.е. на 91% изменчивость  $y$  зависит от изменения  $x$ .

Соответствие модели исходным данным можно оценить по графику, нанеся исходные точки и вычисленное уравнение регрессии. Для линейного уравнения с одной переменной такой путь вполне приемлем, но если модель сложная (много переменных, сложный вид зависимости), то для суждения об адекватности требуются объективные статистические критерии. Обычно для этой цели применяют F-критерий. Следует подчеркнуть, что во всех случаях, когда имеется возможность проверить адекватность, эта процедура необходима.

Если модель адекватна, то остаточная сумма квадратов  $\sigma_{ост}^2$  объясняется только дисперсией ошибок  $\varepsilon_1 \sigma^2$ ; в противном случае  $\sigma_{ост}^2$  дополнительно включает сумму квадратов, порожденную неадекватностью, т.е. сумму квадратов расстояний между вычисленным и истинным уравнением регрессии. Для адекватной модели различие между оценкой

дисперсии неадекватности  $\sigma_{неад}^2$  и оценкой дисперсии ошибок  $\sigma^2$  объясняется только случайными причинами, т.е. отношение

$$F = \frac{\sigma_{неад}^2}{\sigma^2}$$



Остатки можно исследовать при помощи специальных критериев. Однако вполне достаточные результаты дает графический анализ, использующий общий график остатков (для суждения о нормальности  $\varepsilon_i$ ), графики зависимости остатков от  $x_i$ ,  $\bar{y}_i$  и др. Если модель адекватна, то точки  $\varepsilon_i$  должны располагаться в полосе, параллельной оси абсцисс на графиках зависимости  $\varepsilon_i$  от  $x_i$  и  $y_i$  (или  $\bar{y}_i$ ). Некоторая субъективность заключений при этом, понятно, остается. В настоящее время полные лицензионные программы матобеспечения для ПК включают анализ остатков. Поэтому эту процедуру надо обязательно применять при проведении регрессионного анализа. Про необходимость проведения анализа остатков в своих работах неоднократно упоминают проф. О.А. Атрощенко, А.З. Швиденко и др.

#### **15.4. Взаимокоррелирующие аргументы. Выбор аргументов в уравнении регрессии при их взаимной корреляции в лесном хозяйстве**

Если мы определяем функцию от нескольких аргументов, то надо знать как влияет каждый аргумент, его значимость, что мы разобрали выше. Но остается вопрос о необходимом количестве аргументов. На первый взгляд может показаться, что чем больше аргументов, тем точнее вычисление функции, так как учитывается большее количество влияющих факторов.

Например, если мы изучаем зависимость высоты дерева от качества условий местопроизрастания, то можем взять в качестве аргумента количество физической глины в горизонтах  $A_1$ ,  $C$ . Если же эти аргументы дополним процентом гумуса в горизонтах  $A_1$  и  $A_2$ , то прогноз функции будет точнее. Можем добавить увлажненность, скажем записать глубину уровень грунтовых вод (УГВ), что даст еще большее уточнение. Но бесконечно добавлять аргументы нельзя. Во-первых, это просто сложно реализуется, особенно на стадии эксперимента. Главное же - аргументы могут быть взаимно коррелированы. Так, если у нас УГВ расположен на глубине 1,0 м, то нет смысла брать процент влаги в горизонте  $C$ . Эти два аргумента взаимозависимы. Такое же явление мы наблюдаем в ранее приведенном примере по определению коэффициента формы  $q_2$ . Ранее использовали выражение  $q_2 = f(H, D)$ , но позже (после исследований Ф.П. Моисеенко) поняли, что достаточно будет принять  $q_2 = f(H)$ .

Все дело здесь в том, что аргументы в уравнении регрессии не должны коррелировать друг с другом. Так УГВ и процент физической глины в горизонте  $A$ , если и коррелируют, то слабо. Поэтому применение их обоих оправдано. Но уже увлажненность горизонта  $C$  прямо зависит от УГВ. Взаимно коррелируют диаметр и высота дерева.

Применение множественного регрессионного анализа предполагает наличие некоррелированных аргументов. В случае, если аргументы регрессии коррелированы, что часто бывает в лесоводственных исследова-

ниях, то коэффициенты, стоящие при них ( $a, b, \dots$ ) определяются в зависимости друг от друга и тоже коррелированы. Корреляция между коэффициентами регрессии искажает оценку индивидуального изменения каждого аргумента на величину функции. Это значит, что вычисленные коэффициенты  $a, b, \dots$  не определены строго, а могут взаимно изменяться: увеличивается  $a$ , тогда уменьшается  $b$  и т.д.

Взаимосвязь между аргументами находится через внутреннюю меру определенности  $d_{bH} = 1 - (1 - r_{ji})$ , которая лежит в пределах от 0 до 1. Здесь  $r_{ji}$  - коэффициент корреляции между аргументами  $j$  и  $i$ .

При увеличении  $d_{bH}$  возрастает неопределенность относительно коэффициентов регрессии. Границу для  $d_{bH}$ , где интерпретация отдельных факторов еще возможна, определяют из условий задачи и сути изучаемого явления. При  $d_{bH} \leq 0,5$  коэффициенты регрессии искажены не очень сильно и поддаются интерпретации.

Выбор конкретных аргументов в уравнении регрессии определяется из условий задания. В первую очередь делается логический анализ и выбираются те аргументы, которые лучше соответствуют биологическим и лесоводственным особенностям и законам. Среди выбранных аргументов, если они взаимокоррелированы, оставляют те, где большие частные коэффициенты корреляции  $x - y_0$ . Два аргумента, корреляция между которыми больше чем 0,5, не должны быть в одном уравнении. Без ущерба для результата вычислений один из них опускается.

## **16. ВЫБОР УРАВНЕНИЙ РЕГРЕССИИ, ИХ ВЕРИФИКАЦИЯ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ЛЕСНОМ ХОЗЯЙСТВЕ**

16.1 Принципы и основные критерии выбора регрессионной модели

16.2 Основные виды закономерностей в лесоводстве, лесной таксации и других лесных дисциплинах, выражаемые с помощью регрессионных моделей

16.3 Верификация регрессионных моделей

16.4 Применение регрессионных моделей в лесном хозяйстве

### **16.1 Принципы и основные критерии выбора регрессионной модели**

В предыдущих главах описано как вычислить коэффициенты регрессионного уравнения и как оценить это уравнение. Но для проведения анализа биологических и лесоводственных явлений этого недостаточно. Нам надо выбрать вид связи, определиться с конкретной ее моделью с тем, чтобы она отражала суть изучаемого явления, описывала закономерности его изменения.

Наилучшим образом модель будет выбрана тогда, когда она не просто сгладит экспериментальные данные, но и будет отражать суть изучаемого явления. В этом случае с определенными оговорками эту модель можно использовать для экстраполяции опытных данных. Последнее представляет собой наиболее сложную и неоднозначную часть по выбору и использованию моделей. Если модель выбрана не совсем верно и не отражает всей сути изучаемого явления, то, хотя на некотором отрезке кривой сглаживание может быть удовлетворительным, но для экстраполяции такая модель не годится.

Например, если мы описываем рост дерева или древостоя в высоту, то модель, исходя из основных законов роста древостоя, должна отвечать следующим условиям:

- кривая роста должна начинаться в начале координатных осей, т.к. рост начинается от семени, т.е. от нулевого значения высоты;
- в начальный период жизни (у разных древесных пород этот период неодинаков) рост идет медленно;
- постепенно происходит ускорение роста, достигая некоторого максимума прироста по высоте. Последний наблюдается в разном возрасте в зависимости от древесной породы и условий произрастания;
- постепенное замедление прироста по высоте продолжается до старшего возраста, который тоже бывает разным, аналогично предыдущему условию;
- в самом старшем возрасте рост в высоту практически прекращается (по диаметру дерево еще растет) и крона деревьев приобретает своеобразную уплотненную форму;

- в конце жизни дерева (древостоя) оно погибает и начинается новый цикл.

Исходя из описанных условий, кривая роста должна отвечать следующим условиям:

- начинаться в начале координат;
- иметь не менее 2 (иногда 3) точки перегиба: начало большого роста, переход к замедленным темпам прироста, прекращение роста. В практике обычно не используют последнее условие, т.к. при интенсивном хозяйстве до естественной спелости и распада древостой могут дожить только в зоне полной заповедности в заповедниках и национальных парках;
- абсолютное максимальное значение высоты, которое дает модель, не должно превышать максимально достижимую высоту, до которой вырастают деревья определенной породы в заданных условиях произрастания.

Поскольку для моделирования роста деревьев (древостоев) в высоту часто используют экспериментальный материал (пробные площади), где возраст древостоя колеблется от 20-30 до 60-80 лет, то этот отрезок может быть описан различными кривыми, даже параболой 2 порядка –  $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ . Но эта кривая из-за ее «жесткости» совершенно непригодна для экстраполяции. Поэтому, применив кривую, не отвечающую сути изучаемого явления, мы не можем сделать суждения о действительной траектории изменения некоторого признака под воздействием разных факторов. Так, в приведенном примере нельзя сказать, какова будет высота за пределами изученных возрастов – в 10 или 100 лет. Кривая может здесь уйти далеко в сторону, даже вниз в 100 лет, просто исказив суть явления. Поэтому в лесной таксации для этих целей еще с XIX века применяют достаточно гибкие модели. Наиболее известны и хорошо «работают» следующие.

$$\text{Функция Вебера: } H_a = H_{\max} \left(1 - \frac{1}{1.0p^c}\right); \quad (16.1)$$

Уравнение гомельских ученых В.Н. Дракина, работавшего в Гомельском пединституте (ныне ГГУ им. Ф. Скорины) и Д.И. Вуевского научного сотрудника БелНИИЛХа:  $H_a = H_{\max} (1 - e^{-kt})^m$ ; (16.2)

$$\text{Формула Я.А. Юдицкого (УСХА, г. Киев): } H_a = b_1 \Phi[b_2(A - b_3)] + b_4. \quad (16.3)$$

В формулах (16.1-16.3) применены следующие обозначения:

$H_a$  – высота в возрасте «а»;

$H_{\max}$  – максимальная высота данной породы в определенных условиях произрастания;

$\Phi$  – функция Маркова.

Другие обозначения характеризуют параметры уравнений.

Несколько иная тенденция наблюдается в модели роста деревьев по диаметру. Объясняется это тем, что в толщину деревья растут до момента их отмирания, хотя темп прироста в старости замедляется. Здесь зависимый признак – диаметр (независимый – возраст) – имеет положительное приращение практически в течение всей жизни, тогда как рост в высоту в старовозрастном лесу прекращается.

На основе знаний биологии можно предсказать, что кривые, отражающие рост в высоту в связи с возрастом и диаметром  $H=f(A,D)$ , будут отличаться друг от друга. Это обусловлено тем, что изменение возраста характеризуется равными приращениями в течение всей жизни. Приращение же диаметра неодинаково. В первые годы жизни оно небольшое, затем достигает максимума в молодые годы, после чего прогрессивно убывает до периода отмирания дерева. Здесь мы характеризуем среднее поведение роста, не обращая внимания на годовые или краткочастотные колебания прироста высоты или диаметра, которые возможны в связи с влиянием различных факторов среды, например, засуху, но не биологических законов.

Из этого далеко не полного перечня моделей видно, что они постепенно совершенствуются, сохраняя основные требования к моделям роста. Существуют определенные правила, приемы и критерии, которые в совокупности определяют выбор моделей. В большинстве случаев выбор уравнения регрессии производят на основе анализа, используя профессиональные знания, как это делали выше при рассмотрении роста деревьев по высоте и диаметру.

К настоящему времени накоплены знания о конкретных уравнениях регрессии для описания важнейших биологических процессов, подобных рассмотренным. Однако следует заметить, что при изучении многих явлений возникают большие затруднения в выборе подходящего уравнения регрессии. Даже установление общей ее формы (прямолинейна она или криволинейна) на основе профессиональных знаний часто не может быть сделано. Статистические методы в таких случаях дают основание для принятия решений о форме регрессии и выборе уравнения.

Для примера возьмем ранее рассмотренную зависимость длины корней сеянцев сосны и высоты ее всходов. Размещение точек на графике часто указывает на форму кривой. Если точки расположились, как на рисунке 16.1, есть основания принять связь за линейную. Теоретический анализ существа явления не доставляет аргументации, противоречащей этому выводу.

Действительно, для всходов сосны нет ограничивающих факторов к развитию обоих изучаемых признаков - длины стволиков и длины корней. В отношении регрессии длины стволиков и корней всходов или молодых растений можно сказать, что она линейна. Если точки на графике расположились так, что указывают на изгиб обобщающей их кривой, есть основания проверить гипотезу о линейности регрессии, т.е. рассчитать и оценить достоверность меры криволинейности.

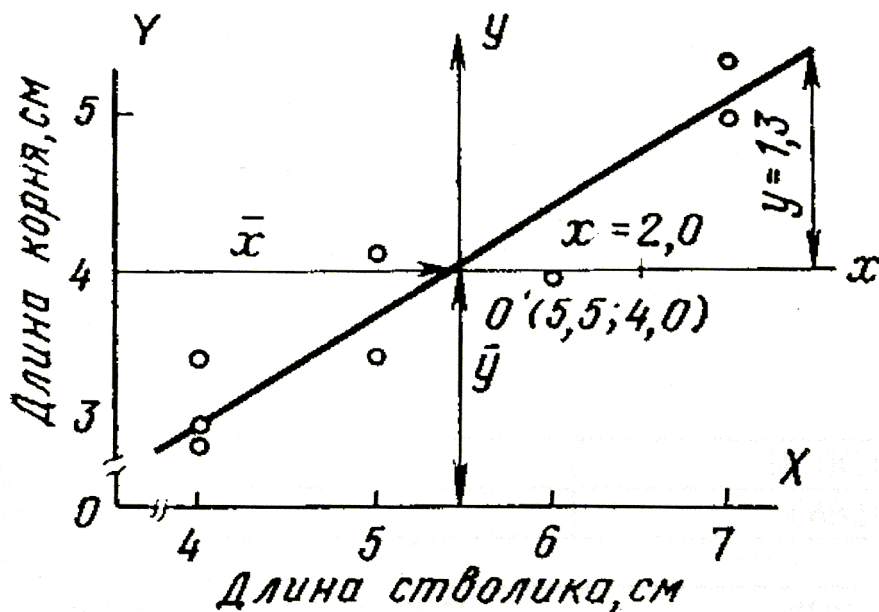


Рисунок 16.1 Регрессия длины корней на длину стволиков всходов сосны

Часто при исследованиях связи между признаками регрессионный анализ следует за корреляционным или осуществляется вместе с ним. Тогда определенные статистические заключения о линейности регрессии делают на основе *t*-критерия Стьюдента, но лучше на основе *F*-критерия Фишера.

Отметим, однако, что сами по себе критерии не дают исчерпывающего ответа о выборе уравнения, а лишь о форме регрессии: прямолинейна она или криволинейна. Если получены данные, свидетельствующие, что связь прямолинейна, этого достаточно, чтобы перейти к следующему шагу регрессионного анализа. Указание на криволинейный характер регрессии обязывает вести дальнейший поиск функции среди многих функций этого вида. В таком случае следует испытать наиболее простые и доступные исследователю функции. Останавливают выбор на функции, дающей лучшее приближение к опытным данным, или имеющую наименьшее среднее квадратическое отклонение вычисленных данных ( $\sigma_{yx}$ ) или ( $\sigma'_{yx}$ ). Здесь часто помогают уже упомянутые альбомы, где помещены графики различных функций.

В лесном хозяйстве во многих случаях удовлетворительную аппроксимацию опытных данных получают на основе парабол 2, 3-й и более высоких степеней, оценивая точность каждой из регрессий. При малом числе групп (классов) зависимой переменной *y* можно получить параболу с числом коэффициентов, равным числу групп, и проходящую через все точки, характеризующие групповые средние. Однако ценность регрессии в этом случае снижается. Кривая не выражает в таком случае закономерности связи, а отражает случайности выборочных наблюдений. Применять такую кривую можно только для аппроксимации и нахождения промежуточных значений в конкретном случае, не выходя за пределы изме-

рений. Например, если мы измерили на срубленном дереве диаметры в 6 точках, то для получения промежуточных диаметров, лежащих между измерениями, правомерно использовать уравнения вида целых полиномов 5-6 степени. Но они будут описывать образующую только этого дерева.

Криволинейный характер зависимости между переменными иногда удается заменить на прямолинейный путем преобразования  $x$  или  $y$ . Логарифмирование часто дает существенное уточнение выражения связи. Логарифмические параболы вследствие растянутости осей, вообще, более гибки.

## **16.2 Основные виды закономерностей в лесоводстве, лесной таксации и других лесных дисциплинах, выражаемые с помощью регрессионных моделей**

В лесном хозяйстве, как видно из изложенного, применяются разные модели. Они выбираются, исходя из условий проведенного эксперимента и из сущности изучаемого явления. Если мы изучаем рост чего-либо (дерева, насаждения, ветви, животного и т.д.), то должны определиться каким условиям будет соответствовать наша модель. Для описания роста в высоту и по диаметру такие подходы изложены выше. Если же мы изучаем другие показатели роста дерева или древостоя, то должны учитывать уже их особенности. Например, изучая изменение запасов ( $M$ ) древостоя, мы должны помнить следующие условия:

- кривая начинается в начале координат;
- она должна отражать медленный рост в самом молодом возрасте;
- необходимо, чтобы нашло отражение замедление увеличения запаса древостоя после определенного возраста (у сосны после 60-70 лет, у березы после 40-50 лет и т.д.), которое будет видно из наличия точки перегиба;
- в самом старшем возрасте идет процесс распада древостоя, появляется много сухостоя, и величина запаса уменьшается. При этом он не может быть отрицательным – предельный случай при полном распаде  $M=0$ .

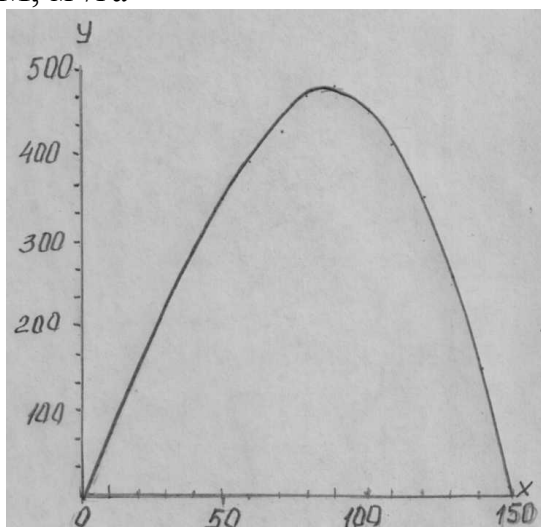
Таким образом, модель изменения запаса насаждения будет иметь примерно такой вид, как кривая на рисунке 16.2.

Если же мы будем исследовать прирост запаса древостоя ( $Z_M^{Тек}$ ), то он должен соответствовать следующим условиям:

- начало кривой приходится на точку 0;
- медленный рост в начале жизненного цикла;
- резкое увеличение в период «большого роста» - сосна в 20-50 лет – и т.д.;
- достижение максимума прироста и постепенное его снижение;
- в перестойных древостоях, когда преобладают процессы распада, текущий прирост может быть отрицательным за счет отмирания деревьев;
- для отдельного дерева прирост может быть равен 0, но отрицательные величины исключаются.

Графически изменение прироста запаса древостоя ( $M$ ) и наличного древостоя ( $Z$ ) показано на рисунке 16.2.

$M, \text{ м}^3/\text{га}$



А

Рисунок 16.2

Ход роста по наличному запасу древостоя осины I класса бонитета и его текущее изменение запаса с увеличением возраста

$Z$

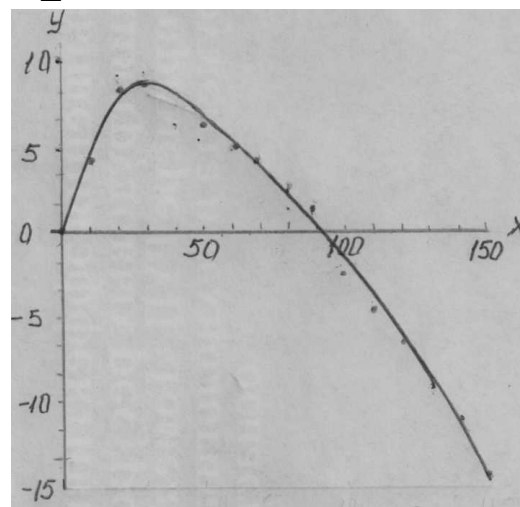


Рисунок 16.3

Изменение прироста наличного древостоя

Исследование других закономерностей в лесном хозяйстве приводит к использованию других кривых. Выбор формы зависимости во всех случаях идет от простого к сложному.

Модели, отражающие причинно-следственные взаимосвязи и взаимодействия в системах (или модели связи), - основной тип моделей, применяемых в практике и исследованиях по лесному хозяйству. Ниже мы рассмотрим модели связи двух классов: эмпирические и структурные или функциональные.

В качестве математической формы эмпирических моделей связи в основном используют регрессионные уравнения и реже - интерполяционные многочлены. В первом случае для нахождения коэффициентов уравнений применяют различные модификации метода наименьших квадратов, позволяющие просто и достаточно надежно оценить статистическим путем разрабатываемую модель. Методом регрессионного анализа получены, пожалуй, практически все наиболее содержательные биометрические закономерности в лесном хозяйстве.

В то же время метод наименьших квадратов имеет существенные недостатки чисто познавательного плана: во-первых, он не учитывает природной сущности изучаемого явления и допускает известный произвол в выборе конкретных типов уравнений. Во-вторых, этот метод предполагает детерминированный характер изучаемого процесса. Поэтому в последнее время все больше внимание привлекают вероятностные модели (особен-



но для отражения процессов, протекающих во времени), использующие методы теории случайных функций.

Основное средство объективной разработки моделей эмпирических связей – использование методов биометрии, основанных на законах математической статистики. Это позволяет принять обоснованные решения, оценить структуру, рабочий диапазон и надежность моделей. Однако в полной мере методы статистики можно применять только к материалу, полученному с соблюдением статистических предпосылок. Во всех остальных случаях применение относительно трудоемких методов статистического анализа взаимосвязей неоправданно. То же относится и к материалу, из которого произвольно исключена значительная часть только на том основании, что она “не укладывается” в некоторые представления экспериментатора, ибо простые графические методы позволяют в таких случаях получить те же результаты.

Если для разработки модели связи информация еще не собрана, то планирование эксперимента позволяет значительно улучшить результаты, так как лучше потратить часть времени и средств для предварительной оценки ситуации, выбора независимых переменных и их анализа. Главное здесь, как и во многих других случаях применения математических методов, – это точная формулировка задачи и преследуемых целей, исходя из сути изучаемого явления.

В данном разделе будем применять следующие термины: адекватность модели – соответствие исходным данным, подтвержденное статистическими критериями; корректность – ее приемлемость (с точки зрения пользователя), соответствие моделируемому процессу или системе. Эти термины являются обычными в математике.

Статистические методы могут подтвердить высокую вероятность адекватности модели, но особенности информации могут привести к результатам, неприемлемым с точки зрения существа явления; иначе говоря, корректная модель есть в известном смысле и лучшая. Особенно возрастает опасность ошибок при малых выборках.

Модели, связывающие более двух переменных, называют многомерными. К ним относятся множественные регрессионные уравнения, многомерные случайные процессы. По форме модели связи могут быть в табличном, графическом или аналитическом виде, т.е. в виде уравнений.

Регрессионные уравнения бывают линейные и нелинейные, причем этот термин может относиться как к коэффициентам уравнения, так и к независимой переменной. Например, уравнение  $y = a + bx + cx^2 + dx^3$  является линейным по коэффициентам  $a, b, c, d$  и нелинейным по  $x$ , а множественное уравнение  $y = ax_1^b + cx_2^{dx_3}$  нелинейно как по коэффициентам, так и по переменным  $x_1, x_2, x_3$ . Мы рассмотрим линейные уравнения относительно коэффициентов, т.к. модели такого рода вполне достаточны для моделирования связей в лесных исследованиях, а теория нелинейного (по коэффициентам) оценивания очень сложна. Многие нелинейные моде-

ли можно привести к линейному виду, например, логарифмированием. Такие модели называют внутренне линейными.

Модели могут быть представлены не только уравнениями, но и в графической и табличной форме. Табличное и графическое представления закономерностей связи традиционно свойственны лесному хозяйству и широко распространено, особенно для данных, полученных без надлежащего статистического обоснования. Так, лесотаксационные таблицы (объемные, сортиментные, хода роста и др.), разработанные до 60-х годов XX века, представлены преимущественно в виде числовых массивов, полученных графическим выравнением опытных материалов. Недостатки такого рода моделей известны: субъективизм конечных результатов, невозможность статистической оценки соответствия модели изучаемому явлению, неудовлетворительность формы для целей механизации обработки информации.

В то же время модели, выраженные в табличном виде, где величины получены путем графического выравнения, разработанные весьма квалифицированными и ответственными специалистами на основе большого (даже огромного) экспериментального материала, часто оказывались адекватными и корректными и находили (находят и сегодня) широкое применение в практике. К таким моделям можно отнести таблицы объемов стволов А. Крюденера и объемные таблицы Союзлеспрома (М.М. Орлов (1867-1932), Д.И. Товстолес, В.К. Захаров, Б.А. Шустов, А.В. Тюрин), сортиментные таблицы Ф.П. Моисеенко, таблицы хода роста А.В. Тюрина и другие. Эти табличные данные обычно точнее результатов, полученных в 60-80 годы прошлого века путем использования математических моделей, имеющих недостаточное лесоводственное обоснование.

В принципе любой численный или графический материал можно выразить в виде формул. В 60-70 годы прошлого века машинный счет больших массивов информации из-за несовершенства ЭВМ того времени был затруднен. Поэтому таблицы выражали в виде математических моделей. Для этого был выполнен ряд работ по моделированию существующих таблиц. Однако опыт моделирования численных массивов, выровненных графически, свидетельствует, что достаточно точное их отражение требует использования громоздких и разнородных математических выражений, что также создает определенные неудобства в их использовании в системах автоматизированной обработки данных. В настоящее время возможности компьютеров позволяют пользоваться огромными массивами информации, выраженной в табличной форме, не прибегая к ее упрощению в виде уравнений.

При обработке лесоводственной информации нередки случаи, когда графические методы выравнения наиболее целесообразны. Это бывает тогда, когда методы сбора исходных данных неизвестны либо статистически несостоятельны, а сбор информации (метод сбора, объем) не согласован с конечной целью работы. В силу этого применение статистиче-

ских методов может дать здесь результаты, противоречащие сути изучаемого явления. Проиллюстрируем второе положение примером.

Пусть у нас есть некоторый массив данных, который характеризует изменение запаса древостоя с возрастом. Известно, что запас древостоя зависит от породы, условий произрастания, возраста и полноты. При сборе экспериментального материала наиболее сложно строго выдержать единообразие по полноте. Если мы хотим определить ход роста по запасу нормальных древостоев (с полнотой 1,0), но в опытном материале есть пробные площади с полнотой от 0,6 до 1,0, то математическое выравнивание с использованием всего имеющегося материала даст искаженную картину, что видно на рисунке 16.4.

Из рисунка 16.4 видно, что использование всего массива пробных площадей, которые представляют разнородный материал (по полноте) ведет к ошибкам. В этом случае правильно предварительно построить график, определить главную закономерность (ход роста при полноте 1,0), даже сделать графическое выравнивание, а потом разрабатывать математическую (регрессионную) модель.

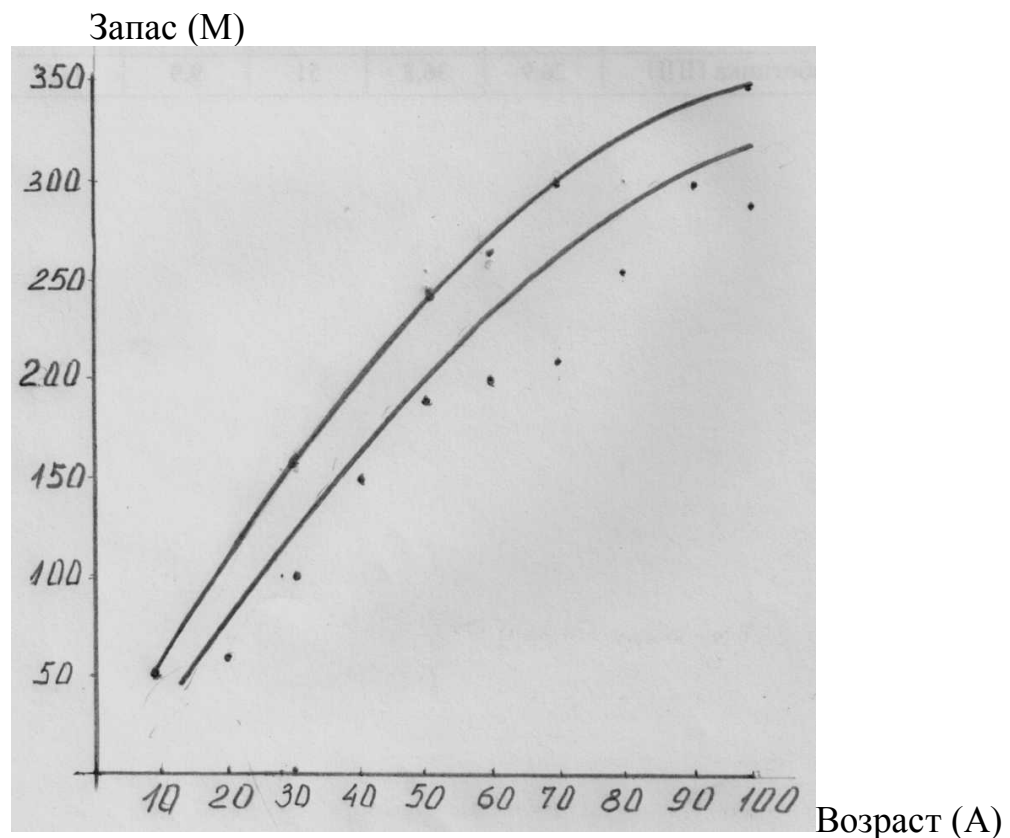


Рисунок 16.4 Модель изменения запаса (M) древостоя от возраста (A) при неверно организованных исходных данных для березовых древостоев II класса бонитета

- 1 – линия, построенная по данным из разнополнотных древостоев;
- 2 – графическое выравнивание по данным древостоев с полнотой 1,0

Подобный пример приводят К.Е. Никитин и А.З. Швиденко (рисунок 16.5). На нем показано 15 случайным образом замеренных высот деревьев в разновозрастном насаждении бука. Допустим, что требуется установить зависимость высоты от возраста. Применение стандартных статистических методов дает зависимость, показанную штриховой линией: начиная с некоторого возраста, высота деревьев постепенно уменьшается, т.е. модель адекватна, но не корректна.

Такой результат получен, конечно, из-за недостаточности исходных данных. В разновозрастном древостое деревья, имеющие одинаковый возраст, но отличающиеся расположением в пологе, имеют разные высоты. Если нет возможности собрать дополнительный материал, то графическое выравнивание - единственная возможность решения задачи. Надежность такого выравнивания нельзя оценить, поскольку в основе его лежит единственная предпосылка: высота деревьев с возрастом должна, как правило, увеличиваться, но не может уменьшаться.

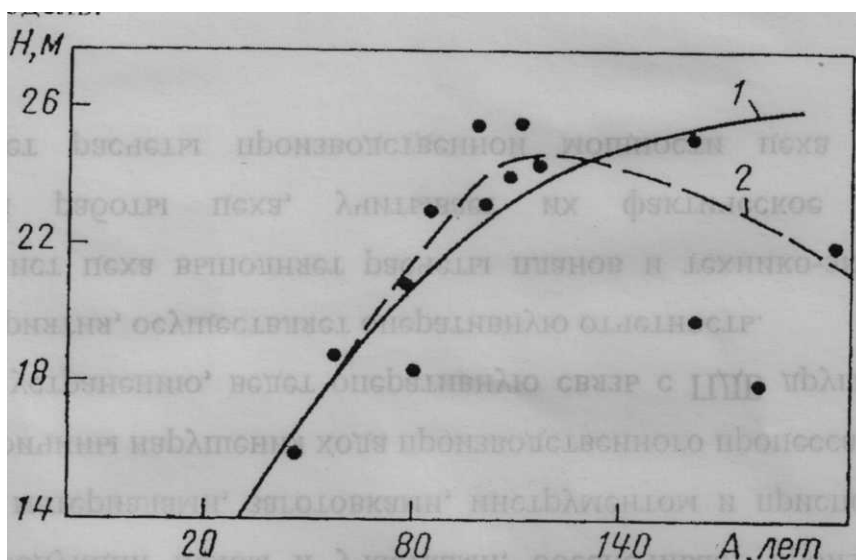


Рисунок 16.5 Выравнивание плохо организованных данных:  
1 – графическое; 2 – аналитическое

Иногда возникает необходимость графические модели представить в аналитическом виде. Для этого применяют два практических приема: снимают с графика значения зависимой переменной и применяют один из статистических методов вычисления уравнения регрессии или, если конкретный вид уравнения известен, то коэффициенты уравнений целесообразно вычислять решением систем уравнений. Статистическая оценка моделей в обоих случаях может дать только соответствие графика полученному уравнению.

В качестве примера возьмем данные из рисунка 16.4. Здесь необходимо подобрать коэффициенты уравнения, отражающего зависимость высоты от возраста. Исходя из графика, форма связи здесь (сплошная линия) может быть в виде параболы второй степени

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2, \quad (16.4)$$

где  $x$  – возраст;  $y$  – высота.

Для нахождения коэффициентов  $b$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  возьмем три точки, например, со значениями  $x$ , равными 20, 80 и 140 годам. По графику находим  $y_1=12,3$ ;  $y_2=21,1$ ;  $y_3=25,2$ . Поскольку уравнение (16.4) справедливо для любой точки, лежащей на кривой, то подставив значения  $x$  и  $y$ , в уравнение (16.4) и решаем систему из трех уравнений для нахождения коэффициентов. Переменную  $x$  для упрощения расчетов можно масштабировать в 20 раз и записать:

$$x'_1 = x_1/20=1, \quad x'_2 = x_2/20=4, \quad x'_3 = x_3/20=7, \text{ т.е.}$$

$$\left. \begin{aligned} 12,3 &= b_0 + b_1 + b_2; \\ 21,1 &= b_0 + 4b_1 + 16b_2; \\ 25,2 &= b_0 + 7b_1 + 49b_2. \end{aligned} \right\} \quad (16.5)$$

Решая систему (16.5), находим  $b_0=8,32$ ,  $b_1=4,239$ ,  $b_2=-0,2611$ ; вернувшись к исходной переменной, окончательно получим

$$y = 8,32 + 4,239x/20 - 0,2611(x/20)^2 = 8,32 + 0,212x - 0,000652x^2.$$

Легко убедиться, что сплошная линия на рисунке 16.4 есть графическое изображение полученного уравнения. Для этого вычислим для некоторого значения  $x$ , например 80 лет, , получим

$y=8,32+0,212*80+0,000652*80^2=8,32+16,96-4,17=21,11$ , т.е. искомый результат (21,1 м) в 80 лет. Аналогично рассчитываем значения для любого возраста на имеющемся интервале наблюдений.

Приведенный пример есть частный случай так называемых интерполяционных многочленов. При многочисленных приближениях интерполяционный многочлен степени  $n$  однозначно определяется  $n+1$  его значением. В нашем примере для нахождения коэффициентов многочлена второй степени мы взяли 3 точки. Применение интерполяционных многочленов такого типа удобно, если используемая модель должна предсказывать поведение функции только в точках  $(x_i, y_i)$  - узлах интерполяции, поскольку оценка поведения многочлена между узлами затруднена.

Если статистический анализ (или другие соображения) позволяет ограничиться линейным (относительно независимой переменной) уравнением, то выбор модели связи однозначен. Но если связь нелинейна, то процедуры однозначного выбора конкретного аналитического выражения в качестве уравнения регрессии не существует: одна и та же зависимость  $y$  от  $x$  может быть отражена многими формулами. Здесь требуется, с одной стороны, знание общих свойств моделируемой зависимости, с другой – математических свойств используемых выражений. В качестве примера рассмотрим материал, приводимый К.Е. Никитиным и А.З. Швиденко. Пусть нам требуется найти зависимость коэффициента вариации ( $v_M$ ) запаса древостоя, определенного по материалам измерений на круговых пробных площадях, от величины этих круговых проб ( $b$ ). Результаты показаны на рисунке 16.6.

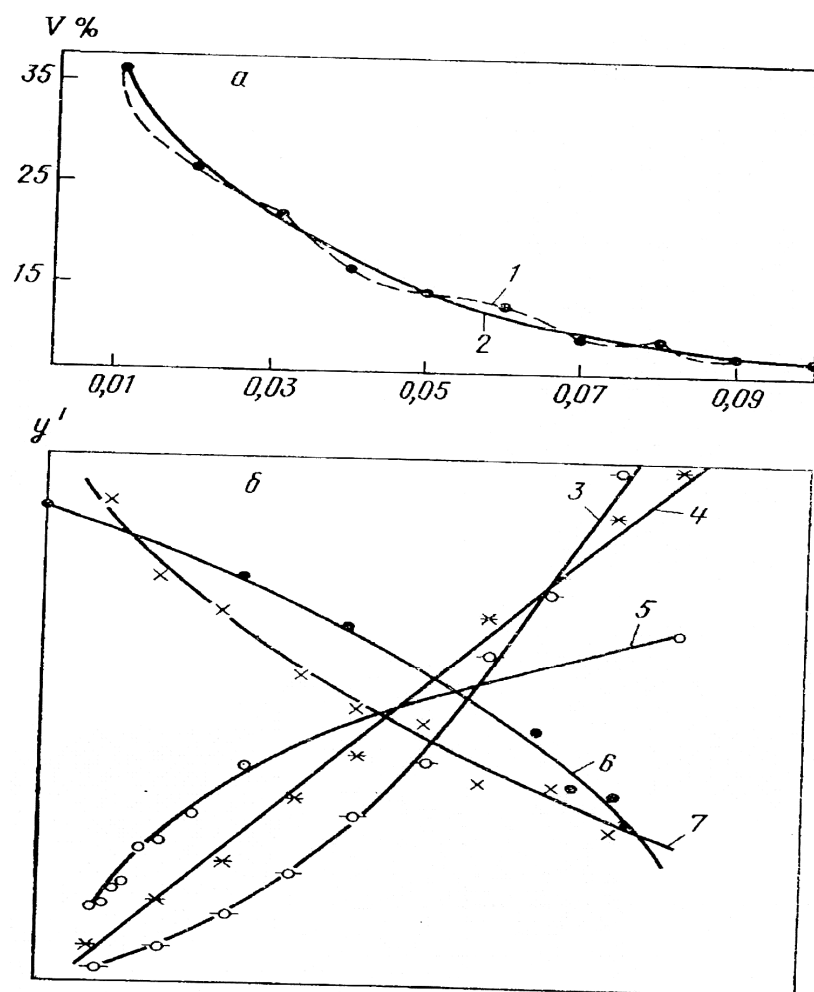


Рисунок 16.6

а) Модель  $v_M = f(l)$ : 1 – исходные данные; 2 – выравнивающая кривая гиперболического вида:  $y = x(a + \frac{1}{bx})$  (16.8);

б) Зависимость коэффициента изменчивости запаса от величины круговых проб и преобразование ее к линейному виду. Здесь кривые 3-7 – показывают преобразование данных соответственно по формулам (16.7), (16.8), (16.9), (16.10), (16.11).

Можно подобрать такое уравнение регрессии, которое пройдет через все точки (так, интерполяционный многочлен  $n-1$  степени пройдет точно через  $n$  точек), но бессмысленность подобного подхода очевидна. Например, нам требуется получить закономерность изменения показателей формы ствола ( $q_2$ ) в зависимости от высоты дерева в среднем, т.е. учесть изменение условных средних (а не каждого конкретного значения), которые являются случайными величинами, подвержены изменчивости и содержат ошибки измерений. Анализ ситуации позволяет предположить, что уменьшение  $q_2$  с увеличением высоты должно быть представлено монотонно убывающей кривой. Следовательно, выбираемая модель не должна содержать внутри своего “рабочего” интервала (диапазона значе-

ний независимой переменной) особых точек минимума, максимума, точек перегиба.

Важное значение имеет простота модели и количество коэффициентов, подлежащих определению. Поэтому круг выражений, из которых выбирают уравнение регрессии, должен быть ограничен по возможности простыми функциями. Из них особое место занимают те, которые путем алгебраических преобразований могут быть приведены к линейному виду. Это позволяет применить относительно простые, но глубоко разработанные методы статистической оценки. К ним в первую очередь принадлежат показательные, степенные, логарифмические и гиперболические функции. В таблице 16.1 и на рисунках 16.7 и 16.8 приведены типы уравнений, которые, по совершенно справедливому мнению К.Е. Никитина и А.З.Швиденко наиболее часто используют в лесных исследованиях. Эти модели с одной независимой переменной и с двумя коэффициентами, приводимые к линейному виду. В таблице показан вид преобразования и критерии, позволяющие оценить приемлемость данного выражения. Их графическое изображение приведено на рисунке 16.6.

Таблица 16.1 – Некоторые элементарные функции, наиболее часто используемые в лесном деле, одной переменной и преобразование их к линейному виду

Уравнение	Тип преобразования	Уравнение прямой	Уравнение применяется, если постоянной величине равно соотношение	
$y=ax^b$	Логарифмирование	$lgy=lga+blgx$	$\Delta(lgx)/\Delta(lgy)$	16.6
$y=ae^{bx}$	Логарифмирование	$lgy=lga+(blge)x$	$\Delta x/\Delta(lgy)$	16.7
$y=a+bx^n$ (n-известное)	Замена $x'=x^n$ , $y'=y$	$y'=a+bx'$	$\Delta(x^n)/\Delta y$	16.8
$y=a+b/x$	Замена $x'=1/x$ , $y'=y$	$y'=a+bx'$	$\Delta(1/x)/\Delta lg$	16.9
$1/y=a+bx$	Замена $x'=x$ , $y'=1/y$	$y'=a+bx'$	$\Delta x/\Delta(1/y)$	16.10
$x/y = a + bx$ $y = \frac{x}{a + bx}$	Замена $x'=x$ , $y'=x/y$	$y'=a+bx'$	$\Delta x/\Delta(x/y)$	16.11

Задачу также можно решить путем предварительного преобразования исходных данных и нанесения их на график в новой системе координат (точки должны располагаться вдоль прямой линии). Первый путь

предпочтительнее, поскольку легко реализуется в программах автоматического выбора модели на компьютере, второй – более нагляден.

В лесном хозяйстве помимо уравнений, приведенных в таблице 16.1 очень широко используются уравнения вида целых полиномов, в основном 2-4 степени:  $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots$ . К линейному виду они могут быть приведены путем логарифмирования. Их употребление для описания динамики древостоев рекомендуют К.Е. Никитин, В.Ф. Багинский и другие. Этими уравнениями хорошо выражаются зависимости  $H=f(D)$ . При этом здесь нежелательно использование параболы 2 порядка, которая занижает начальные и завышает конечные данные. А.Г. Мошкалев (1926-1992) использовал для связи  $H=f(D)$  полиномы 3 степени. В.Ф. Багинский иногда употреблял параболу 4 порядка. Для вычисления коэффициентов в уравнениях вида целых полиномов для ПК имеется хорошее матобеспечение, где дается и оценка уравнения.

Из уравнений, рекомендованных К.Е. Никитиным и А.З. Швиденко, при проведении исследований в лесном хозяйстве наиболее употребительными являются (16.6), (16.9), (16.10) и (16.11). Формы кривых, часто применяемых для моделирования зависимостей в исследованиях по лесному хозяйству, показаны на рисунках 16.7-16.8.

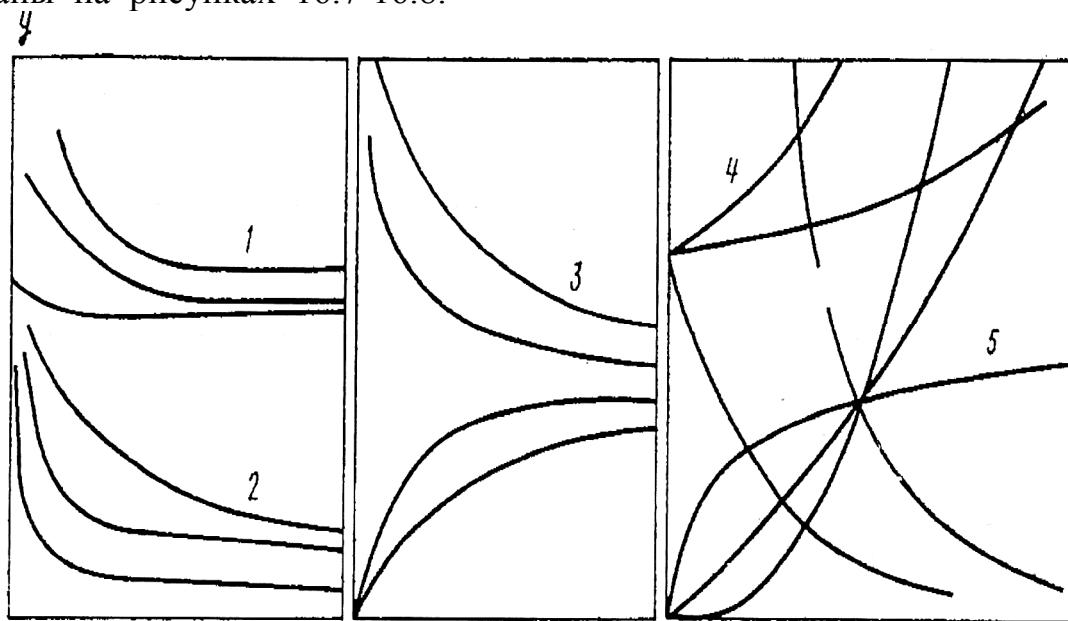
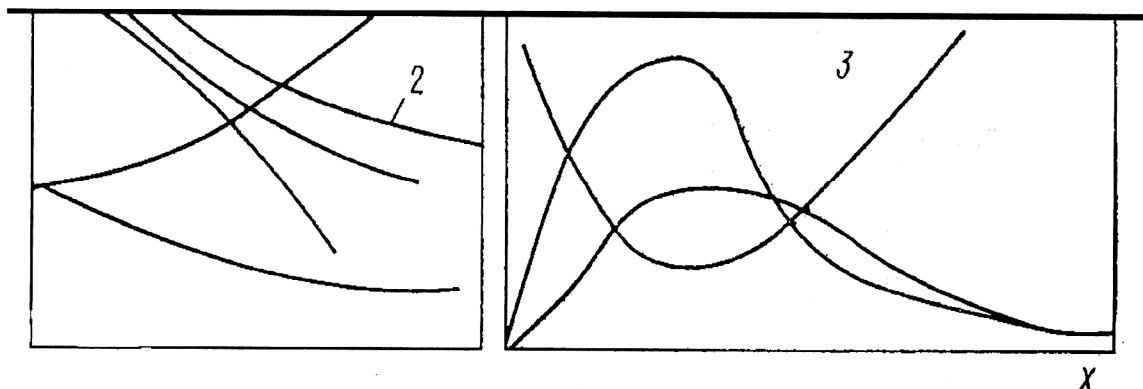


Рисунок 16.7 Графики кривых с двумя параметрами:

1 –  $1/y=a+bx$ ; 2 –  $y=a+b/x$ ; 3 –  $y/x=a+b/x$ ; 4 –  $y=ae^{bx}$ ; 5 –  $y=ax^b$



x



Рисунок 16.8 Графики кривых с тремя параметрами:

$$1 - y = ae^{bx} + c; \quad 2 - y = ax^b + c; \quad 3 - y = ax^b e^{cx}$$

Анализ основных моделей и выделение наиболее адекватных, применяемых для описания динамики древостоев, строения, связей между запасами насаждений и классами бонитетов, типов леса и описание взаимосвязей между другими таксационными показателями выполнил О.А. Атрощенко в монографии «Моделирование роста леса и лесохозяйственных процессов», которая приведена в списке литературы.

### 16.3 Верификация регрессионных моделей

**Верификация модели** - это ее проверка, т.е. подтверждение того, что модель верна (или не верна) и соответствует законам и закономерностям, действующим в генеральной совокупности. Верификация проводится в несколько этапов.

- Проверяется степень сглаживания (выравнивания) опытных данных, т.е. степень совпадения теоретических и экспериментальных значений функции при заданных аргументах. Для этого используют методы, рассмотренные ранее: основную ошибку уравнения регрессии, остаточную дисперсию, отношение общей и остаточной дисперсий, анализ остатков.

- Проверяют значимость коэффициентов уравнения регрессии по  $t$ -критерию, где  $t$  - должен быть 2 или 3 в зависимости от принятого уровня достоверности.

- Устанавливают степень коррелированности аргументов и принимают решение об их исключении или оставлении.

После выполнения перечисленных процедур приходят к заключению, что уравнение подобрано верно и хорошо описывает закономерность по результатам опыта. Если это не так, то подбирают другую модель.

Но при постановке опыта могут быть ошибки. Количество первичного материала может оказаться недостаточным для отражения всех особенностей изучаемого явления в генеральной совокупности и т.д. Поэтому требуется дополнительная проверка модели, описывающей ту или иную закономерность, но на новом материале, собранном независимо от нашего опыта. Его количество должно быть не меньше, чем использовано для построения модели. При этом сбор материала для проверки должен осуществляться в соответствии с правилами планирования эксперимента, т.е. правилами организации выборочных наблюдений. Иначе выборка будет нерепрезентативной. Здесь нельзя использовать “типичные” места замеров, “типичные” делянки и т.д., т.к. могут возникнуть смещенные оценки, т.е. имеющие систематическую ошибку.

Например, если мы, определяя выход семян в питомнике, взяли более урожайную грядку в качестве “типичной”, то показатели будут завышены и наоборот. Когда нет систематической ошибки, то точность

можно рассчитать (и планировать), но систематическую ошибку исправить практически невозможно, т.к. она не поддается статистической интерпретации. Поэтому при планировании эксперимента надо строго выдерживать статистический метод.

В лесном хозяйстве исследуют обычно достаточно неоднородные совокупности. Например, изучая приживаемость лесных культур, мы можем обнаружить на участке места, где культуры прижились хорошо или где они погибли, скажем, в случае вымочек на понижениях.

Оценивая участки древостоев, пройденные рубками ухода, встречаемся с неравномерностью выборки деревьев на всей площади. Изучая смешанный древостой, видим, что деревья, скажем, сосны и ели, могут располагаться относительно равномерно или биогруппами, но встречаются и относительно большие куртины (до 0,05 га до 0,10 га и больше), состоящие из одной породы.

При проведении исследований (обследований), причем не только в научных, но и практических целях, требуется собирать различную информацию. Поэтому планирование эксперимента при изучении подобных объектов должно строиться на применении выборочных методов, отвергая закладку опытных участков в «типичных» местах.

Сказанное подтвердим примером, когда нам требуется провести исследование в совокупностях различных объектов (таблица 16.2).

Таблица 16.2 – Информация, требуемая для проведения исследования разных объектов

№ п/п	Наименование совокупностей (объектов)	Требуемая информация	Метод сбора
1	Средний состав дубовых древостоев в лесхозе (области, республике)	Состав на выделе в дубовой хозсекции	Маршрутный выборочный учет или анализ таксационных операций
2	Возобновление под пологом леса в ельниках	Средняя численность и возраст возобновления на 1 га	Закладки учетных площадок
3	Состояние 1-2 летних культур сосны	Процент приживаемости	Закладка учетных площадок
4	Средний запас спелых сосновых древостоев	Запас м <sup>3</sup> /га	Закладка пробных площадей

Чтобы получить статистически значимую информацию, например, для второй из названных совокупностей, т.е. при учете естественного возобновления, надо провести наблюдение на большом числе учетных площадок или проанализировать много выделов. Численность возобновления от выдела к выделу и от площадки к площадке внутри выдела будет сильно варьировать. Коэффициент вариации  $v$  может достигать 100% и выше. Понятно, что в этих условиях ни одна, ни десятки площадок, заложенных по принципу типичной выборки, не дадут надежной

информации. Так, для учета с точностью 10% надо заложить 100 площадок:

$N = \frac{V^2}{P^2} = \frac{100^2}{10^2} = 100$ . При 5% точности (с достоверностью 0,68) уже требуется

огромный исходный материал:  $N = \frac{100^2}{5^2} = \frac{10000}{25} = 400$  шт. Поэтому в практике

обычно ограничиваются точностью в 10-15% при достоверности 0,68.

Аналогичная картина будет для первого примера. Состав дубовых насаждений от выдела к выделу и от лесхоза к лесхозу, даже от лесничества к лесничеству будет меняться. Понятно, что «типическая» выборка здесь ничего не дает, т.к. «типичность», т.е. средний состав, еще предстоит определить.

Для обследования лесных культур с целью установления их приживаемости в лесном хозяйстве существуют специальные правила, которые требуют подсчитать количество сеянцев на определенной площади. При этом предполагается выборочным путем, чаще всего методом систематической выборки, закладывать учетные площадки или ленты (ряды).

Для нахождения среднего запаса в древостоях, которые намечаются в главное пользование, необходимо заложить пробные площади, естественно, в спелых сосняках. Но вариация здесь высока из-за различия в условиях произрастания и полноте. Поэтому и в подобных ситуациях планирование эксперимента базируется на методах, разработанных в математической статистике.

Непригодность типического способа отбора выборки в описанных случаях состоит не в том, что способ недостаточно точен, а в том, что он не свободен от субъективизма. Несмотря на этот недостаток, способ типической выборки приходится нередко применять при оценке (таксации) насаждений. Например, при глазомерной таксации средний диаметр деревьев древостоя определяют как среднюю величину из 3-4, взятых «на глаз» средних по толщине деревьев. При детальном обследовании участка леса на зараженность вредителем приходится закладывать пробную площадь в средних (типичных) условиях. Иногда таким же образом решают и задачу оценки возобновления.

По неизбежности, как способ, требующий наименьшего объема наблюдений, метод типической выборки находит широкое применение при решении многих задач в лесном хозяйстве. Следует отметить, что информацию, пригодную для статистической оценки опыта с определенной точностью, этим способом получить невозможно. Можно вычислить среднюю величину признака на основе такого материала. Но ошибку этой средней определять не следует, так как она неправомерна, ибо случайная изменчивость признака (среднее квадратическое отклонение) в опыте не измерялась. В этом случае придется для оценки опыта ограничиться типической выборкой, т.е. только полученной средней величиной признака.

Для статистического истолкования результатов опыта рассмотренных совокупностей (возобновление на вырубке, сосняки лесничества, культуры сосны) с определенной точностью требуется закладка проб по одному из способов случайного отбора, рассматриваемых ниже. При этом

исследователю придется решить два главных вопроса: 1) определить достаточное число наблюдений, 2) правильно отобрать единицы для наблюдений.

При решении первого вопроса можно воспользоваться формулой

$$N = \frac{V^2}{P^2}, \quad (16.12)$$

где  $V$  – коэффициент вариации;  $P$  – показатель заданной точности.

Выше показано, что для получения результата с точностью 5% для оценки возобновления, где коэффициент вариации ( $v$ ) нами установлен в 100%, потребовалось бы заложить 400 площадок. При этом наше заключение о том, что полученная выборочная средняя будет отличаться не более чем на 5% от генеральной средней, дается с вероятностью 0,68. Это значит, что в 32 случаях из 100 эта закономерность может и не подтвердиться. Если принять уровень безошибочного суждения 0,05, т.е. делать заключение с вероятностью 0,95, которую следует считать достаточной, то в формулу для определения числа наблюдений нужно ввести множитель  $t$  ( $t$  - критерий). При вероятности 0,95  $t$ -критерий примерно равен 2 (1,96).

Тогда формула для числа наблюдений будет

$$N = \frac{V^2 \cdot t^2}{P^2} \quad (16.13)$$

Для нашего объекта число наблюдений составило бы

$$N = (2^2(100^2)) / 5^2 = 1600.$$

В других случаях, когда  $v$  по пробной выборке характеризовалось бы меньшим числом, можно было бы планировать меньшее число наблюдений.

Из приведенного примера видно, что, если варьирование значений признака в совокупности велико и полученное  $N$  по формуле (16.13) практически недостижимо, исследователь должен пойти на сужение объекта исследований или иногда довольствоваться точностью опыта в 10 и даже 15%.

Правильнее первое решение. Можно взять, например, в опыте не все ельники лесхоза, лесничества, а только какого-то типа леса или типа условий местопроизрастания, желательнее наиболее распространенные. В пределах таких объектов варьирование будет значительно меньшим. Вообще, следует придерживаться принципа брать более ограниченные совокупности.

## 16.4 Применение регрессионных моделей в лесном хозяйстве

В лесоводственных исследованиях регрессионные модели – необходимый инструмент для решения возникающих задач. При этом важнейшим этапом, который надо строго выдерживать и в практической работе, является планирование эксперимента в строгом соответствии с законами биометрии.

Решения вопроса по планированию эксперимента состоит в правильном отборе или размещении единиц наблюдения. Современная статистическая теория рекомендует для этого ряд способов.

Обычно применяют следующие способы: простой случайный отбор, или случайное бесповторное выборочное наблюдение, случайное послыльное выборочное наблюдение, систематическое выборочное наблюдение и субвыборочное наблюдение, или двухстадийное наблюдение.

Простой случайный отбор является наиболее распространенным и статистически разработанным методом. Его организуют с помощью какого-либо механизма, обеспечивающего равную возможность для любой единицы попасть в выборку. Обычно для выбора единиц используют таблицу случайных чисел.

Но применить этот способ в чистом виде при исследованиях в лесном хозяйстве часто очень трудно, а иногда и невозможно. Например, закладка учетных площадок в пределах лесхоза потребует большого количества времени на переезды и поиск нужного объекта.

Более приемлема и наиболее часто применяется систематическая выборка. По точности и обоснованности она практически не уступает случайной, являясь своеобразным вариантом последней.

Систематическая выборка полностью определяется выбором первого ее члена. Выбирают для обмера или наблюдения, допустим, каждый десятый член, например 10, 20, 30-е и т.д. дерево по перечету или 10, 20, 30-й и т.д. ряд культур. Закладка учетных площадок через определенное расстояние друг от друга представляет также систематическую или механическую выборку. Преимущество такой выборки - легкость ее получения и равномерность распределения по всему объекту. Ее недостатком могут быть случаи, когда совокупность обладает периодической изменчивостью и если интервал между отбираемыми единицами совпадает с длиной волны этого изменения (или кратный ей), то получим выборку со смещением, т.е. с систематической ошибкой.

Допустим, что многорядный агрегат, который применяли при посеве некоторой культуры, имел один из шести или другого числа неисправный захват. Если в последующем учете №№ учетных рядов культур совпадают с рядами, произведенными неисправным захватом, то выборка будет содержать систематическую ошибку. Это всегда следует учитывать при планировании опыта. В условиях равномерной изменчивости признака, можно применять систематическую выборку и без существенной погрешности обрабатывать как случайную. После получения дополнительно-

го материала, собранного с использованием статистического метода, можно рекомендовать ее использование в широкой практике.

Окончательное суждение о верности модели и ее широком применении может быть сделано только после проверки на практике, т.е. модель должна быть опробована в производственных условиях. Только тогда можно учесть все возможные особенности закономерностей, действующих в генеральной совокупности. Если модель подобрана правильно и хорошо проверена, то при ее использовании в практике не обнаруживается существенных недостатков. Но небольшая коррекция все равно может иметь место.

Например, сортиментные таблицы Ф.П. Моисеенко с 1958 по 1968 годы были неоднократно проверены в практике. Но их новый усовершенствованный вариант до издания в 1972 году прошел дополнительную проверку в течении 1970-71 гг. и лишь после внесения небольших уточнений был принят и издан. Зато с 1972 года, т.е. уже более 37 лет эти таблицы применяются в практике без замечаний.

Это положительный пример, хотя есть и такие, когда модель приходилось менять. Например, первоначальную модель для упрощенного отвода лесосек, разработанную в 1986 году В.Ф. Багинским, через год после опытной проверки автор заменил на более совершенную.

Регрессионные модели – основа для составления почти всех нормативов в лесном хозяйстве, и они должны тщательно отбираться и проверяться, чтобы хозяйство в лесу велось на должном научном уровне.

Все нормативы для лесного хозяйства, где встречаются количественные зависимости, разработаны с помощью описанных методов. Так, «Правила рубок в лесах Республики Беларусь» базируются на закономерностях изменения прироста древостоя ( $z$ ) в зависимости от полноты ( $П$ ). Это регрессионная связь  $z=f(A, П, B)$ , где  $A$  и  $B$  – возраст и класс бонитета. Выход сортиментов ( $C$ ) в товарных таблицах определяется по его связи со средними диаметром ( $D$ ), высотой ( $H$ ) и классом товарности ( $K$ ), т.е.  $C=f(D, H, K)$ . Стоимость древесины ( $Cm$ ) зависит от породы ( $P$ ), крупности сортимента ( $Kp$ ) и его сорта ( $S$ ), т.е.  $Cm=f(P, Kp, S)$ . Этот показатель учитывают при расчетах эффективности проводимых лесохозяйственных мероприятий. Спелость леса и возраст рубки находят, используя связи выхода сортиментов, их стоимости и др. от возраста. Эти примеры можно продолжить.

Все сказанное свидетельствует о том, что в лесном хозяйстве регрессионные методы применяются повсеместно.

## 17. ИЗМЕРЕНИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ КАЧЕСТВЕННЫМИ ПРИЗНАКАМИ

17.1 Особенности статистического анализа качественных признаков

17.2 Основные методы анализа качественных признаков

17.3 Метод индексов и его значение в лесном хозяйстве

17.4 Применение статистических методов исследования качественных признаков в лесном хозяйстве

### 17.1 Особенности статистического анализа качественных признаков

В лесном хозяйстве приходится иметь дело не только с объектами, отличающимися количественно, но и качественно. Например, растения и животные одного вида варьируют по окраске, иногда вместо многочисленных замеров величины (веса, размера) семян их можно разделить по таким качественным категориям как цвет (оттенок), листья отличаются по форме (эллипсовидные, круглые) и т.д. В этом случае, конечно, можно сделать оцифровку качественных признаков, но это несет определенную условность. Поэтому лучше воспользоваться специальными методами, разработанными для подобных случаев. Такие методы разработаны достаточно полно и хорошо изложены К.Е. Никитиным и А.З. Швиденко, П.Ф. Рокицким, Н.И. Сваловым и другими авторами, материалом которых мы воспользуемся.

Качественные признаки в конкретной задаче рассматривают как постоянные (тогда их обычно относят к основным факторам) или изменчивые. Будем называть качественный признак изменчивым, если он может принимать разные состояния или градации  $x_i$ . Например, различные интенсивности окраски хвои, семян, коры и пр.; богатство условий местопроизрастания - боры, субори, судубравы, дубравы; категории защитности лесов и др. Для изменчивых признаков целесообразно вводить понятия, аналогичные статистикам распределения и связи случайной величины - среднее, медиану, моду, корреляции и др.

Простейший случай - когда в опыте отмечают только наличие или отсутствие некоторого признака  $A$ , т.е.  $A$  имеет две градации:  $A$  и "не  $A$ ". Тогда, обозначив одни из них 1, а второй 0, изучение статистических задач, связанных с данным качественным признаком, можно свести к закономерностям биномиального распределения. В целом к этому приему прибегают и в более сложных ситуациях: различным качественным градациям ставят в соответствие количественный признак. Например, некоторое количество желудей может быть распределено по градациям интенсивности блеска (блестящие, тусклые, матовые), древостои различаются по типам условий местопроизрастания, где определены их площади или запасы и т.д. Тогда, обозначив значения количественного признака через  $Y_i$ , можно записать качественный признак аналогично ряду распределения случайной величины

$$\begin{matrix} X_1 & X_2 & \dots & X_k \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_k \end{matrix} \quad (17.1)$$

Примеры распределения качественных признаков для разных объектов показаны в таблице 17. 1.

Таблица 17.1 – Качественные признаки для разных совокупностей

Наименование совокупностей	Градация	Количество	
		га	%
Семена сосны в партии семян	блестящие	-	75
	тусклые	-	20
	матовые	-	5
	итого	-	100
Змеи (гадюки) в лесах Беларуси	черные	-	85
	серые	-	12
	иные	-	3
	всего	-	100
Распределение сосновых древостоев по группам типов условий произрастания <i>i</i> лесхоза.	боры	43260	65,0
	суборы	20880	31,4
	судубравы	1820	2,7
	дубравы	580	0,9
	итого	66540	100

По терминологии К. Джини качественный признак называют упорядоченным, если его градации образуют естественную последовательность, в противном случае он является неупорядоченным. Упорядоченные признаки разделяют на прямолинейные и циклические. Для прямолинейных признаков естественным образом можно выделить две крайние градации, иначе говоря, упорядочить признак по градациям от меньшего к большему или наоборот. В качестве примера приведем интенсивность окраски семян сосны или гадюк, а также увеличение богатства условий местопроизрастания, что показано в таблице 17.1.

Объекты, обладающие качеством прямолинейного типа, можно ранжировать, т.е. сопоставить каждому из них число натурального ряда. Если два объекта (градации) имеют ранги 2 и 5, значит между ними находится 3 других объекта или градации. Ранжировка исходных данных - широко распространенный прием при обработке не только качественных, но и количественных признаков. Можно ранжировать области Беларуси по проценту лесистости, охотничьи угодья по числу диких животных, предприятия лесного хозяйства по количеству работающих или объему заготавливаемой древесины и т.д.

Ранги бывают несвязными, когда градации объектов позволяют осуществить ранжировку полностью, и связными, когда некоторая часть



объектов занимает “одинаковое место”. Например: 4 объекта можно равноправно разместить после объекта с рангом 2. Тогда им приписывают ранг  $\frac{1}{4} (3+4+5+6) = 4\frac{1}{2}$ .

Для циклических признаков две крайние градации нельзя выделить на объективной основе. Примеры циклических признаков - времена года (весна, лето, осень, зима), ориентировка склонов в горной местности по странам света и т.д. Примеры неупорядоченных качественных признаков - типы леса некоторого региона (по любой из существующих классификаций), методы окулировки при прививках и т.д.

**Основные статистики для качественных признаков.** Для вычисления качественных признаков исходят из условия, что различные градации этих признаков количественно неизмеримы или измеримы, но измерения в силу каких-либо причин проведены не были. Однако для дальнейшего анализа допускаются следующие предположения:

- Имеется возможность установления между градациями некоторой меры различия.
- Различие между соседними градациями одинаково. Такие признаки называют равнопромежуточными.

Если выполняется первое условие, то признак может быть сделан равнопромежуточным введением недостающих, возможно и ненаблюдавшихся, градаций.

Для качественного равнопромежуточного ряда типа (17.1) понятие среднего значения вводится по аналогии с количественными признаками: градации  $X_i$  ставится в соответствие некоторое число  $a$ , а постоянной разности между  $X_i$  и  $X_{i+1}$  - некоторое число  $h$ . Тогда вместо ряда (17.1) имеем

$$\begin{array}{l} a, \quad a+h, \quad \dots, \quad a+kh, \\ y_1, \quad y_2, \quad \dots, \quad y_k, \end{array} \quad (17.2)$$

Исследуя ряд (17.2), можно получить некоторые численные придержки относительно качественного признака  $X$ . Так, среднее арифметическое получим из следующего уравнения (17.3)

$$\tilde{X}_{k \text{ а}} = \frac{\sum_{i=0}^k (a + ih) y_i}{\sum_{i=1}^k y_i} \quad (17.3)$$

Однако формальный перенос операций, введенных для случайных величин, оправдан только в том случае, если вычисленным величинам можно приписать реальный смысл, и они проясняют какие-либо обстоятельства, связанные с решаемой задачей.

Для примера возьмем распределение сосновых древостоев некоторого (i-того) белорусского лесхоза. Общая площадь сосняков в лесхозе 66540 га. По классам бонитета они распределены следующим образом (таблица 17. 2).

Таблица 17.2 – Распределение сосняков по классам бонитета

Класс бонитета	I <sup>a</sup>	I	II	III	IV	V	Va	Итого
Площадь, га	720	2070	41130	17480	2920	1810	410	66540
Площадь, %	1,1	3,1	61,8	26,3	4,4	2,7	0,6	100

Класс бонитета здесь выступает как качественный признак, заменяя показатель условий местопроизрастания. Класс бонитета выражают римскими цифрами а крайние бонитеты имеют индексы «а» и «б». Для того, чтобы найти средний класс бонитета превратим ряд в таблице 17.2 в равнопромежуточный, зашифровав римские цифры арабскими (таблица 17.3).

Таблица 17.3 – Распределение сосняков по классам бонитета при замене римских цифр арабскими в равнопромежуточном ряду

Класс бонитета	1	2	3	4	5	6	7	Итого
Площадь, га	720	2070	41130	17480	2920	1810	410	66540
Площадь, %	1,1	3,1	61,8	26,3	4,4	2,7	0,6	100

По данным таблицы 17. 3 обычным путем вычислим условное значение класса бонитета  $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i}$ . При этом результат должен быть одинаковым, в пределах точности округления если используем показатели площадей в га или процентах. Для сокращения опустим промежуточные величины.

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 1,1 + 2 \cdot 3,1 + 3 \cdot 61,8 + 4 \cdot 26,3 + 5 \cdot 4,4 + 6 \cdot 2,7 + 7 \cdot 0,6}{100} = 3,40$$

Таблица 17.4 – Распределение площадей и средних запасов (м<sup>3</sup>/га) по классам бонитета для сосновых древостоев

Класс бонитета	I <sup>a</sup>	I	II	III	IV	V	V <sup>a</sup>	Итого
Шифр класса бонитета	1	2	3	4	5	6	7	-
Площадь, га (II)	720	2070	41130	20400	-	-	2220	66540
Запас м <sup>3</sup> /га (M)	220	180	150	110	-	-	40	-

Приведенный в таблице ряд не является равнопромежуточным, т. к. отсутствуют значения между III и V<sup>a</sup> классами бонитета. Но средний запас здесь легко определяется по формуле

$$M = \frac{\sum M_i}{\sum S_i} = \frac{672220}{41130} \approx 163 \text{ м}^3/\text{га}$$

П.В.Рокицкого и др. (они приведены в списке литературы), на которые мы будем опираться в изложении этих вопросов.

Распространенным методом анализа качественных признаков является метод четырех полей. Учитывая обозначения, показанные на рисунке 17.1 степень сопряженности, существующей между качественными признаками, или альтернативами, определяется по формуле Д. Юла

$$r = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a + c)(b + d)(a + b)(c + d)}} \quad (17.5)$$

В данном случае примеры удобно брать из области генетики. Поэтому проведем анализ качественных признаков на излюбленном объекте генетиков – мушке дрозофиле. От скрещивания серого самца, имевшего длинные крылья, с черной самкой, у которой они были рудиментарными, все потомство оказалось одинаковым. А при скрещивании особей из первого поколения между собой во втором поколении гибридов были получены следующие категории мух (таблица 17.5).

Таблица 17.5 – Распределение признаков в потомстве мушки дрозофилы

Признак	Количество, шт	%
Серые длиннокрылые с зачатками крыльев	20	41,7
Черные длиннокрылые	20	8,3
Черные длиннокрылые с зачатками крыльев	100	41,7
Итого	210	100

Теперь сделаем анализ приведенных качественных признаков для установления между ними корреляционных зависимостей. Решение этой задачи сводится к вычислению коэффициента корреляции по методу четырех полей, т.е. по формуле Юла (17.5). Обозначим через X черную окраску тела, а через Y - зачатки крыльев. Затем разместим данные эксперимента в четырехпольной корреляционной таблице (17.5).

Таблица 17.5 – Распределение расщепленных признаков у потомства дрозофилы

Y \ X	Незачатковые крылья Y <sub>1</sub>	Зачатковые крылья Y <sub>2</sub>	Сумма
Черное тело X <sub>1</sub>	a=100	b=20	a+b=120
Серое тело X <sub>2</sub>	c=20	d=100	c+d=120
Сумма	a+c=120	b+d=120	a+b+c+d=240

Пользуясь этой таблицей, подставляем в формулу Юла нужные данные и находим величину коэффициента корреляции между указанными признаками:

$$r = \frac{100 \cdot 100 - 20 \cdot 20}{\sqrt{120 \cdot 120 \cdot 120 \cdot 120}} = \frac{9600}{14400} = +0,67$$

Оценка достоверности коэффициента корреляции, вычисленного по способу четырех полей, ничем существенно не отличается от обычной оценки значимости этого показателя, которую вычислим по формуле, приведенной ранее (глава 12, раздел 12.2)  $m_r = \frac{1-r}{\sqrt{N}}$ .

Для нашего примера:

$$m_r = \frac{1-0,67}{\sqrt{120}} = \frac{0,33}{10,95} = 0,03$$

Достоверность коэффициента корреляции определяем по t-критерию Стьюдента  $t = \frac{r}{m_r} = \frac{0,67}{0,03} = 22,33$

откуда  $r = \sqrt{\frac{106,7}{240}} = \sqrt{0,45} = +0,67$ . Получается тот же результат, что

и при расчете по формуле Юла.

**Коэффициент ассоциации.** Английский ученый Дж. Юл предложил для оценки “тесноты” сопряженности между двумя парами альтернатив относить значение, стоящее в числителе формулы (17.5), не к корню квадратному из произведений суммарных данных по столбцам и строкам четырехпольной таблицы, а к сумме двух произведений  $ad+bc$ . Сконструированный таким образом показатель (обозначаемый  $K$ ) получил название коэффициента ассоциации Юла. Его формула следующая:

$$K = \frac{ad - bc}{ad + bc} \quad (17.8)$$

Для нашего примера этот показатель

$$K = \frac{100 \cdot 100 - 20 \cdot 20}{100 \cdot 100 + 20 \cdot 20} = +0,92$$

Коэффициент ассоциации всегда больше коэффициента корреляции. Коэффициент ассоциации свидетельствует о наличии параллелизма между числовыми значениями признаков, без учета их вариабельности, а следовательно, и не дает точного представления о существующей между ними связи. В этом и заключается причина того, что коэффициент ассоциации не получил широкого применения в практике.

**Коэффициент контингенции.** Существует еще один оригинальный показатель взаимной сопряженности, называемый коэффициентом контингенции и обозначаемый  $C$ . Он вычисляется по формуле Пирсона (17.9):

$$C = \sqrt{\frac{\Phi^2}{1 + \Phi^2}}, \quad (17.9)$$

где величина  $1 + \Phi^2 = \left( \frac{p_{xy}^2}{p_x} : p_y \right)$ . Здесь  $p_{xy}$  - частоты, заключенные в

клетках корреляционной решетки;  $p_x$  - число случаев в каждом вертикальном, а  $p_y$  - число случаев в каждом горизонтальном ряду корреляционной таблицы.

Покажем вычисление коэффициента контингенции на том же примере расщепления признаков в гибридном потомстве дрозофилы. Ход вычисления представлен в таблице (17.6).

Таблица 17.6 – Вычисление коэффициента контингенции

$X_i$		$Y_i$	Незачатковые крылья, $Y_1$	Зачатковые крылья, $Y_2$	$P_x$	$\sum \left( \frac{P_{xy}^2}{P_x} : P_y \right)$
1	$P_{xy}$	100	20	120	86,67/120=0,722	
	$P_{xy}^2$	10000	400	-		
	$P_{xy}^2 : P_x$	83,33	3,33	86,67		
2	$P_{xy}$	20	100	120	0,722	
	$P_{xy}^2$	400	10000	-		
	$P_{xy}^2 : P_x$	3,33	83,33	86,67		
		$P_y$	120	120	240	1,444

Из этой таблицы следует, что  $1+\Phi^2=1,444$ , откуда  $\Phi^2=0,444$ . Подставляя найденные значения в формулу (17.9), получим:

$$C = \sqrt{\frac{0,444}{1,444}} = \sqrt{0,307} = +0,55$$

Коэффициент контингенции меньше коэффициента корреляции, и по разности этих показателей можно судить о прямолинейной или криволинейной зависимости между признаками.

Преимущество коэффициента контингенции перед коэффициентом ассоциации заключается в том, что он позволяет измерять сопряженность не только между двумя, но и большим числом коррелируемых признаков.

В исследованиях по лесному хозяйству для определения тесноты связи между качественными признаками применяют методы, основанные на корреляции рангов. Такую корреляцию с вычислением критерия Спирмена мы описали в главе 12, когда исследовали корреляцию между количественными признаками (x) и (y). Этот коэффициент можно использовать и для оценки ранговой корреляции качественных признаков.

Для установления корреляции качественных признаков существует также ранговый коэффициент корреляции Кенделла. Ранговые коэффициенты корреляции, описывающие качественные признаки, изменяются как и обычные коэффициенты корреляции от -1 до +1 в том же значении, т. е. как показатели прямой и обратной связи. Они меняют знак на обратный, если одну из последовательностей рангов заменить на сопряженную, т.е. на место первого элемента поставить последний, за ним предпоследний и т.д.

Коэффициент ранговой корреляции Кендела определяется по формуле

$$\tau = \frac{2 \sum x_j n \cdot y_i n}{N(N-1)} \quad (17.10)$$

При замене  $\sum x_j n \cdot y_i n$  на  $S$  получим  $r = \frac{2S}{N(N-1)}$  (17.10a)

Формулы (17.10) и (17.10a) применяются в последовательности  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Каждой паре рангов  $(x_i - x_j, y_i - y_j)$  ставят в соответствие функцию. Последняя соответственно равна следующим величинам

$$x_{in} \quad \begin{cases} +1 \text{ при } x_i, y_i < x_j, y_j \\ \text{или} \\ 0 \text{ при } x_i, y_i = x_j, y_j \\ y_{in} \quad \begin{cases} -1 \text{ при } x_i > x_j, y_j \end{cases} \end{cases}$$

Вычисления, как правило, выполняют на компьютере по специальной программе, входящей в сертифицированное матобеспечение.

Для относительно простых случаев, т.е. при небольшой величине  $N$ , можно провести ручной счет, воспользовавшись формулой

$$\tau = \frac{4P}{N(N-1)} - 1 \quad (17.11)$$

где  $P$  – количество пар, образующих прямую последовательность, имеют прямой порядок ( $j < i$ ).

Основная ошибка  $\tau$  определяется по формуле

$$m_\tau = \sqrt{\frac{2(2N+5)}{9N(N-1)}} \quad (17.12)$$

В качестве примера рассмотрим есть ли связь между светолюбием древесной породы и ее продуктивностью. Возьмем 6 древесных пород, растущих в одинаковых условиях произрастания –  $D_2$ , т.е. в кисличном типе леса. Первый ряд ( $x_i$ ) характеризует ранжирование по светолюбию, второй – по продуктивности (запас на 1 га).

Породы	С	Е	Л	Д	Б	Ос
$x_i$	2	6	1	4	3	5
$y_j$	3	2	1	5	6	4

Перепишем теперь ряд  $x$  в порядке возрастания рангов.

Породы	Л	С	Б	Д	Ос	Е
$x_i$	1	2	3	4	5	6
$y_j$	1	3	6	5	4	2

Теперь подсчитаем, сколько пар в ряду  $y$  образуют прямой порядок. Для  $L$  таких пар 5 (С, Б, Д, Ос, Е), для породы  $C$  таких пар 3 (Б, Д, Ос). соответственно для  $B$  – 0,  $D$  – 0,  $Oc$  – 0,  $E$  – 0.

Тогда  $P = 5 + 3 + 0 + 0 + 0 + 0 = 8$ .

По формуле 17.11 определим  $\tau$  и его основную ошибку (17.12)



$$\tau = \frac{4 \cdot 8}{6(6-1)} - 1 = \frac{32}{30} - 1 = 1,07 - 1 = 0,07$$

$$m_{\tau} = \sqrt{\frac{2(2 \cdot 6 + 5)}{9 \cdot 6(6-1)}} = \sqrt{\frac{34}{270}} = \sqrt{0,015} = \pm 0,12.$$

Отношение  $\tau$  к его основной ошибке равно  $t = \frac{0,07}{0,12} = 0,58$ . Так как  $m_i < 3$  и даже  $< 2$ , то искомая зависимость недостоверна. Достоверность коэффициента ранговой корреляции Кендела  $t$  можно установить и по таблице критических значений  $t$ -критерия Стьюдента, приведенной в приложении Е.

### 17.3 Метод индексов

Наряду с методом корреляции и регрессионным анализом в практической работе лесоводов применяется метод индексов. Сущность его заключается в том, что величина одного признака, обычно меньшая, выражается в долях единицы или в процентах от величины другого признака:

$$I = \frac{Y}{X} \cdot 100\%, \quad (17.13)$$

где  $I$  - индекс, выраженный в процентах;

$Y$  и  $X$  - величины соответствующих признаков.

Метод индексов давно нашел широкое применение в области морфологии. Например, им пользуются, при оценке телосложения животных и человека. Достоинство этого метода заключается в его простоте и общедоступности, а также и в том, что он позволяет более полно, чем отдельно взятые измерения, характеризовать особенности телосложения и их динамику в онтогенезе. Поэтому наибольшее количество примеров описано именно биологами. Приведем те из них, которые описал Г.Ф. Лакин. Сделаем анализ двигательной активности мышей разных видов (таблица 17.7).

Таблица 17.7 – Анализ двигательной активности мышей разных видов

Виды грызунов	Вес тела, г	Вес мозга, мг	Весовой индекс мозга	Двигательная активность животных
Мышь желтогорлая	24,2	726,0	21,8	Очень быстрый зверек, совершает дальние экскурсии
Мышь полевая	23,5	569,9	13,6	Менее подвижная, чем мышь желтогорлая
Полевка рыжая	21,3	541,3	13,8	Подвижная, но слабо связана с норой
Полевка серая	23,8	462,0	8,9	Больше держится около норы, слабо подвижная

Усиление двигательной активности животных приводит, очевидно, к относительно более быстрому увеличению веса мозга по сравнению с весом тела. Поэтому у зверьков, ведущих более активный образ жизни, обнаруживаются и более высокие весовые показатели мозга.

Чтобы установить филогенетическое положение вида, характеризовать высоту его прогрессивного развития, М.Ф. Никитенко использовал другой индекс, названный им коэффициентом теленцефализации и представляющий вес переднего мозга, выраженный в процентах к общему весу головного мозга.

В таблице 17.4 показано значение этого индекса у некоторых видов млекопитающих и у человека.

Таблица 17.8 – Значение индекса у некоторых млекопитающих и человека

Виды	Вес, г		Коэффициент теленцефализации, %
	головного мозга	переднего мозга	
Еж	2,85	1,36	47,8
Крот	0,85	0,44	51,2
Кролик	22,05	11,31	51,3
Белка	5,89	3,13	53,3
Бобр	41,40	26,60	64,3
Собака	71,10	48,49	68,2
Волк	218,80	153,20	70,3
Кабан	173,50	123,35	71,1
Дельфин	612,00	464,00	74,6
Макак	93,20	74,83	80,3
Человек	1482,70	1260,3 - 1289,9	85,0 - 87,0

Видно, что по мере движения вверх по лестнице эволюции индекс постепенно увеличивается: у насекомоядных он равен 47%, а у приматов достигает 80%, т.е. обнаруживает определенную закономерность в филогенетическом ряду животных.

Чтобы составить представление о возрастных изменениях пропорций тела у павианов-гамадрилов и макаков-резус в первые девять лет их жизни, были использованы коэффициенты роста, т.е. индексы, представляющие отношения между конечными и начальными размерами головы и туловища.

Результаты показаны в таблице 17.9, из которой видно, что индексы линейного роста разных частей тела у гамадрилов и макаков неодинаковы. Это следствие гетеродинамии, т.е. непропорционального увеличения размеров данных признаков в постэмбриональном развитии животных.

Индексы - показатели довольно неустойчивые, так как на их величине сильно сказываются ошибки, допускаемые при измерениях животных. Чтобы устранить этот недостаток, прибегают к предварительной

обработке результатов измерений путем вычисления средних арифметических отдельных измерений или выравниванию динамических рядов, а иногда находят средние арифметические из отдельных индексов.

Таблица 17.9 – Индексы линейного роста разных частей тела у гамадрилов и резусов

Размеры головы и туловища	Гамадрилы		Резусы	
	самцы	самки	самцы	самки
Общая длина головы	2,1	1,9	1,8	1,7
Поперечный диаметр головы	1,8	1,6	1,5	1,5
Передне-задний диаметр головы	1,6	1,5	1,5	1,4
Скуловой диаметр	2,3	1,9	2,0	1,9
Глубина груди	3,3	2,7	2,9	2,6
Ширина груди	3,2	2,6	2,7	2,3
Окружность груди	3,5	2,8	3,0	2,7
Передняя длина туловища	3,1	2,7	3,2	3,1
Ширина таза	3,3	3,1	2,9	2,9

Например, прежде чем выяснить возрастные изменения пропорций тела у самок павианов-гамадрилов, результаты их измерений были подвергнуты предварительной обработке: по каждому промеру вычислялись средние арифметические, которые затем выравнивались по способу скользящей средней. В итоге получились данные, собранные в таблице 17.10.

Таблица 17.10 – Соотношение различных частей тела у гамадрилов

Возраст обезьян (мес.)	Число измерений	Длина корпуса (туловище+голова), см	Длина туловища, см	Окружность груди, см	Живой вес, кг
-	-	1	2	3	4
0-6	11	24,3	16,0	21,9	1,27
6-12	16	31,2	22,5	27,2	2,49
12-18	23	35,3	24,9	30,8	3,54
18-24	21	38,4	26,8	33,0	4,26
24-36	8	42,8	30,8	37,9	5,53
36-60	13	46,7	33,4	43,4	8,09
60 и >	9	50,4	38,0	48,4	12,90

На основании данных таблицы 17.10 вычислены индексы, приведенные в таблице 17.11, которые показывают, каким образом изменяются с возрастом животных соотношения между взятыми признаками.

Таблица 17.11 – Изменение индексов размера тела у гамадрилов с возрастом

Возраст обезьян, мес.	Индексы					
	1	2	3	4	5	6
	1:4	2:4	3:4	1:2	1:3	2:3
0 - 6	19,1	12,3	16,9	1,5	1,1	0,7
6 - 12	12,5	9,0	10,9	1,4	1,2	0,8
12 - 18	10,1	7,1	8,7	1,5	1,1	0,8
18 - 24	8,9	6,2	7,7	1,5	1,2	0,8
24 - 36	7,8	5,6	6,9	1,4	1,1	0,8
36 - 60	5,8	3,8	5,4	1,4	1,1	0,8
60 и >	3,9	3,1	3,9	1,3	1,1	0,8

Если значения индексов нанести на график, как это показано на рисунке 17.2, нетрудно убедиться в довольно строгой зависимости между ними.

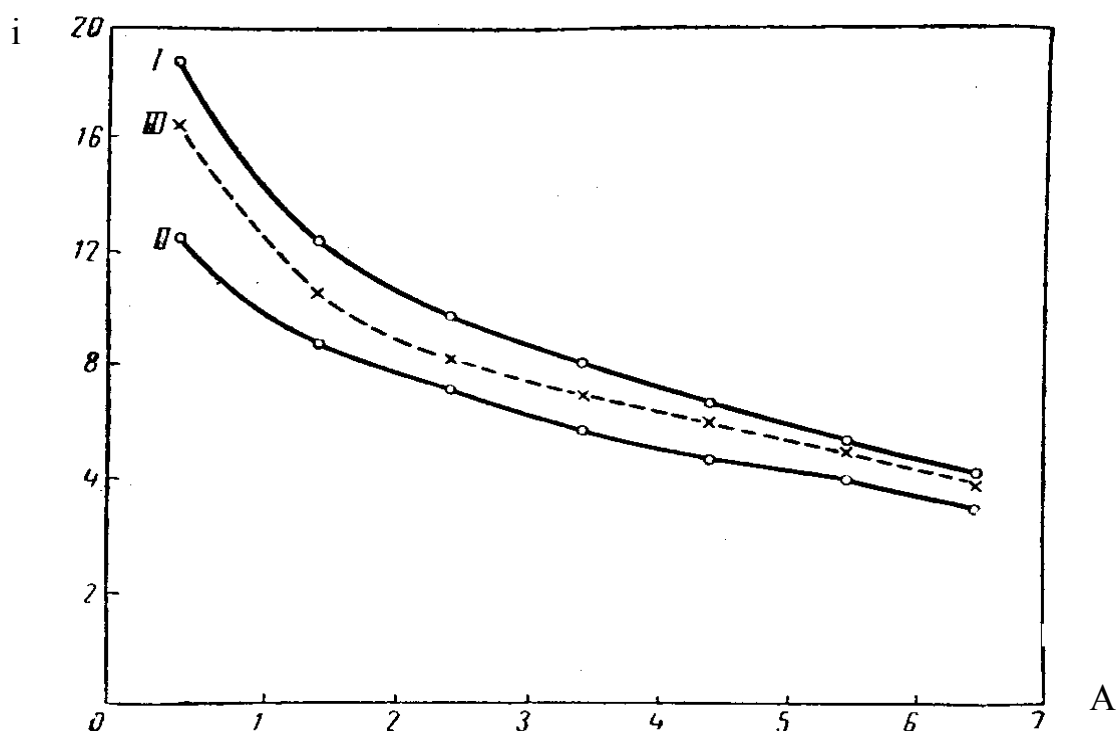


Рисунок 17.2 Возрастные изменения индексов между основными размерами тела и живым весом у самок павианов - гамадрилов: на оси абсцисс - возраст в годах, на оси ординат - значения индексов

Она выражается уравнением общего вида

$$y = \left( \frac{x}{a} - b \right)^2,$$

где  $y$  - живой вес обезьяны в кг;

$x$  - длина туловища в см.;

$a$  и  $b$  - параметры уравнения,  $a = 10$ ,  $b = 0,5$ .

Отсюда определить живой вес ( $y$ ) растущей самки павиана-гамадрила по длине ее туловища ( $x$ ), выраженной в см, можно по следующей формуле:

$$y = \left( \frac{x}{a} - 0,5 \right)^2$$

Индексы могут быть одноименные, когда сопоставляемые признаки выражены в одних и тех же величинах измерения, и разноименные, когда признаки выражаются разными единицами меры, как, например, вес и линейные размеры тела и т.п. Различают также индексы ростовые, объемные, весо-ростовые и другие, а также индексы туловища, головы и т.д.

#### **Недостатки метода индексов**

За более чем столетнюю историю этого метода было предложено немало различных индексов как зоотехниками, так и антропологами. Однако несмотря на простоту, общедоступность и широкую популярность метода, он имеет весьма существенные недостатки. Дело в том, что индексы - величины относительные. Они не учитывают ни вариабельность признаков, ни степень сопряженности между ними, как это свойственно другим биометрическим показателям - коэффициентам регрессии и корреляции. Известно также, что биологические признаки не только варьируют, но обнаруживают неодинаковую скорость развития и роста (гетеродинамия), что не может не отразиться на величине индексов. Постоянство индексов сохраняется только при относительно одинаковых скоростях развития частей тела в онтогенезе, т.е. в случаях гомодинамии, когда отношения средних арифметических сопоставляемых признаков  $X$  и  $Y$  равняются коэффициентам регрессии, т.е. при условии, что

$$\frac{\overline{X}_x}{\overline{X}_y} = R_{x/y} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{X}_y}{\overline{X}_x} = R_{y/x} \quad (17.14)$$

Но такое равенство в соотносительной изменчивости различных частей организма, как правило, не наблюдается. Индексы и коэффициенты регрессии обычно полностью не совпадают друг с другом. Иллюстрацией этого может служить таблица 17.12, в которой приводятся сравнительные данные определения нормального веса человека по длине его тела на основании использования индекса Брока.

Таблица 17.11 – Сравнительные данные определения нормального веса человека по длине его тела

Длина тела, см	Вес тела, кг		
	по индексу Брока	по уравнению регрессии	
		мужчины	женщины
150	50	54	51,5
155	55	57	55,0
160	60	60	58,5
165	65	63,5	62,0
170	70	66,5	65,5
175	75	70	69,0
180	80	73	72,5
185	85	76	76,0

Из таблицы 17.8 видно, что оценка веса тела по его длине на основании индекса Брока лишь приблизительно совпадает с величинами, вычисленными по уравнению регрессии, да и то лишь при среднем росте человека 160 - 165 см.

Антропологи считают, что метод индексов совершенно непригоден для оценки физического развития организма и должен быть оставлен как пройденный этап в развитии науки. В то же время зоотехники и многие врачи продолжают пользоваться индексами в своей работе, применяя их там, где можно ограничиться приближенными данными и где не требуется достаточно точных показателей физического развития организма. В настоящее время этот недостаток в науке прошлого века полностью преодолен; стали применяться и более совершенные методы исследования биологических явлений, и это тоже вполне закономерное явление. Несомненно, что наиболее точные методы для оценки физического развития человека и животных - это методы регрессии и корреляции. Только благодаря этим методам оценка физического развития человека была поставлена на строго научную основу - она производится в настоящее время с помощью номограмм по трем шкалам измерений - длине тела, обхвату груди и живому весу человека.

Однако, по-видимому, всякий метод имеет присущие ему положительные черты и недостатки, и различные по своей конструкции биометрические показатели не исключают, а дополняют друг друга. Поэтому в практической деятельности лесоводу приходится выбирать то одни, то другие методы, сообразуясь с целым рядом обстоятельств, от которых зависит этот выбор. Все дело в том, чтобы понимать конструкцию данного показателя, видеть его положительные стороны и недостатки. В умелых руках метод индексов может оказать лесоведам неплохую услугу. Индексы в равной мере характеризуют и прямолинейные, и криволинейные и какие угодно соотношения, существующие между биологическими признаками, чего нельзя сказать о других показателях связи.

Поэтому там, где этот метод приложим и дает удовлетворительные результаты, его можно использовать хотя бы как вспомогательное средство в комплексной оценке различных признаков в биологии, сельском и лесном хозяйстве.

#### **17.4. Применение статистических методов исследования качественных признаков в лесном хозяйстве**

Методы исследования качественных признаков в лесном хозяйстве применяются достаточно широко, хотя по объему использования эти способы уступают количественному анализу явлений. Применение методов исследования качественных признаков значительно расширилось за последние 10-15 лет. Лесоводы, как и ученые других специальностей, изучают лесных зверей и птиц, где необходимо выделять ряд качественных признаков. Качественные признаки применяют для оценки доброкачественности лесных семян, спелости лесных ягод и т.д. Здесь можно назвать работы А.З. Швиденко, В.Б. Гедых, Г.Г. Гончаренко, В.Е. Падутова и других. Для изучения лесных зверей и птиц, где необходимо выделить ряд качественных признаков (окрас, наличие или отсутствие рогов и т.д.), для анализа лесных семян (цвет, блеск и др.), формы листьев (округлые, эллипсовидные и пр.) используют различные качественные показатели: ранговой корреляции Кендалла, метод индексов и т.д. Находят применение и другие статистические методы оценки качественных признаков.

Особое место в исследованиях по лесному хозяйству занимает метод индексов. Его широко применяют лесоводы в своей практике, находя его весьма удобным и часто незаменимым. Наибольшее применение метод индексов находит при сопоставлении величин, имеющих разные единицы измерения. Так, если требуется учесть биомассу живого напочвенного покрова, скажем черники в совокупности, с запасом древостоя, для вычисления показателей комплексной продуктивности разных типов леса в переводе на 1 га, то метод индексов нас устроит.

Когда О.В. Лапицкой необходимо было определить возраст эколого-экономической спелости древостоев наших лесов, то потребовалось совместить экономические показатели, которые выражались величиной наивысшей рентабельности в некотором возрасте, и экологические, выразившиеся в тоннах связанного  $\text{CO}_2$  на 1 га. Найти возраст оптимального сочетания этих показателей, оцениваемых по разным критериям, оказалось возможным, применив метод индексов. Возраст древостоев, в котором сумма индексов выражающих экономические и экологические показатели, была максимальной, характеризовал эколого-экономическую спелость.

Метод индексов широко используется в лесной таксации. Так В.В. Загребев (1932-1993) разработал специальный метод исследования динамики древостоев и составления таблиц хода роста с помощью метода индексов.

Он установил, что среди большого числа кривых хода роста нормальных насаждений по любому таксационному показателю существует много сходных. На основании анализа свыше 400 таблиц хода роста нормальных насаждений различных природных районов СССР и ряда зарубежных стран этот автор выявил возможность систематизации, классификации и стандартизации таких таблиц. Для сосняков им разработаны таблицы типов роста насаждений, представляющие собой усредненные и систематизированные с определенной градацией относительные (индексные) ряды хода по отдельным таксационным показателям. Например, для характеристики с точностью  $\pm 3\%$  большого количества существующих таблиц хода роста сосновых насаждений имеющих большое многообразие линий хода роста в высоту, оказалось достаточным иметь одну таблицу, включающую лишь 13 типовых рядов. Такие индексные таблицы (графики) служат для сравнительной качественной оценки и группировки таблиц по степени сходства и различия в характере (типе кривых) хода роста. На рисунке 17.3 для примера приведен график типовых линий хода роста сосновых насаждений по сумме площадей сечений.

Типовые графики и таблицы имеют общее значение, так как заменяют все встречающиеся в природе линии хода роста насаждений по отдельным таксационным показателям. Типизация хода роста насаждений позволяет привести все таблицы хода роста нормальных насаждений в строгую систему, устранить существующую путаницу в их практическом применении, оценить существующие таблицы хода роста; выявить общие закономерности и географические различия и особенности роста насаждений.

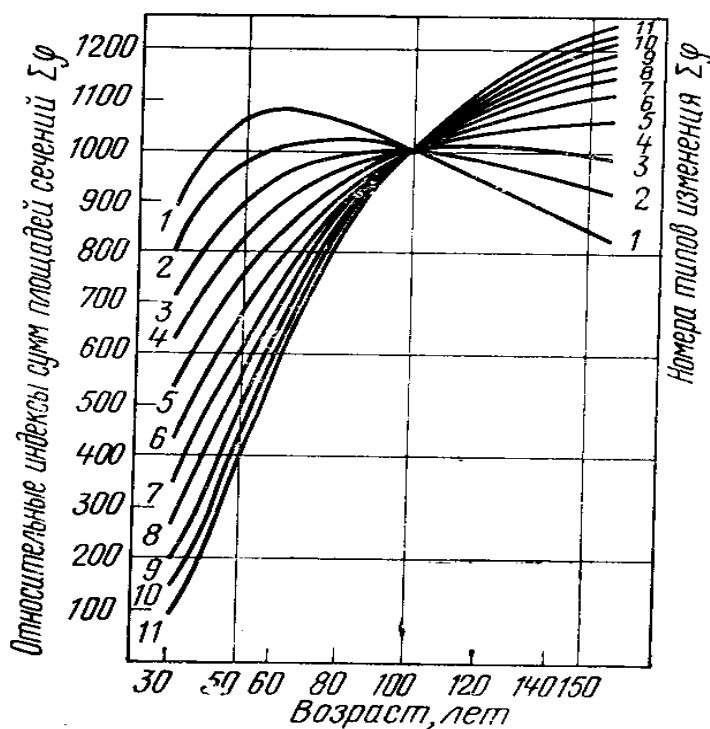


Рисунок 17.3 Типовые линии изменения индексов сумм площадей сечений



Но метод индексов имеет и недостатки, которые проявились и в данном случае. Типовые линии В.В. Загреева имеют достоверность 0,68, т. е. в 32% случаев точность типовых линий выходит за установленные пределы. Потому типовые линии правомерно применить лишь для большого количества объектов, не менее крупного региона.

В то же время метод индексов требует очень тщательного и высокопрофессионального предварительного анализа изучаемого явления. Без соблюдения этого условия, как и в случаях, описанных выше, он приводит к ложным выводам. Примером некорректного использования метода индексов могут служить исследования, проведенные в 70-е годы прошлого века В.И. Зерновым по изучению влияния широкомасштабной гидротехнической мелиорации сельхозземель на прирост прилегающих лесных массивов. Этот случай описан в литературе В.Ф. Багинским. В.И. Зернов использовал относительный (индексный) показатель  $K_i = \frac{Z_a}{M_a}$ , где  $Z_a$  - текущий прирост

в  $m^3$  в возрасте  $a$ ;  $M_a$  - запас в этом же возрасте. Но в силу того, что примененные индексы  $K_i$  имеют сходимость рядов, то спустя 10-20 лет после наблюдения различия искусственно нивелируются, хотя на самом деле существенная разница сохранялась. Полученная величина оказалась непригодной для анализа указанного явления, т.к. искажала его суть и привела к ложным выводам. В результате неверного методического подхода к использованию метода индексов 10-летняя работа целой лаборатории БелНИИЛ-Ха оказалась выполненной впустую. Предотвратить негативные последствия этих ложных выводов стало возможным лишь благодаря корректному анализу названной работы при ее последующем рецензировании и проверке до практического использования.

Из приведенных примеров следует вывод, который проходит красной нитью через все изучение биометрии: прежде чем приступить к манипулированию цифрами, надо изучить суть явления и понять его основные законы и закономерности на общем (профессиональном) уровне. Для этого нужен предварительный анализ, а уж затем корректно следует смоделировать явление или процесс с помощью приемов биометрии.

## 18. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

- 18.1. Понятие о дисперсионном анализе
- 18.2. Однофакторный дисперсионный анализ
- 18.3. Двухфакторный дисперсионный анализ
- 18.4. Многофакторный дисперсионный анализ. Использование дисперсионного анализа в лесном хозяйстве

### 18.1 Понятие о дисперсионном анализе

При проведении исследований часто надо определить, насколько существенно влияние одного или нескольких факторов на конечный результат. Не всегда здесь можно применить регрессионный анализ с получением разного вида моделей. Наиболее часто такие проблемы возникают в генетике, лесной селекции, лесовосстановлении, лесной энтомологии и в других областях лесной науки. В этом случае необходимо проводить статистический анализ результатов наблюдений, зависящих от разных одновременно действующих факторов, делать выбор этих факторов и оценку “силы” их влияния.

Основой решения перечисленных вопросов является изучение стабильности и однородности дисперсий изучаемого признака и разложение ее на составляющие, порожденные действием рассматриваемых факторов. Некоторые из факторов, меняющиеся в эксперименте или наблюдении (например, порода деревьев, тип леса, цвет желудей и пр.), могут быть качественными, другие количественными. Количественными величинами обычно выражают параметры деревьев и древостоев: высота, диаметр, запас древостоя и т. д. В то же время некоторые из этих показателей могут выражаться и качественными признаками, например деревья крупные, мелкие или деревья первой, второй, третьей величины и т. д.

В зависимости от соотношения между количественными и качественными факторами применяют один из трех достаточно близких по идеям и математическому аппарату методов анализа: регрессионный, дисперсионный и ковариационный. В регрессионном анализе подход количественный, в дисперсионном все факторы рассматривают как качественные; в ковариационном анализе часть факторов изучают как количественные, другую часть - как качественные.

Сказанное не означает, что в дисперсионном анализе факторами не могут быть количественные переменные - применение дисперсионного анализа к количественным факторам при обработке лесоводственной информации встречается повседневно. Однако заключение о влиянии факторов делают на качественной основе: проверяют гипотезу о влиянии данного фактора при выбранном уровне значимости. Если изучают влияние одного меняющегося фактора, то дисперсионный анализ называют однофакторным, двух – соответственно двухфакторным и т.д.

Для характеристики основных типов моделей, встречающихся в дисперсионном анализе, рассмотрим два реальных примера.

В первом примере допустим, что в вегетационных опытах испытывали влияние двух уровней радиоактивного загрязнения почвы цезием-137 на рост и развитие сеянцев сосны, ели, дуба и березы. Методами дисперсионного анализа требуется оценить, влияет ли порода и уровень загрязнения цезием-137 на интенсивность роста.

Во втором случае из совокупности спелых сосновых одновозрастных древостоев Гомельской области отобрано случайным образом 50 насаждений, для которых определены средняя высота и средний коэффициент формы  $q_2$ . Требуется установить, влияет ли средняя высота древостоя на величину  $q_2$ .

При схожести в общей постановке вопроса ситуация в примерах существенно различается. В первом примере факторы представляют собой фиксированные, постоянные величины. Исходные данные для анализа можно здесь рассматривать как выборку из бесчисленного множества опытов над конкретной породой с данными плотностями радиоактивного загрязнения. Во втором - изучаемый фактор (средняя высота) сам является случайной величиной, а выбранные для исследования насаждения могут рассматриваться как случайная выборка из всех сосновых древостоев не только данной области, но и всей Беларуси.

Аналогично приведенным примерам возможны три основные модели дисперсионного анализа: с фиксированными (постоянными) факторами, со случайными и со смешанными, т.е. когда часть факторов постоянна, а другая - случайная. Общая теория разработана для модели, названной первой. Для двух остальных в сложных задачах не всегда можно найти приемлемую теоретическую схему. Правда, в большинстве практических случаев для всех трех моделей можно применять одинаковые вычислительные схемы и оценки. К тому же во многих задачах, возникающих в лесном хозяйстве, можно ограничиться первой моделью. Пример по оценке влияния высоты на  $q_2$  целесообразно использовать в модели с постоянными факторами: сначала зафиксировать некоторые значения (уровни) высот, а затем по ним выбирать насаждения.

**Сущность дисперсионного анализа.** Дисперсионный, или вариаансный, анализ (analysis of variance) представляет собой в настоящее время самостоятельную и очень важную главу биологической статистики. Сущность его заключается в установлении роли отдельных факторов в изменчивости того или иного признака.

Дело в том, что влияние тех или других факторов на изучаемый признак (или признаки) никогда не может быть выделено в чистом виде. Хотя при проведении опытов и стараются сохранить условия максимально однородными, все же различные опыты дают несколько неодинаковые результаты. Объясняется это тем, что на них влияют многочисленные случайные обстоятельства, и другие факторы, меняющиеся от опыта к опыту и не поддающиеся контролю. Тем более велика роль таких дополнительных неконтролируемых факторов при проведении анализа не в экспериментальных условиях, а при изменениях непосредственно в лесу.

Поэтому возникает задача разложения общей изменчивости признака на составные части: с одной стороны, определяемые изучаемыми конкретными факторами, а с другой — вызываемые случайными, неконтролируемыми причинами. Дисперсионный анализ позволяет оценивать значимость влияния отдельных факторов, а также их относительную роль в общей изменчивости.

Методы дисперсионного анализа были разработаны английским математиком и биологом Р.Фишером и применялись первоначально главным образом для анализа результатов опытов в растениеводстве и в животноводстве. Для различных схем опытов были разработаны соответствующие схемы дисперсионного анализа. Однако в дальнейшем выявилась полная возможность использования дисперсионного анализа как при изучении биологического материала, взятого из природы, так и любых экспериментальных данных, в том числе и в лесном хозяйстве. Поэтому описание дисперсионного анализа приводится во всех учебниках по биометрии. Наиболее полными здесь являются работы К.Е. Никитина и А.З. Швиденко, П.Ф. Рокицкого, Н.Н. Свалова, на которые мы будем опираться в изложении настоящей главы.

**Общие предпосылки.** Представим себе, что мы анализируем отклонение некоторой случайной величины (или нескольких случайных величин) от средней арифметической. Исследуемым объектом пусть будет популяция деревьев сосны. При этом считаем, что отклонение от среднего значения ( $\bar{X}$ ) в некоторой степени связано с действием на данную величину какого-то определенного фактора, например географического, т.е. его влияние может быть выражено в принадлежности к некоторому типу роста. Тогда

$$x - \bar{X} = A + C \quad (18.1)$$

где  $\bar{X}$  — средняя арифметическая популяции;

$x$  — конкретное значение переменной (варианта);

$A$  — доля отклонения переменной, связанная с влиянием данного конкретного фактора;

$C$  — остаточная часть отклонения, не объяснимая влиянием данного фактора. Это смесь всех неконтролируемых и неопределенных факторов, иначе говоря, результат случайных отклонений.

Очень важно, что в фактическом отклонении варианты (переменной) от средней фигурируют 2 компонента:

а) та часть отклонения, которая зависит именно от данного фактора, т. е. по нашей символике -  $A$

б) остаточная часть, не зависящая от данного фактора -  $C$

В таком случае можно сравнить значения  $A$  и  $C$ .

При достоверном влиянии изучаемого фактора значение  $A$  будет в достаточной степени превышать значение  $C$ . По степени превышения  $A$  над  $C$  можно судить о том, насколько достоверно влияние фактора,  $A$ .

Приведенную общую схему, относящуюся к отдельному отклонению, можно перенести на вариацию многих вариантов, т. е. выразить степень вариации дисперсий через величину

$$\sigma_0^2 = \sigma_A^2 + \sigma_C^2 \quad (18.2)$$

т. е. общая дисперсия равна сумме 2 дисперсий, а именно определяемой вариацией фактора А, и дисперсии, определяемой другими, неконтролируемыми (случайными) причинами – С.

Более сложный случай — отклонение переменной  $x$  от средней арифметической популяции  $\bar{X}$  под влиянием 2 причин: влияния факторов А и В. Например, фактором А для наших деревьев сосны может быть географический район, т. е. влияние местности, а фактором В — класс роста.

Тогда

$$x - \bar{X} = A + B + AB + C \quad (18.3)$$

Здесь А — доля отклонения, связанная с влиянием фактора А;

В — доля отклонения, связанная с влиянием фактора В;

АВ — доля отклонения, связанная с влиянием не отдельных факторов А и В, а их взаимодействия;

С—остаточная, случайная часть отклонения.

В значениях дисперсий общая дисперсия  $\sigma_0^2$  может быть представлена как

$$\sigma_0^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2 + \sigma_C^2 \quad (18.4)$$

При большом числе факторов схему можно усложнять и дальше. Так, при 3 факторах

$$x - \bar{X} = A + B + C + AB + BC + AC + ABC + C \quad (18.5)$$

А, В, С—главные факторы;

АВ, ВС и АС — взаимодействие первого порядка;

АВС—взаимодействие второго порядка.

Аналогично можно выразить изменчивость вариант в дисперсиях ( $\sigma^2$ ) и среднеквадратических отклонениях -  $\sigma$ .

Нетрудно заметить, что сказанное выше непосредственно связано с тем, что изложено в разделе, когда описывали дисперсии.

**Градации факторов и их характер.** Обычно каждый изучаемый в эксперименте фактор А имеет не одно, а несколько значений, которые называют градациями или уровнями фактора А. В пределах же каждого уровня отдельные переменные (варианты) принимают разные значения, т.е. наблюдается случайная вариация. То же относится и к более сложным случаям, когда в общей изменчивости участвует несколько факторов, каждый из которых может иметь свои уровни. Проводя дисперсионный анализ влияния различ-

ных факторов, следует иметь в виду различный характер уровней факторов. В одних случаях эти уровни фактически точно установлены. Например, изучая влияние сезонов года, выделяют зиму, весну, лето, осень. Внешние условия этих сезонов года строго фиксированы.

С другой стороны, могут быть такие факторы, уровни которых не являются точно фиксированными или которые имеют вообще все возможные случайные градации. Так, например, среди факторов, влияющих на плодородие дубовых деревьев является возраст насаждения, его полнота, условия погоды (особенно поздние весенние заморозки) и многое другое. Но каждому из этих признаков свойственна своя вариация и достаточно большая. Такие факторы называют случайными, понимая под этим только то, что случайными могут быть разные их уровни. Впрочем, надо иметь в виду, что случайные уровни некоторых из них тоже можно сделать фиксированными.

Отсюда следует, что возможны очень разные схемы или модели дисперсионного анализа. Они могут различаться по числу анализируемых факторов (одно-, двух-, трехфакторные и т. д.), по характеру градаций внутри факторов: с фиксированными факторами, со случайными или смешанные схемы.

Есть так называемые иерархические модели, которые широко используются в лесоводстве. В этом случае уровни одного фактора не располагаются случайно среди уровней других факторов, но связаны с ними иерархически. Так, в лесоводстве, изучая леса, мы выделяем роды, виды, подвиды древесных растений. Но в пределах некоторых географических районов деревья даже одного вида могут иметь разный рост в зависимости от количества тепла, осадков и преобладающих почв. Подробные схемы будут рассмотрены ниже.

При наличии единых общих принципов конкретные методы дисперсионного анализа будут зависеть от того, с какой схемой расположения материала приходится иметь дело.

Таким образом, весь изучаемый материал может быть разбит на ряд групп, различающихся как по отдельным факторам, так и по их градациям. Изучение методами дисперсионного анализа вариации внутри этих групп, между группами и, наконец, вариации всего материала в целом дает возможность установить, влияют ли данные факторы на изменчивость или нет и какие из них имеют больший удельный вес в общей изменчивости.

**Нулевая гипотеза.** Как и в других случаях статистического анализа, при дисперсионном анализе следует исходить из первоначально принимаемой нулевой гипотезы, а именно: что данный фактор А (или В, или С и т.д.) не влияет. Если правильна нулевая гипотеза,  $\sigma_A^2$  должна быть равна нулю (то же относится к  $\sigma_B^2$ ,  $\sigma_C^2$  и т.д.), т. е. вся вариация сводится только к случайной.

Для того чтобы отбросить нулевую гипотезу, нужно доказать, что  $\sigma_A^2$  достоверно (т. е. с вероятностью не меньшей чем 0,95, или с уровнем значимости 0,05) отличается от нуля. Достоверность значения  $\sigma_A^2$  может быть

установлена, как это обычно делают по отношению к любому статистическому показателю, т. е. путем деления его на его ошибку, т. е.  $\sigma_A = \frac{A}{m_A}$ , где

$\sigma_A$  показывает уровень достоверности.

**Простейшая схема варьирования при различии по одному фактору.**

Для того чтобы понимать смысл расчетов при дисперсионном анализе, очень важно с самого начала ясно представлять возможную вариацию в тех группах, на которые разбивается фактический материал.

Разберем простейшую схему, когда анализируется влияние только одного фактора, могущего принимать разные градации, или количественные уровни:

$$1, 2, \dots, i, \dots, a \quad (18.6)$$

Отдельные наблюдения (варианты) разбиваются на группы согласно этим градациям фактора, изучаемого в опыте или при наблюдениях в природе. Важно, что изучаемый фактор только один, например: вид удобрения, вносимого в питомнике, или принадлежность к разным древесным видам, или влияние радиоактивного загрязнения, или роль способов обработки почвы и т. д. При наличии двух или нескольких факторов потребуются более сложные схемы.

Распределение вариантов при различии по одному фактору представлено в таблице 18.1.

Таблица 18.1 – Схема варьирования при различии групп по одному фактору

Группы по одному фактору	Отдельные варианты (наблюдения) $x_{ij}$							Суммы по группам	Средние по группам $\bar{x}_i$
	1	2	3	..	j	..	n		
1	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$		$x_{1j}$		$x_{1n}$	$\sum x_{1i} = T_1$	$\bar{x}_1$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$		$x_{2j}$		$x_{2n}$	$\sum x_{2i} = T_2$	$\bar{x}_2$
⋮									
⋮									
i	$x_{i1}$	$x_{i2}$	$x_{i3}$		$x_{ij}$		$x_{in}$	$\sum x_{ii} = T_i$	$\bar{x}_i$
⋮									
⋮									
a	$x_{a1}$	$x_{a2}$	$x_{a3}$		$x_{aj}$		$x_{an}$	$\sum x_{ai} = T_a$	$\bar{x}_a$
								$\sum x_{ij} = T$	$\bar{x}$

Число наблюдений (вариант) в каждой группе n, но равное число в группах не обязательно. При неравном числе можно исходить из среднего числа  $n_i$ .

$$N = an (=an_i) \quad (18.7)$$

Обычно разные уровни принято обозначать буквой  $i$ , а отдельные варианты (наблюдения) — буквой  $j$ . Поэтому каждую варианту, независимо от того, где она находится, можно обозначать в общем виде как  $x_{ij}$ . В пределах каждого уровня (группы) отдельные варианты принимают случайные значения:

$$x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}, \dots, x_{i,j}, \dots, x_{i,n}$$

Суммы вариантов по каждой группе (в графе «суммы по группам») обозначены буквами  $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots, T_a$ . В общем виде их можно обозначить  $T_i$ . Общая же сумма всех вариантов  $\sum x_{ij} = T$ . В последней графе даны средние по группам:  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_a$ . В общем виде групповые средние можно обозначить через  $\bar{x}_i$ . Общую же среднюю для всех вариантов всех групп — через  $\bar{x}$ .

**Разное варьирование вариантов и его характеристика.** После введения всех этих обозначений можно приступить к разбору варьирования данных, представленных в таблице 18.1.

Можно выделить 3 типа, или направления, варьирования:

а) общее варьирование всех вариантов ( $x_{ij}$ ), независимо от того, в какой группе они находятся, вокруг общей средней  $\bar{x}$ ;

б) варьирование групповых средних  $\bar{x}_i$ , или, иначе, средних каждого уровня данного изучаемого фактора, вокруг общей средней  $\bar{x}$ ;

в) варьирование вариант  $x_{ij}$  внутри каждой группы вокруг групповой средней  $\bar{x}_i$ .

Для характеристики этих варьирований при проведении дисперсионного анализа используются уже известные из прежних разделов настоящего учебного пособия величины:

а) суммы квадратов отклонений от средней арифметической;

б) средние квадраты отклонений, т.е. суммы квадратов, деленные на количество степеней свободы. Это дисперсии  $\sigma^2$ .

**Суммы квадратов.** Для всех 3 типов варьирования можно вычислить суммы квадратов. Слово «отклонений» для краткости будем отбрасывать. В общем виде они будут следующими:

1. Общая сумма квадратов

$$\sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x})^2 \quad (18.8)$$

Значок  $ij$  около знака суммы обозначает, что суммирование производится по всем вариантам всех групп.

2. Сумма квадратов для групповых средних

$$\sum_i n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \quad (18.9)$$



Чтобы эта величина была того же порядка, что и первая, введен множитель  $n_i$ , т.е. среднее число вариант в каждой группе. Если число вариант во всех группах одинаково, то просто  $n$ .

3. Сумма квадратов отклонений вариант от групповых средних внутри каждой группы, иначе говоря, для случайной вариации внутри групп

$$\sum_i \left[ \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \right] \quad (18.10)$$

Два знака сумм указывают, что суммирование производится дважды: внутри каждой группы, т.е. по отдельным  $j$  (от 1 до  $n$ ), а затем по всем уровням  $i$  — от 1 до  $a$ .

**Степени свободы.** Чтобы вычислить средние квадраты (дисперсии), надо разделить каждую сумму квадратов на соответствующие им числа степеней свободы, которые будут следующими:

для общей дисперсии

$$df = N - 1 \quad (N = an); \quad (18.11)$$

для дисперсии групповых средних

$$df = a - 1; \quad (18.12)$$

для случайной вариации вариант внутри групп

$$df = (n - 1) a = na - a = N - a. \quad (18.13)$$

Нетрудно заметить, что сумма чисел степеней свободы для групповых средних и для вариации внутри групп должна равняться числу степеней свободы для общей дисперсии:

$$(N - a) + (a - 1) = N - 1 \quad (18.14)$$

**Общая схема дисперсионного анализа при одном факторе.** Общая схема дисперсионного анализа приведена в таблице 18.2.

Из таблицы 18.2 видно, что общая вариация разлагается на 2 компонента: один из них — это вариация групповых средних (по градациям фактора  $A$ ) вокруг общей средней  $\bar{x}$ ; другой — вариация отдельных вариант внутри групп. Последнюю вариацию можно рассматривать как случайную в том смысле, что она создается многими неконтролируемыми факторами кроме учитываемого фактора  $A$ . При делении сумм квадратов, обозначаемых  $SS$ , на число степеней свободы получают средние квадраты (дисперсии) —  $ms$ ,

непосредственно измеряющие суммарную вариацию (формула (18.15), и 2 ее компонента (формулы (18.16) и (18.17)).

Таблица 18.2 – Схема дисперсионного анализа (анализа дисперсии) при одном факторе

Источник варьирования	Сумма квадратов ss	Число степеней свободы df	Средний квадрат ms	Номер формулы для ms
Общее (все варианты)	$\sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x})^2$	N-1	$\frac{1}{N-1} \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x})^2$	(18.15)
Групповые средние (фактор A)	$\sum_i n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$	a-1	$\frac{1}{a-1} \sum_i n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$	(18.16)
Варианты внутри групп (случайные отклонения)	$\sum_i \left[ \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \right]$	N-a	$\frac{1}{N-a} \sum_i \left[ \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \right]$	(18.17)

В дальнейшем мы увидим, что весь этот анализ понадобится для того, чтобы сравнить 2 средних квадрата — второй и третий, пользуясь критерием

$$F = \left( \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right) \quad (18.18)$$

**Рабочие формулы для вычисления сумм квадратов.** Вычисление сумм квадратов отклонений непосредственно по исходным данным вполне возможно, но требует много труда. Его редко используют даже при компьютерной обработке. Поэтому лучше воспользоваться рабочими формулами, основанными на одной из формул для суммы квадратов отклонений, а именно той, где сумма квадратов отклонений вычисляется по значениям вариант:

$$\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \quad (18.19)$$

Второй член является как бы поправкой к первому. В литературе он обозначают буквой C, т.е.  $C = (\sum x_i)^2 / n$ .

Если далее использовать приведенные выше обозначения  $\sum x_i$  для каждой группы (уровня фактора A) через  $T_i$  ( $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots, T_a$ ), суммы всех вариант—T, число наблюдений в каждой группе обозначать  $n_i$ , общее число вариант—N, то рабочие формулы будут выглядеть довольно просто:

общая сумма квадратов

$$\sum_{ij} x_{ij}^2 - \frac{T^2}{N} \quad (18.20)$$

сумма квадратов для групповых средних

$$\sum_i \frac{T_i^2}{n_i} - \frac{T^2}{N} \quad (18.21)$$

сумма квадратов для вариантов внутри групп, т.е. для случайных отклонений

$$\sum_{ij} x_{ij}^2 - \sum_i \frac{T_i^2}{n_i} \quad (18.22)$$

Практически совсем не обязательно вычислять все 3 суммы квадратов, достаточно вычислить только 2, например, первую и вторую. Третья может быть получена путем вычитания второй из первой.

При делении сумм квадратов на числа степеней свободы получаются средние квадраты (вариансы). Таким образом, рабочие формулы для них будут следующими:

для общего варьирования

$$ms = \sigma^2 = \frac{1}{N-1} \left( \sum_{ij} x_{ij}^2 - \frac{T^2}{N} \right) \quad (18.23)$$

для групповых средних

$$ms = \sigma^2 = \frac{1}{a-1} \left( \sum_i \frac{T_i^2}{n_i} - \frac{T^2}{N} \right) \quad (18.24)$$

для случайных отклонений

$$ms = \sigma^2 = \frac{1}{N-a} \left( \sum_{ij} x_{ij}^2 - \sum_i \frac{T_i^2}{n_i} \right) \quad (18.25)$$

Ниже на примерах однофакторной и двухфакторной модели рассмотрены основные методы дисперсионного анализа и иллюстрирующие их вычислительные схемы.

## 18.2 Однофакторный дисперсионный анализ

Для понимания сути однофакторного дисперсионного анализа допустим, что изучается зависимость случайной величины ( $x$ ) от меняющегося фактора  $A$ , градации (или уровни) которого обозначены  $A_i$ . Тогда каждое на-

блюдение можно обозначить через  $x_{ij}$ , где  $i$  - уровень фактора  $A$ ,  $j$  - номер наблюдения. Исходные данные удобно представить в виде таблице 18.3.

Таблица 18.3 – Исходные данные для однофакторного дисперсионного анализа

Уровни фактора $A_i$	Результаты измерений	Среднее по факторам
$A_1$	$x_{11} \ x_{12} \ \dots \ x_{1j} \ \dots \ x_{1m1}$	$\tilde{X}_1$
$A_2$	$x_{21} \ x_{22} \ \dots \ x_{2j} \ \dots \ x_{2m1}$	$\tilde{X}_2$
$\dots$	$\dots \dots \dots$	$\dots$
$A_i$	$x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{ij} \ \dots \ x_{im1}$	$\tilde{X}_i$
$\dots$	$\dots \dots \dots$	$\dots$
$A_k$	$x_{k1} \ x_{k2} \ \dots \ x_{kj} \ \dots \ x_{km1}$	$\tilde{X}_k$

В таблице 18.3  $k$  строк (или групп) - по числу уровней фактора  $A$ , в каждой группе  $m_i$  наблюдений (число наблюдений неодинаково); при равном числе наблюдений подход не меняется, но приводимые ниже формулы несколько упрощаются, так как все  $m_i$  равны  $m$ . Для подготовки данных к анализу образуем суммы квадратов, где знаком  $S^2$  обозначены дисперсии:

$$S_0^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} (x_{ij} - \tilde{X})^2$$

- общую сумму квадратов всех наблюдений от

общего среднего  $\tilde{X}$ ;

$$S_M^2 = \sum_{i=1}^k m_i (\tilde{X}_i - \tilde{X})^2$$

- сумму квадратов отклонений групповых

средних  $\tilde{X}_i$  от общего среднего  $\tilde{X}$ , взвешенную через число наблюдений по группам:

$$S_b^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} (x_{ij} - \tilde{X}_i)^2$$

- сумму квадратов отклонений внутри

групп (от групповых средних).

Простые преобразования позволяют разложить первую сумму на две другие, что аналогично (18.2)

$$S_0^2 = S_M^2 + S_b^2 \tag{18.2a}$$

Эта уже известная нам формула (18.2) является основой дисперсионного анализа. Рассмотрим оценки дисперсий, связанных с введенными суммами.

Сумма  $S_0^2$  связана с оценкой общей дисперсии изучаемого признака, если ее разделить на число степеней свободы  $n-1=k \sum_i (m_i - 1)$ . По сумме  $S_M^2$  можно оценить дисперсию между уровнями факторов  $A_i$  - межгрупповую дисперсию. Число степеней свободы  $k-1$ . Наконец,  $S_b^2$  позволяет оценить дисперсию внутри групп (или остаточную). Так как оценка дисперсии каждой из групп связана с  $m_i - 1$  степенью свободы, то общее число степеней свободы  $k \sum (m_i - 1) = N - k$ , где  $N$  — число наблюдений.

Дальнейший анализ зависит от типа рассматриваемой модели. Для модели с фиксированными факторами ответ на основной вопрос дисперсионного анализа сводится к проверке гипотезы  $H_0 : \bar{X}_1 = \bar{X}_2 = \dots = \bar{X}_k$ , т.е. утверждения, что все групповые средние не зависят от влияния фактора  $A$ . Тогда, если верна  $H_0$ , межгрупповая дисперсия (в генеральной совокупности) должна быть равна внутригрупповой, т. е. сформулированная гипотеза может быть заменена эквивалентной  $H_0 : \sigma_M^2 = \sigma_b^2$ . Допустим, что  $x_{ij}$  - независимые наблюдения над случайной величиной  $\bar{X}$ , распределенной нормально со средним  $\bar{X}$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Тогда отношение

$$F(k, n-k) = \frac{s_M^2 / (k - 1)}{s_b^2 / (n - k)} \quad (18.26)$$

используют в качестве статистической характеристики критерия: если вычисленное значение  $F$  меньше табличного при уровне значимости  $\alpha$ , то гипотезу об отсутствии влияния фактора  $A$  не отклоняют. Если же факторы случайны, то проверка гипотезы о равенстве групповых средних представляет небольшой интерес (уровни фактора  $A$  — сами случайные величины) и проверяют гипотезу о том, что межгрупповая дисперсия в генеральной совокупности равна нулю  $H_0 : \sigma_M^2 = 0$ .

В статистической теории показано, что в качестве статистической характеристики критерия можно применять величину (18.26). В дальнейшем мы не будем обсуждать различия между моделями со случайными и фиксированными факторами. Полная схема однофакторного дисперсионного анализа приведена в таблице 18.4.

Таблица 18.4 – Схема однофакторного анализа

Тип дисперсии	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Оценка дисперсии	Гипотеза при факторах		Статистический критерий
				фиксированных	случайных	
Межфакторная (между группами)	k-1	$s_M^2 = \sum_{i=1}^k m_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2$	$\sigma_M^2 / (k-1)$	$\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = \dots = \bar{X}_k$	$\sigma_M^2 = 0$	$\frac{s_M^2 / (k-1)}{s_b^2 / (n-k)}$
Внутрифакторная (внутри групп)	$k \sum (m_i - 1) = n - k$	$s_b^2 = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{X}_i)^2$	$\sigma_b^2 / (n-k)$			
Общая	n-1	$s_o^2 = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{X})^2$				

Влияние фактора А можно оценить иным путем. Тогда корреляционное отношение  $\eta_{yx}^2 = \sigma_M^2 / \sigma_o^2$  и гипотеза о равенстве групповых средних в генеральной совокупности сводится к виду  $H_0 : \eta^2 = 0$  при альтернативной  $H_a : \eta^2 > 0$ . Величина  $\eta^2$  связана с F простым соотношением и подчиняется  $\beta$ -распределению со степенями свободы  $k_1$ . Есть таблицы критических значений корреляционного отношения  $\eta^2$  при  $\alpha = 0,05$  (приложение Т); если фактическое значение  $\eta^2$  больше табличного, то гипотеза о равенстве групповых средних отклоняется. Использование  $\eta^2$  в качестве оценки влияния иногда более удобно, чем (18.26).

Для расчета мощности F-критерия (если  $H_0$  не отклонена) необходимо предположить, что верна альтернативная гипотеза  $H_a : \eta^2 > 0$ . Тогда F-критерий подчиняется нецентральному F-распределению, зависящему от числа степеней свободы  $k_a$  и  $k_b$  и параметра нецентральности

$$\delta^2 = n\eta^2 \quad (18.27)$$

Обычно при расчете мощности, т.е. при работе с нецентральным F-распределением, пользуются графиками, построенными аналогично графику F-распределения. На рисунке 18.1 в качестве примера приведен график мощности F-критерия при  $\alpha = 0,05$  для числа степеней свободы числителя  $k_1 = 7$ ; при  $k_1 = 1$  можно пользоваться графиком мощности одностороннего t-критерия. Для других  $k_1$  графики мощности приведены в специальных изданиях.

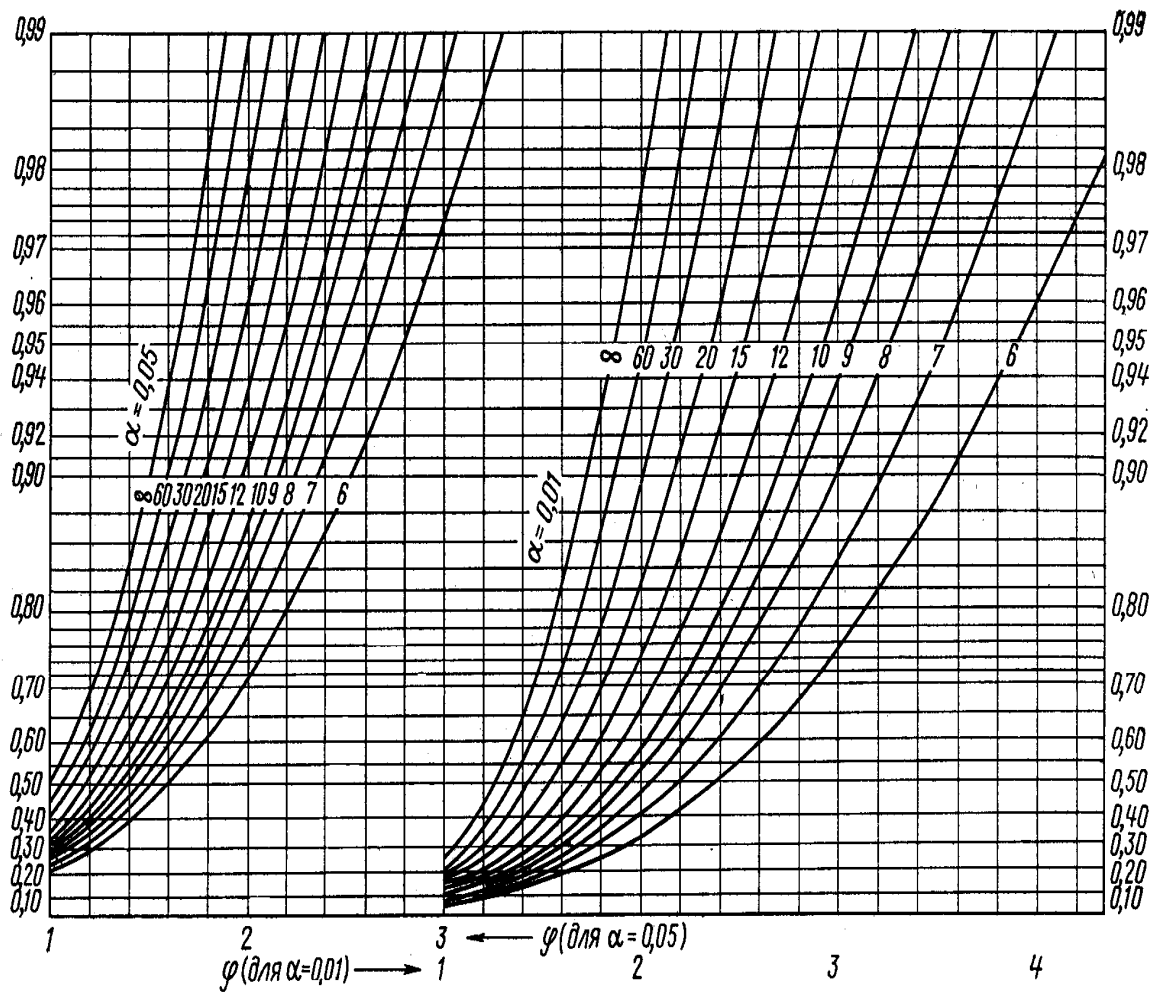


Рисунок 18.1 График функции мощности F-критерия для  $k_1=7$  (по К.Е. Никитину и А.З. Швиденко)

В качестве статистической характеристики  $H_a$  на рисунке 18.1 использована величина

$$\varphi = \sqrt{n\eta_a^2 / k_1} \quad (18.28)$$

где  $\eta_a^2$  — альтернативное корреляционное отношение.

При расчетах мощности F-критерия следует иметь в виду, что альтернативная гипотеза  $H_a : \eta^2 > 0$  сложна и для расчетов необходимо выбрать некоторое конкретное значение  $\eta_a^2$ , при котором теснота связи в генеральной совокупности имеет в рамках решаемой задачи практическое значение, т. е. проверить  $H_0$  против простой  $H_a : \eta^2 = \eta_a^2$ . Техника расчета мощности F-критерия рассматривается в табл. 18.4. Заметим, что при помощи (18.28) определяют  $\eta^2$ , которое может быть еще признано существенным при данных  $k_m, k_b$ , и  $1 - \beta$

$$\eta^2 = \varphi^2 k_a / n, \quad (18.29)$$

а также число наблюдений, обеспечивающее признание существенности наличия связи с данным  $\eta^2$  и при заданных  $\alpha$  и  $\beta$ .

Обычно в дисперсионном анализе реальных задач мало отвергнуть гипотезу  $H_0$ . Если признается, что фактор влияет на изучаемый признак, то для выяснения соотношения между групповыми средними можно применить t-критерий Стьюдента для попарного сравнения  $\bar{x}_i$ .

Определенный интерес представляет метод множественного сравнения, позволяющий оценить сравнения любых сочетаний групповых средних. Допустим, например, что в таблице 18.4 исходные данные представляют результаты измерений для составления некоторых лесотаксационных таблиц и необходимо выбрать целесообразное сочетание уровней  $A_i$ , т.е. решить вопрос о составлении двух отдельных таблиц для  $A_1+A_2$  и  $A_3+\dots+A_k$  или трех таблиц  $A_1+A_2+A_3$ ,  $A_4+A_5+\dots+A_k$  и т.д. Применяют два метода множественного сравнения: S-метод Шеффе и T-метод Тьюки. Рассмотрим применение первого из них (анализ — однофакторный).

Пусть представляет интерес множественное сравнение

$$\varphi = c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 + \dots + c_k \bar{x}_k, \quad \sum c_i = 0 \quad (18.30)$$

для которого несмещенной оценкой служит

$$\hat{\varphi} = c_1 \tilde{X}_1 + c_2 \tilde{X}_2 + \dots + c_k \tilde{X}_k, \quad (18.31)$$

Для статистики  $\hat{\varphi}$  оценку дисперсии вычисляют по формуле

$$\hat{\sigma}_\varphi^2 = \frac{s_b^2}{k \sum (m_i - 1)} \sum_i \frac{c_i^2}{m_i^2} \quad (18.32)$$

$$\hat{\sigma}_\varphi^2 = \frac{s_b^2}{n - k} \sum_i \frac{c_i^2}{m_i^2} \quad (18.33)$$

где  $s_b^2$  — сумма квадратов внутригрупповых отклонений.

Тогда для сравнения  $\varphi$  доверительный интервал при доверительной вероятности  $1 - \alpha$  имеет вид

$$\hat{\varphi} - s \hat{\sigma}_\varphi \leq \varphi \leq \hat{\varphi} + s \hat{\sigma}_\varphi \quad (18.34)$$

где постоянная  $s$  определяется по формуле

$$s^2 = (k-1) F_\alpha(k-1; n-k), \quad (18.35)$$

где  $F_\alpha(k-1; n-k)$  - квантиль F-распределения с числом степеней свободы  $(k-1)$ ,  $(n-k)$ .



В качестве примера проведем дисперсионный анализ для определения влияния средней высоты (H) на видовое число (f). Исходные данные для расчета показаны в таблице 18.5.

Таблица 18.5 – Исходные данные для дисперсионного анализа влияния средней высоты на видовое число

H <sub>i</sub> , м	Видовые числа, f <sub>ij</sub> • 1000	Σf <sub>ij</sub>	n <sub>i</sub>	$\tilde{f}_i$
1	2	3	4	5
22	455, 436, 466, 467, 446, 483	2753	6	458,8
24	467, 446, 502, 448, 429	2292	5	458,4
26	465, 466, 417, 510, 480	2238	5	467,6
28	502, 489, 442, 530, 467, 501	2931	6	488,5
30	452, 467, 456, 433, 467, 456	2731	6	455,2
32	503, 483, 458, 451, 469	2364	5	472,8
34	446, 427, 430	1303	3	434,3
36	468, 434, 407, 370	1679	4	419,8
		Σ18391	Σ40	$\tilde{f}=460$

Здесь изучается влияние средней высоты древостоя на величину среднего видового числа условно одновозрастных спелых ельников. При расчетах на компьютерах суммы  $s_0^2$ ,  $s_M^2$  и  $s_B^2$  удобнее вычислять по формулам

$$s_0^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij}^2 - n\tilde{X}^2 \quad (18.36)$$

$$s_M^2 = \sum_{i=1}^k m_i \tilde{X}_i^2 - n\tilde{X}^2 \quad (18.37)$$

$$s_B^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^k m_i \tilde{X}_i^2, \quad (18.38)$$

а вместо исходных данных использовать их отклонения от некоторого начального значения, например, от общего среднего  $\tilde{X}$ , что упрощает расчеты. Групповые средние приведены в колонке 5. Число групп k=8, общее число наблюдений n = 40. Общее среднее  $\tilde{f}=460$ . Перейдем к отклонениям от среднего (таблица 18.6) и вычислим показатели, необходимые для применения формул (18.36 - 18.38).

Из таблицы 18.5  $s_0^2 = 36195$ ,  $s_M^2 = 14587$ ,  $s_B^2 = 36195 - 14587 = 21608$ . Результаты вычислений запишем в таблицу 18.6, учитывая, что число степе-

ней свободы для групповой дисперсии равно  $k-1=8-1=7$ , для общей  $N-1=40-1=39$ , а для внутригрупповой  $N-k=40-8=32$ .

Таблица 18.6 – Вычисление сумм квадратов в однофакторном дисперсионном анализе

$H_i$ , м	$f_{ij} - \tilde{f} = x_{ij}$	$\sum x_{ij}$	$m_i$	$\tilde{X}_i$	$\sum x_{ij}^2$	$\sum m_i \tilde{X}_i^2$
22	-5, -24, +6, +7, -14, +23	7	6	-1,2	1411	8,6
24	+7, -14, +42, -12, -31	-8	5	-1,6	3114	12,8
26	+5, +6, -43, +50, +20	+38	5	+7,6	4810	288,8
28	+42,+29, -18,+70, +7, +41	+171	6	+28,5	9559	4873,5
30	-8, +7, -4, -4, -27, +7	-29	6	-4,8	923	138,2
32	+43, +23, -2, -9, +9	+64	5	+12,8	2544	819,2
34	-14, -33, -30,	-77	3	-25,7	2185	1981,5
36	+8, -26, -53, -90	-161	4	-40,2	11649	6464,2
		-9	40	-0,23	36195	14587

Таблица 18.7 – Итоги однофакторного дисперсионного анализа

Тип дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Оценка дисперсии
Межгрупповая	14587	7	2084
Внутригрупповая	21608	32	675
Общая	36195	39	928

Статистическая характеристика ( $F_{\text{выч}}$ ), полученная из (18.26), равна  $F_{\text{выч}} = 2084/675 = 3,09$ . При  $\alpha=0,05$  табличное значение  $F$ , взятое из приложения Ж, при  $\nu=7$  и  $N-k=32$  будет равно 2,3. Так как  $F_{\text{выч}} > F_{\text{табл.}}$ , то гипотезу об отсутствии влияния высоты на среднее видовое число древостоя отклоняют: средние  $\tilde{f}$  в генеральной совокупности не все равны между собой, а зависят от значения средней высоты.

Для расчета методом множественного сравнения предположим, что необходимо выяснить, для каких значений высот можно составить единые таблицы, использующие средние видовые числа. Испытаем, например, возможность объединения высот 22, 24, 26 в одну группу, остальных — во вторую. Функция сравнения по (18.30)

$$\hat{\phi} = \frac{1}{3}(458,8+458,4+467,6) - \frac{1}{5}(488,5+455,2+472,8+434,3+419,8) = 7,5$$

а оценка дисперсии по (18.32)

$$\hat{\sigma}_{\phi} = \left\{ 675 \left[ \frac{1}{9} \left( \frac{1}{36} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} \right) + \frac{1}{25} \left( \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{25} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \right) \right] \right\}^{1/2} = 3,85$$

Постоянную  $s$  находим из (18.35)

$s = [(8-1) F_{0,05}(7,32)]^{1/2} = (7 \cdot 2,3)^{1/2} \approx 4$ , т. е. для вероятности 0,95 имеем доверительный интервал  $7,5 - 4 \cdot 3,85 \leq \varphi \leq 7,5 + 4 \cdot 3,85$  или  $-7,9 \leq \varphi \leq 22,9$ .

Так как доверительный интервал содержит ноль, нет оснований объединять материал в указанные группы в зависимости от значения высоты.

В данном примере изменена постановка задачи: вместо однофакторного применен двухфакторный анализ (включен дополнительно средний диаметр), после чего удалось удовлетворительным образом сгруппировать материал. Далее используем корреляционное отношение и расчет мощности критерия. Проверим  $H_0$  несколько иначе. Вычислим корреляционное отношение  $\eta^2$ , равное отношению межгрупповой дисперсии к сумме квадратов (таблица 18.7):  $\hat{\eta}^2 = 14587 / 36195 = 0,403$ . Гипотеза  $H_0: \eta^2 = 0$  равносильна  $H_0: \bar{X}_1 = \bar{X}_2 \dots = \bar{X}_k$ . Проверим  $H_0: \eta^2 = 0$  при альтернативной  $H_a: \eta^2 > 0$ . Из приложения Т находим критические значения  $\eta^2 = 0,387$  при  $k_1 = 7$ ,  $k_2 = 32$ , т.е. гипотезу об отсутствии влияния высоты на видовое число при  $\alpha = 0,05$  отклоняем.

### 18.3 Двухфакторный дисперсионный анализ

Выше уже указывалось, что при участии в общей вариации 2 факторов А и В анализ осложняется наличием взаимодействия между этими факторами. Поэтому общая сумма квадратов при двухфакторной схеме разлагается на 4 компонента: а) вариация под влиянием фактора А; б) вариация под влиянием фактора В; в) вариация под совместным влиянием А и В, т.е. взаимодействия А и В, и г) случайные отклонения.

Кроме того, надо помнить, что при двухфакторной схеме каждый уровень одного фактора должен сочетаться с любым уровнем второго фактора. Так, если изучаются какие-то данные за 3 года о животных из 3 различных местообитаний, то необходимо, чтобы по каждому месту были данные всех трех лет. Если же этого нет, то нужно применять другую схему анализа.

Распределение вариантов при варьировании по 2 факторам показано в таблице 18.8. В графах «вар.» помещены варианты, в графах «пок.» — показатели Т и х.

Символом  $r$  обозначается количество групп (уровней) по фактору А, т.е. количество горизонтальных рядов (1, 2, 3, ...,  $i$ , ...,  $r$ );  $c$  — количество групп (уровней) по фактору В, т.е. количество вертикальных столбцов, или колонок {1, 2, 3, ...,  $j$ , ...,  $c$ };  $n$  — число наблюдений в каждой клетке таблицы. В данном случае  $n$  равно 3, но не обязательно, чтобы оно было одинаковым во всех клетках. Все же для простоты расчетов выгоднее последнее, тогда  $nrb = N$ , т.е. общему числу всех наблюдений.

Так как варьирование групп по фактору А и по фактору В всегда сравнивают со случайными отклонениями вариант в пределах каждой группы как мерилom случайной вариации ( $\sigma_e^2$ ), то последняя должна быть измерена на достаточном материале. Это значит, что в каждой клетке надо иметь не менее 2 наблюдений, а еще лучше, если их будет больше.

Каждая варианта (наблюдение) может быть обозначена в общем виде как  $x_{ijk}$ , т.е. как  $k$ -ое наблюдение в ряду  $i$  и в вертикальном столбце  $j$ . Конкретная же варианта  $x$  имеет 3 значка. Первый обозначает номер группы по фактору А, т.е. номер горизонтальной строчки, второй — номер группы по фактору В, т.е. номер вертикального столбца, третий — номер в данной клетке. В каждой клетке даны сводные показатели: сумма вариант клетки ( $T_{ij}$ ) и средняя арифметическая их ( $\bar{x}_{ij}$ ). Значки при них указывают номера горизонтальной строчки и вертикального столбца. В общем виде показатели для каждой клеточки  $T_{ij}$  и  $\bar{x}_{ij}$ .

Показатели для горизонтальных строчек, то есть для градаций фактора А, даны справа в вертикальных столбцах:  $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots, T_r$  и соответственно  $\bar{x}_{1.}, \bar{x}_{2.}, \dots$  и т.д. В общем виде их будем обозначать  $T_{i.}$  и  $\bar{x}_{i.}$  или просто  $T_i$  и  $\bar{x}_i$ .

Для вертикальных столбцов (градаций по фактору В) показатели представлены в нижней части таблицы 18.8. Это суммы  $T_{.1}, T_{.2}, \dots, T_{.j}, \dots, T_{.c}$  и средние  $\bar{x}_{.1}, \bar{x}_{.2}, \dots, \bar{x}_{.j}, \dots, \bar{x}_{.c}$ . В общем виде они будут обозначаться как  $T_{.j}$  и  $\bar{x}_{.j}$  или просто  $T_j$  и  $\bar{x}_j$ .

Общая сумма всех вариант всех клеточек обозначается  $T$ , а общая средняя арифметическая —  $\bar{x}$ .

**Вычисление сумм квадратов и средних квадратов.** После введения всех этих обозначении можно перейти к построению общих формул сумм квадратов, необходимых для проведения дисперсионного анализа при 2 факторах.

Они будут следующими:

Общая сумма квадратов

$$\sum_{ijk} (x_{ijk} - \bar{x})^2 \quad (18.39)$$

т. е. простая сумма квадратов отклонений всех наблюдении от общей средней арифметической.

Сумма квадратов для варьирования по фактору А

$$nc \sum_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \quad (18.40)$$

т. е. помноженная на  $nc$  сумма квадратов отклонений всех значений  $\bar{x}_i$  от общей средней арифметической.

Таблица 18.8

Схема варьирования при различии групп по 2 факторам

Группы (уровни) по фактору А	Группы (уровни) по фактору В и отдельные наблюдения $x_{ijk}$ внутри них											Сумма по группам фактора А $T_i$	Средние по группам фактора А $\bar{x}_i$	
	1		2		3		...	j		...	c			
	вар.	пок.	вар.	пок.	вар.	пок.	...	вар.	пок.	...	вар.			пок.
1	$x_{111}$ $x_{112}$ $x_{113}$	$T_{11}$ — $x_{11}$	$x_{121}$ $x_{122}$ $x_{123}$	$T_{12}$ — $x_{12}$	$x_{131}$ $x_{132}$ $x_{133}$	$T_{13}$ — $x_{13}$		$x_{1j1}$ $x_{1j2}$ $x_{1j3}$	$T_{1j}$ — $x_{1j}$		$x_{1c1}$ $x_{1c2}$ $x_{1c3}$	$T_{1c}$ — $x_{1c}$	$T_{1.}$	$\bar{x}_{1.}$
2	$x_{211}$ $x_{212}$ $x_{213}$	$T_{21}$ — $x_{21}$	$x_{221}$ $x_{222}$ $x_{223}$	$T_{22}$ — $x_{22}$	$x_{231}$ $x_{232}$ $x_{233}$	$T_{23}$ — $x_{23}$		$x_{2j1}$ $x_{2j2}$ $x_{2j3}$	$T_{2j}$ — $x_{2j}$		$x_{2c1}$ $x_{2c2}$ $x_{2c3}$	$T_{2c}$ — $x_{2c}$	$T_{2.}$	$\bar{x}_{2.}$
3	$x_{311}$ $x_{312}$ $x_{313}$	$T_{31}$ — $x_{31}$	$x_{321}$ $x_{322}$ $x_{323}$	$T_{32}$ — $x_{32}$	$x_{331}$ $x_{332}$ $x_{333}$	$T_{33}$ — $x_{33}$		$x_{3j1}$ $x_{3j2}$ $x_{3j3}$	$T_{3j}$ — $x_{3j}$		$x_{3c1}$ $x_{3c2}$ $x_{3c3}$	$T_{3c}$ — $x_{3c}$	$T_{3.}$	$\bar{x}_{3.}$
⋮														
i	$x_{i11}$ $x_{i12}$ $x_{i13}$	$T_{i1}$ — $x_{i1}$	$x_{i21}$ $x_{i22}$ $x_{i23}$	$T_{i2}$ — $x_{i2}$	$x_{i31}$ $x_{i32}$ $x_{i33}$	$T_{i3}$ — $x_{i3}$		$x_{ij1}$ $x_{ij2}$ $x_{ij3}$	$T_{ij}$ — $x_{ij}$		$x_{ic1}$ $x_{ic2}$ $x_{ic3}$	$T_{ic}$ — $x_{ic}$	$T_{i.}$	$\bar{x}_{i.}$
⋮														
r	$x_{r11}$ $x_{r12}$ $x_{r13}$	$T_{r1}$ — $x_{r1}$	$x_{r21}$ $x_{r22}$ $x_{r23}$	$T_{r2}$ — $x_{r2}$	$x_{r31}$ $x_{r32}$ $x_{r33}$	$T_{r3}$ — $x_{r3}$		$x_{rj1}$ $x_{rj2}$ $x_{rj3}$	$T_{rj}$ — $x_{rj}$		$x_{rc1}$ $x_{rc2}$ $x_{rc3}$	$T_{rc}$ — $x_{rc}$	$T_{r.}$	$\bar{x}_{r.}$
Суммы по группам фактора В $T_j$		$T_{.1}$		$T_{.2}$		$T_{.3}$			$T_{.j}$			$T_{.c}$	$T$	—
Средние по группам фактора В $\bar{x}_j$		$\bar{x}_{.1}$		$\bar{x}_{.2}$		$\bar{x}_{.3}$			$\bar{x}_{.j}$			$\bar{x}_{.c}$	—	$\bar{x}$

Сумма квадратов для варьирования по фактору В

$$nr \sum_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2 \quad (18.41)$$

т. е. помноженная на  $nr$  сумма квадратов отклонений всех значений  $\bar{x}_j$  от общей средней арифметической.

Сумма квадратов для взаимодействия А и В

$$n \sum_{ij} [\bar{x}_{ij} - (\bar{x}_i - \bar{x}) - (\bar{x}_j - \bar{x}) - \bar{x}]^2 = n \sum_{ij} [\bar{x}_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x}]^2 \quad (18.42)$$

Наконец, сумма квадратов для случайных отклонений

$$\sum_{ijk} (x_{ijk} - \bar{x}_{ij})^2 \quad (18.43)$$

т. е. сумма квадратов отклонений вариант от средних отдельных клеток таблицы.

Числа степеней свободы  $df$  таковы: для общего варьирования  $gpc-1$ , для варьирования по фактору А  $r-1$ , для варьирования по фактору В  $c-1$ , для взаимодействия А и В  $(r-1)(c-1)$ , для случайных отклонений  $gc(n-1)$ .

Общая схема разложения вариации при двухфакторной схеме дисперсионного анализа представлена в табл. 18.8. В ней же даны и общие формулы для средних факторов, которые получаются путем деления сумм квадратов на число степеней свободы.

**Рабочие формулы при двухфакторном анализе.** Для упрощения расчетов лучше применить рабочие формулы для сумм квадратов, а именно:

для общего варьирования

$$\sum_{ijk} x_{ijk}^2 - \frac{T^2}{nrc} \quad (18.44)$$

для варьирования по фактору А

$$\frac{1}{nc} \sum_i T_i^2 - \frac{T^2}{nrc} \quad (18.45)$$

для варьирования по фактору В

$$\frac{1}{nr} \sum_j T_j^2 - \frac{T^2}{nrc} \quad (18.46)$$

для варьирования, характеризующего взаимодействие А и В,

$$\frac{1}{n} \sum_{ij} T_{ij}^2 - \frac{1}{nc} \sum T_i^2 - \frac{1}{nr} \sum T_j^2 + \frac{T^2}{nrc} \quad (18.47)$$

для варьирования случайных отклонений (внутри всех групп)

$$\sum_{ijk} x_{ijk}^2 - \frac{1}{n} \sum_{ij} T_{ij}^2 \quad (18.48)$$

В этих формулах  $n$  — число вариант в каждой клеточке;

$c$  — число вертикальных столбцов, т.е. групп по фактору В;

$r$  — число горизонтальных строчек, т.е. групп по фактору А.

Величина  $\sum x_{ijk}^2$  означает уже фигурировавшую ранее сумму квадратов

всех вариант. Далее приходится иметь дело с различными суммами вариант:

$T_{ij}$  — сумма вариант по отдельным клеткам (как рядов, так и столбцов);

$T_i$  — сумма вариант для  $i$ -рядов, т.е. рядов по уровням (группам) фактора А;

$T_j$  — сумма вариант для  $j$ -столбцов, т.е. колонок по уровням (группам) фактора В;

$T$  — общая сумма всех вариант.

Применение этих формул для сумм квадратов дает возможность пользоваться не средними, имеющимися в таблице 18.8, а только суммами вариант, кроме только того, что понадобится сумма квадратов всех вариант  $\sum x_{ijk}^2$ .

Поэтому в схеме варьирования таблицы 18.8 можно не записывать средних в отдельных клетках.

Коэффициенты при отдельных суммах ( $\frac{1}{nc}, \frac{1}{nr}$  и т.д.) служат для приведения всех величин к одному порядку. Число степеней свободы для всех сумм квадратов приведено в таблице 18.9.

Таблица 18.9 – Схема дисперсионного анализа при 2 факторах

Источник варьирования	Сумма квадратов ss	Число степеней свободы df	Средний квадрат ms	
Общее	$\sum_{ijk} (\bar{X}_{ijk} - \bar{X})^2$	$rcn-1$	$\frac{1}{rcn-1} \sum_{ijk} (\bar{X}_{ijk} - \bar{X})^2$	18.49
Фактор А (групповые средние по фактору А)	$nc \sum_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2$	$r-1$	$\frac{nc}{r-1} \sum_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2$	18.50
Фактор В (групповые средние по фактору В)	$nr \sum_j (\bar{X}_j - \bar{X})^2$	$c-1$	$\frac{nr}{c-1} \sum_j (\bar{X}_j - \bar{X})^2$	18.51
Взаимодействие А и В	$n \sum_{ij} (\bar{X}_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_j + \bar{X})^2$	$(r-1)(c-1)$	$\frac{n}{(r-1)(c-1)} \sum_{ij} (\bar{X}_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_j + \bar{X})^2$	18.52
Случайные отклонения	$\sum_{ijk} (\bar{X}_{ijk} - \bar{X}_{ij})^2$	$rc(n-1)$	$\frac{1}{rc(n-1)} \cdot \sum_{ijk} (\bar{X}_{ijk} - \bar{X}_{ij})^2$	18.53

Поэтому можно записать следующие рабочие формулы для средних квадратов, получающиеся путем деления сумм квадратов на соответствующие числа степеней свободы:

для общего варьирования

$$ms = \frac{1}{rcn-1} \left( \sum_{ijk} x_{ijk}^2 - \frac{T^2}{nrc} \right) \quad (18.54)$$

для варьирования по фактору А

$$ms = \frac{1}{r-1} \left( \frac{1}{nc} \sum_i T_i^2 - \frac{T^2}{nrc} \right) \quad (18.55)$$

для варьирования по фактору В

$$ms = \frac{1}{c-1} \left( \frac{1}{nr} \sum_j T_j^2 - \frac{T^2}{nrc} \right) \quad (18.56)$$

для варьирования А и В



$$ms = \frac{1}{(r-1)(c-1)} \left( \frac{1}{n} \sum_{ij} T_{ij}^2 - \frac{1}{nc} \sum T_i^2 - \frac{1}{nr} \sum T_j^2 + \frac{T^2}{nrc} \right) \quad (18.57)$$

для случайных отклонений

$$ms = \frac{1}{rc(n-1)} \left( \sum_{ijk} x_{ijk}^2 - \frac{1}{n} \sum_{ij} T_{ij}^2 \right) \quad (18.58)$$

### Примеры дисперсионного анализа при двухфакторной схеме.

Приведем пример, описанный П.Ф. Рокицким. Допустим, что проводились опыты по удобрению карповых прудов известью (600 кг/га негашеной извести), суперфосфатом (72,8 кг/га  $P_2O_5$ ) и известью и суперфосфатом вместе (с трехкратной повторностью). Четвертый пруд в каждом блоке не удобрялся. Окончательные данные о продуктивности прудов (в переводе на 300 рыб в каждом пруду) представлены в таблице 18.10.

Таблица 18.10 – Продуктивность карповых прудов с применением удобрений

Группы по фактору А (кальциевые удобрения)	Группы по фактору В (фосфорные удобрения)				$T_i$	$\bar{x}_i$
	О		Р			
	варианты $x_{ijk}$	$T_{ij}$	варианты $x_{ijk}$	$T_{ij}$		
О	58	$T_{11}=181$	72	$T_{12}=208$	$T_{1.}=389$	$\bar{x}_{1.}=64,83$
	84		72			
	39		64			
Са	49	$T_{21}=152$	74	$T_{22}=233$	$T_{2.}=385$	$\bar{x}_{2.}=64,17$
	55		74			
	48		85			
$T_j$		$T_{.1}=333$		$T_{.2}=441$	$T=774$	
$\bar{x}_j$		$\bar{x}_{.1}=55,5$		$\bar{x}_{.2}=73,5$		$\bar{x}=64,5$

$$\sum_{ijk} x_{ijk}^2 = 52312$$

Таким образом,  $n=3$ ,  $r=2$ ,  $c=2$ ,  $N=12$ . Применение рабочих формул позволит вычислить значения сумм квадратов.

Общая сумма квадратов

$$\sum_{ijk} x_{ijk}^2 - \frac{T^2}{nrc} = 58^2 + 84^2 + \dots + 74^2 + 85^2 - \frac{599076}{12} = 52312 - 49923 = 2389.$$

Сумма квадратов для варьирования по фактору А (кальций)

$$\frac{1}{nc} \sum_i T_i^2 - \frac{T^2}{nrc} = \frac{1}{6}(389^2 + 385^2) - 49923 = 49924 - 49923 = 1$$

Сумма квадратов для варьирования по фактору В (фосфор)

$$\frac{1}{nr} \sum_j T_j^2 - \frac{T^2}{nrc} = \frac{1}{6}(333^2 + 441^2) - 49923 = 50895 - 49923 = 972.$$

Сумма квадратов для взаимодействия А и В,

$$\frac{1}{n} \sum_{ij} T_{ij}^2 - \frac{1}{nc} \sum_i T_i^2 - \frac{1}{nr} \sum_j T_j^2 + \frac{T^2}{nrc} = \frac{1}{3}(181^2 + 208^2 + 152^2 + 233^2) - 49924 - 50895 + 49923 = 243.$$

Сумма квадратов для случайных отклонений

$$\sum_{ijk} x_{ijk}^2 - \frac{1}{n} \sum_{ij} T_{ij}^2 = 52312 - 51139 = 1173.$$

Сводка результатов дисперсионного анализа дана в таблице 18.11

Таблица 18.11 – Дисперсионный анализ данных о влиянии удобрений Са, Р и Са+Р на продуктивность карповых прудов

Источник варьирования	ss	df	ms	F фактическое	F табличное	
					при P=0,05	при P=0,01
Общее	2389	11	-	-	-	-
Са	1	1	1	1/147=0,007	-	-
Р	972	1	972	972/147=6,6	5,32	11,26
Са+Р	243	1	243	243/147=1,7	5,32	11,26
Случайные отклонения	1173	8	147	-	-	-

С помощью критерия F проверяется достоверность средних квадратов для источников варьирования: Са, Р и Са+Р. Роль Са оцениваем как  $F=1/147=0,007$ , т.е. роль Са не доказана.

Для влияния Р  $F=972/147=6,6$ . Табличные значения F, взятые из приложения Ж, при  $df=1$  и  $df=8$ : для  $P=0,05-5,32$  и для  $P=0,01-11,26$ . Таким образом, эффект фосфора можно принять доказанным (нулевая гипотеза отвергается). Все же полученное значение F удовлетворяет только уров-

ню значимости  $P=0,05$ . При более жестких требованиях следовало бы воздержаться от окончательного вывода до проведения новых, более полных исследований. Дело в том, что опыты были поставлены только на трех повторностях, поэтому число степеней свободы для случайных колебаний ( $df=8$ ) ниже минимально допустимого числа 10, о чем говорилось выше.  $F$  для взаимодействия  $Sa^+$  очень мало ( $= 1,7$ ), поэтому в данном случае влияние взаимодействия не доказано. Нулевая гипотеза остается в силе.

**Оцениваемые параметры при двухфакторном дисперсионном анализе.** При двухфакторном дисперсионном анализе, как и при анализе по одному фактору, значения средних квадратов оценивают определенные параметры вариации: при фиксированных уровнях факторов - условные, которые можно обозначит буквой  $\chi^2$ , и при случайных уровнях - отражающие действительную случайную вариацию и поэтому обозначаемые обычными  $\sigma^2$ .

Оцениваемые параметры для второго случая при двухфакторной схеме будут следующими (средние квадраты отмечены только номерами):

Источник варьирования	ms	Оцениваемые параметры
Фактор А	1	$\sigma_e^2 + n \sigma_{AB}^2 + nc \sigma_A^2$
Фактор В	2	$\sigma_e^2 + n \sigma_{AB}^2 + nr \sigma_B^2$
Взаимодействие А и В	3	$\sigma_e^2 + n \sigma_{AB}^2$
Случайные отклонения	4	$\sigma_e^2$

Если сравнить оцениваемые параметры для 4 источников варьирования, то можно сделать вывод о возможности оценки влияния факторов А и В путем деления их средних квадратов не на средний квадрат случайных отклонений ( $ms_4$ ), а на средний квадрат взаимодействия ( $ms_3$ ). Этот способ получения  $F$  для А и В имеет смысл только при достоверном наличии взаимодействия, ибо в этом случае параметры, оцениваемые  $ms_1$  и  $ms_3$ , отличаются на  $nc \sigma_A^2$ , а оцениваемые  $ms_2$  и  $ms_3$  — на  $nr \sigma_B^2$ . Однако некоторые авторы считают более правильным во всех случаях брать знаменателем для  $F$   $ms_4$ , т.е.  $\sigma_e^2$ . Для доказательства же влияния взаимодействия, очевидно, возможен только один способ — деление  $ms_3$  на  $ms_4$ .

Определение точных величин  $\sigma_A^2$ ,  $\sigma_B^2$  и  $\sigma_{AB}^2$ , совершенно необходимое в ряде селекционно-генетических исследований, может быть сделано путем ряда последовательных вычитаний средних квадратов и делений разностей на коэффициенты согласно формулам оцениваемых параметров.

Так,

$$\sigma_A^2 = \frac{ms_1 - ms_3}{nc}; \quad \sigma_B^2 = \frac{ms_2 - ms_3}{nr}; \quad \sigma_{AB}^2 = \frac{ms_3 - ms_4}{n}$$

#### 18.4 Многофакторный дисперсионный анализ. Использование дисперсионного анализа в лесном хозяйстве

**Дисперсионный анализ при трехфакторной схеме.** При структуре материала, различающегося по 3 факторам, применяется принципиально та же схема анализа, что и при различиях по 2 факторам, но она более сложна и поэтому требует большего внимания при расчетах.

Общая сумма квадратов разлагается на 8 компонентов:

1. Эффект фактора А.
2. Эффект фактора В.
3. Эффект фактора С.
4. Взаимодействие А и В.
5. Взаимодействие А и С.
6. Взаимодействие В и С.
7. Взаимодействие А, В и С вместе (взаимодействие второго порядка).
8. Случайные отклонения.

Каждая отдельная варианта обозначается 4 значками, а именно  $x_{ijkl}$ . Соответствующие средние:  $\bar{x}$  - средняя арифметическая всех наблюдений;  $\bar{x}_i$ ,  $\bar{x}_j$  и  $\bar{x}_k$  - средние для уровней по фактору А, по фактору В и по фактору С отдельно;  $\bar{x}_{ij}$ ,  $\bar{x}_{ik}$  и  $\bar{x}_{jk}$  - средние для всех уровней по 2 факторам без учета третьего;  $\bar{x}_{ijk}$  - средние всех клеток решетки.

Чтобы не спутать буквы, можно обозначить число групп по факторам А, В и С одной буквой  $r$  со значками 1, 2, 3. Тогда общая схема анализа может быть представлена в таблице 18.12.

Средний квадрат, как обычно, получают делением суммы квадратов на число степеней свободы, поэтому для экономии места его можно не включать в таблицу. Общая схема анализа в сущности та же, которая была изложена выше для дисперсионного анализа по 2 факторам. В частности, таков же расчет сумм квадратов и степеней свободы для взаимодействия по двум факторам. Наряду с учетом взаимодействия А и В добавляется учет взаимодействий А и С и В и С. Новым является учет взаимодействия всех 3 факторов А, В и С.

Пользование квадратами отклонений различных средних от общей средней в случае анализа по 3 факторам еще более осложнило бы технику расчетов, поэтому и здесь для подсчета сумм квадратов целесообразно пользоваться рабочими формулами, в которых фигурируют квадраты вариант и суммы вариант по группам.

Таблица 18.12 – Схема дисперсионного анализа при 3 факторах

Источник вариации	ss	df
Общее	$\sum_{ijkl} (x_{ijkl} - \bar{x})^2$	$nr_1r_2r_3 - 1$
Фактор А	$nr_2r_3 \sum_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$r_1 - 1$
Фактор В	$nr_1r_3 \sum_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2$	$r_2 - 1$
Фактор С	$nr_1r_2 \sum_k (\bar{x}_k - \bar{x})^2$	$r_3 - 1$
Взаимодействие А и В	$nr_3 \sum_{ij} (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x})^2$	$(r_1 - 1)(r_2 - 1)$
Взаимодействие В и С	$nr_1 \sum_{jk} (\bar{x}_{jk} - \bar{x}_j - \bar{x}_k + \bar{x})^2$	$(r_2 - 1)(r_3 - 1)$
Взаимодействие А и С	$nr_2 \sum_{ik} (\bar{x}_{ik} - \bar{x}_i - \bar{x}_k + \bar{x})^2$	$(r_1 - 1)(r_3 - 1)$
Взаимодействие А, В и С	$n \sum_k (\bar{x}_{ijk} - \bar{x}_{ij} - \bar{x}_{ik} - \bar{x}_{jk} + \bar{x}_i + \bar{x}_j + \bar{x}_k - \bar{x})^2$	$(r_1 - 1)(r_2 - 1)(r_3 - 1)$
Случайные отклонения	$\sum_{ijkl} (x_{ijkl} - \bar{x}_{ijkl})^2$	$r_1r_2r_3(n - 1)$

Они будут следующими:  
общая изменчивость

$$\sum_{ijkl} x_{ijkl}^2 - \frac{T^2}{nr_1r_2r_3}$$

эффект А

$$\frac{1}{nr_2r_3} \sum_i T_i^2 - \frac{T^2}{nr_1r_2r_3}$$

эффект В

$$\frac{1}{nr_1r_3} \sum_j T_j^2 - \frac{T^2}{nr_1r_2r_3}$$

эффект С

$$\frac{1}{nr_1r_2} \sum_k T_k^2 - \frac{T^2}{nr_1r_2r_3}$$

взаимодействие А и В

$$\frac{1}{nr_3} \sum_{ij} T_{ij}^2 - \frac{1}{nr_2r_3} \sum_i T_i^2 - \frac{1}{nr_1r_3} \sum_j T_j^2 + \frac{T^2}{nr_1r_2r_3}$$

взаимодействие В и С

$$\frac{1}{nr_1} \sum_{jk} T_{jk}^2 - \frac{1}{nr_1 r_3} \sum_j T_j^2 - \frac{1}{nr_1 r_2} \sum_k T_k^2 + \frac{T^2}{nr_1 r_2 r_3}$$

взаимодействие А и С

$$\frac{1}{nr_2} \sum_{ik} T_{ik}^2 - \frac{1}{nr_2 r_3} \sum_i T_i^2 - \frac{1}{nr_1 r_2} \sum_k T_k^2 + \frac{T^2}{nr_1 r_2 r_3}$$

взаимодействие А, В и С

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{ijk} T_{ijk}^2 - \frac{1}{nr_3} \sum_{ij} T_{ij}^2 - \frac{1}{nr_1} \sum_{jk} T_{jk}^2 - \frac{1}{nr_2} \sum_{ik} T_{ik}^2 + \\ & + \frac{1}{nr_2 r_3} \sum_i T_i^2 + \frac{1}{nr_1 r_3} \sum_j T_j^2 - \frac{1}{nr_1 r_2} \sum_k T_k^2 - \frac{T^2}{nr_1 r_2 r_3} \end{aligned}$$

случайные отклонения

$$\sum_{ijkl} x_{ijkl}^2 - \frac{1}{n} \sum_{ijk} T_{ijk}^2$$

Во всех этих формулах поправка одна и та же -  $\frac{T^2}{nr_1 r_2 r_3}$ , т.е. квадрат суммы всех вариантов, деленный на общее их количество. При вычислении первой части рабочих формул важно не спутать, какие конкретно суммы надо возводить в квадрат. Чтобы не загромождать текст, ограничимся только этими формулами для сумм квадратов в буквенной символике без окончательных формул для средних квадратов и без приведения конкретных примеров. Оцениваемые средними квадратами параметры при 3 факторах принципиально не отличаются от указанных выше для случая двухфакторного дисперсионного анализа. Они приведены в таблице 18.13. для случая, когда уровни по всем факторам будут случайными. Если же различия между уровнями по одному из факторов являются не случайными, а фиксированными (смешанная схема), соответствующий компонент вариации надо обозначать не  $\sigma^2$ , а каким-либо иным значком, например  $x^2$ , как указывалось при разборе однофакторной схемы, или просто К со значком, обозначающим данный фактор А, В, С и т. д.

Таблица 18.13 – Оцениваемые параметры при трехфакторном дисперсионном анализе

Источник варьирования	ms	Оцениваемые параметры
Фактор А	1	$\sigma_e^2 + n \sigma_{ABC}^2 + nr_3 \sigma_{AB}^2 + nr_2 \sigma_{AC}^2 + nr_1 r_3 \sigma_A^2$
Фактор В	2	$\sigma_e^2 + n \sigma_{ABC}^2 + nr_3 \sigma_{AB}^2 + nr_1 \sigma_{BC}^2 + nr_1 r_3 \sigma_B^2$
Фактор С	3	$\sigma_e^2 + n \sigma_{ABC}^2 + nr_2 \sigma_{AC}^2 + nr_1 \sigma_{BC}^2 + nr_1 r_2 \sigma_C^2$
Взаимодействие А и В	4	$\sigma_e^2 + n \sigma_{ABC}^2 + nr_3 \sigma_{AB}^2$
Взаимодействие В и С	5	$\sigma_e^2 + n \sigma_{ABC}^2 + nr_1 \sigma_{BC}^2$
Взаимодействие А и С	6	$\sigma_e^2 + n \sigma_{ABC}^2 + nr_2 \sigma_{AC}^2$
Взаимодействие А, В и С	7	$\sigma_e^2 + n \sigma_{ABC}^2$
Случайные отклонения	8	$\sigma_e^2$

Разбор параметров, оцениваемых различными средними квадратами, показывает, что в данном случае оценить с помощью критерия F достоверность влияния отдельных факторов и их взаимодействия значительно сложнее, чем в предыдущих случаях дисперсионного анализа. Поэтому мы ограничимся сказанным, отослав читателя, которому понадобятся эти методы, к специальной литературе.

**Иерархическая схема дисперсионного анализа.** Все предыдущие схемы были факторными. В них предусматривалось, что уровни одного фактора сочетаются с любыми уровнями всех других факторов. Таким образом создаются группы вариант, на которые действуют любые сочетания всех изучаемых факторов. Обычные факторные схемы чаще всего применяются в опытах, план которых строится экспериментатором заранее. Очевидно, что такой план должен предусматривать наличие всех сочетаний градаций разных факторов (или почти всех, что иногда возможно при так называемых «выпавших» группах опыта).

Однако при анализе материала, взятого из природы или из хозяйства, обычные факторные схемы могут быть неосуществимыми, так как внутри градаций (групп) фактора А возможны различные, отличающиеся друг от друга градации (группы) факторов В, С и т.д.

Так, например, при изучении данных об удоях коров-дочерей, происходящих от разных родителей и относящихся к разным породам, обнаружится определенная связь между группами и влияющими на них факторами (рисунок 18.2).

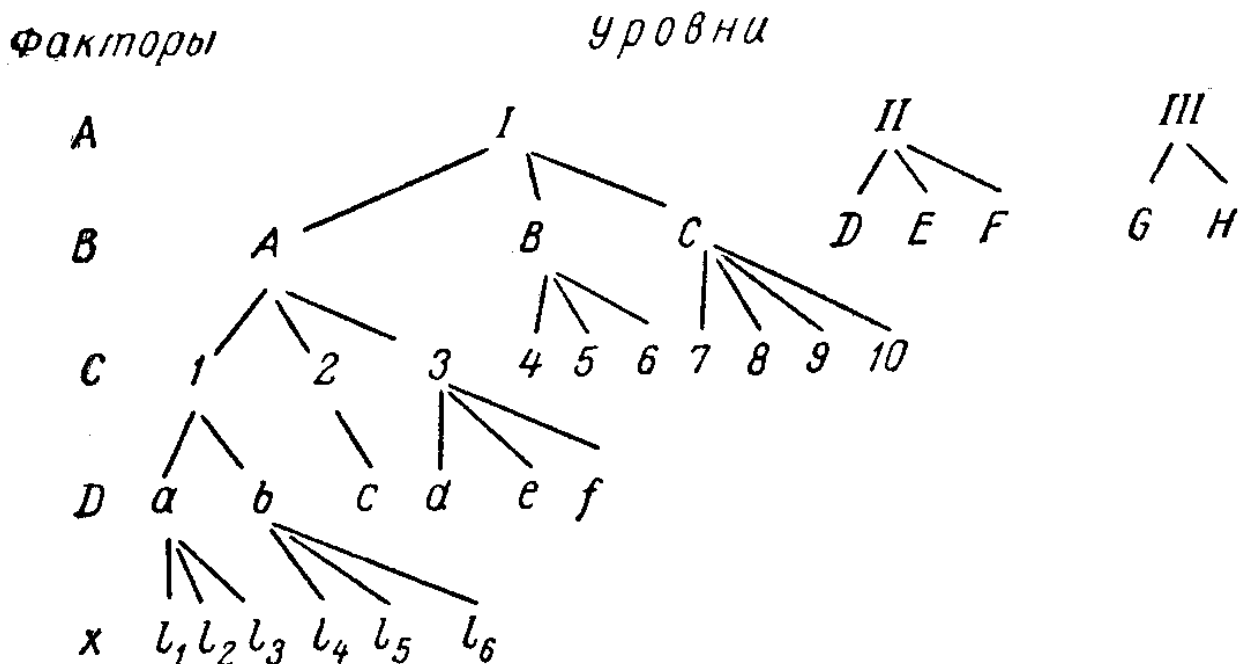


Рисунок 18.2 Схема иерархических связей между факторами и их уровнями ( по П.Ф. Рокицкому). Уровни низшего порядка располагаются только внутри определенных уровней высшего порядка.

Факторы: А — породы; В — быки; С — покрытые ими коровы; D — дочери; х — варианты, т.е. удои коров-дочерей по отдельным лактациям.

К породе I относятся только быки А, В, С. Остальные быки других пород (II и III). Бык А покрыл коров 1, 2, 3; бык В — коров 4, 5 и 6; бык С — опять иных коров 7, 8, 9, 10 и т.д. Корова 1 дала дочерей а и b; корова 2 — дочь с; корова 3 — дочерей d, e и f и т.д. Наконец, от каждой дочери было изучено по несколько лактаций  $l_1, l_2$  и т.д.

Варьирующие по отдельным лактациям удои коров зависят от 4 факторов: породы, быки, матери, дочери, но связь между ними осуществляется по иерархической лестнице — от более общих факторов к более частным, или от факторов высшего порядка к факторам низшего порядка. Поэтому такие схемы, или модели, получили название иерархических.

Подобным же образом может быть сгруппирован зоологический или ботанический материал по факторам: виды, подвиды, экотипы, места обитания, выборки, отдельные экземпляры. Для иерархических схем характерно отсутствие свободных сочетаний между градациями факторов А, В, С и т.д., в этом их отличие от рассмотренных выше факторных схем. Так, коровы-дочери могут быть только от определенных матерей, а не от любых коров популяции. Одни коровы-матери покрыты одними быками, а другие — другими. Определенные экотипы входят в состав одних подвидов, другие — в состав других и т.д.



Иерархические лестницы могут быть короче или длиннее в зависимости от количества учитываемых факторов.

**Применение дисперсионного анализа в лесном хозяйстве.** В лесном хозяйстве (в исследованиях) дисперсионный анализ применяется широко. Он является основой при доказательстве сходства и различий у потомства при проведении работ по селекции лесных древесных видов. Им пользуются для определения эффективности проводимых мероприятий в лесном хозяйстве, в частности, при применении удобрений, гербицидов, даже при проведении рубок ухода, хотя в последнем случае чаще используют регрессионный анализ. Вычисления в настоящее время проводят только на компьютерах, по сертифицированным стандартным программам, которые имеются во всех системах матобеспечения для ПК.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщая вышеизложенное, приходим к выводу, что настоящее учебное пособие позволяет студентам в полной мере освоить курс биометрии, который читается в университете по специальности «Лесное хозяйство».

В то же время пособие обеспечивает потребности магистрантов, аспирантов и научных работников в понимании сути исследуемых ими явлений при анализе различных биометрических показателей, которые вычисляются по стандартным компьютерным программам, входящим в состав сертифицированного математического обеспечения для ПК.

В процессе пользования настоящим пособием у читателей могут появиться различные замечания и пожелания. Дальнейшее совершенствование всех изданий подобного рода должно идти по пути учета этих предложений. Поэтому через некоторое время – 5-7 лет – пособие должно переиздаваться с учетом новых материалов в области математической статистики и пожеланий пользователей.

При чтении курса лесной биометрии преподаватель должен акцентировать внимание студентов на те моменты, которые обязательны к усвоению и на вопросы, желательные к расширенному (факультативному) изучению. Это раскрывает творческие возможности преподавателей биометрии и студентов и отвечает современным требованиям к методике чтения лекций.

## ПЕРЕЧЕНЬ ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Айвазян, С.А. Прикладная статистика. Исследование зависимостей. Справочник. / С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Л. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика. – 1985. – 487 с.
2. Алексеев, А.С. Математические модели и методы в лесном хозяйстве. Учебное пособие / А.С. Алексеев. – Л.: ЛТА. – 1988. – 88 с.
3. Антанайтис, В.В. Закономерности лесной таксации / В.В. Антанайтис и др. – Каунас: ЛитСХА. – 1976. – 127 с.
4. Антанайтис, В.В. Современное направление лесоустройства / В.В. Антанайтис. – М.: Лесная промышленность. – 1977. – 280 с.
5. Анучин, Н.П. Лесная таксация / Н.П. Анучин. – М.: Лесная промышленность. – 1977. – 512 с.
6. Атрощенко, О.А. Моделирование роста леса и лесохозяйственных процессов / О.А. Атрощенко. – Минск: БГТУ. – 2004. – 249 с.
7. Багинский, В.Ф. О методе исследования факторов воздействия на рост древостоя / В.Ф. Багинский // Ботаника. Исследования. – Минск: Наука и техника. – 1978. – Вып. XX. – С. 161-171.
8. Багинский, В.Ф. Лесопользование в Беларуси / В.Ф. Багинский, Л.Д. Есимчик – Минск: Беларуская навука. – 1996. – 367 с.
9. Багинский, В.Ф. Системный анализ в лесном хозяйстве. Учебное пособие. – В.Ф. Багинский. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины. – 2009. – 168 с.
10. Бермант, А.Ф. Курс математического анализа. Изд. 7 / А.Ф. Бермант. – 1954. – Ч.1. – 466 с.
11. Бейли, Н. Статистические методы в биологии / Н. Бейли. – М.: Мир. – 1963. – 480 с.
12. Ван дер Ванден, Б.Л. Математическая статистика / Б.Л. Ван дер Ванден. – М.: Иностранная литература. – 1960. – 424 с.
13. Воинов, Н.Т. Математические модели объемных и сортиментных таблиц осины / Н.Т. Воинов // Лесохозяйственная наука и практика. – Минск: Урожай. – 1972. – С. 27-30.
14. Гедых, В.Б. Дикорастущие брусничные в условиях Беларуси / В.Б. Гедых. – Гомель: ИЛ НАН Беларуси. – 2002. – 412 с.
15. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. – М.: Фитматгиз. – 1988. – 406 с.
16. Горошко М.П. Біометрія / М.П. Горошко, С.І. Миклуш, П.Г. Хомяк. – Львів: Кампула. – 2004. – 236 с.
17. Грейг-Смит, П. Количественная экология растений / П. Грейг-Смит. – М.: Мир. – 1967. – 349 с.
18. Гурский, Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики / Е.И. Гурский. – М.: Высшая школа. – 1971. – 224 с.

19. Дворецкий, М.Л. Практическое пособие по вариационной статистике / М.Л. Дворецкий. – Йошкар-Ола: ПЛИ им. М. Горького. – 1968. – 99 с.
20. Дукарский, О.М. Статистический анализ и обработка наблюдений на ЭВМ «Минск-22» / О.М. Дукарский, А.Г. Закурдаев. – М.: Статистика. – 1971. – 244 с.
21. Ермаков, В.Е. Лесоустройство / В.Е. Ермаков. – Минск: Вышэйшая школа. – 1993. – 259 с.
22. Загреев, В.В. Географические закономерности роста и продуктивности древостоев / В.В. Загреев. – М.: Лесная промышленность. – 1978. – 240 с.
23. Зайцев, Г.Н. Математическая статистика в экспериментальной ботанике / Г.Н. Зайцев. – М.: Наука. – 1984. – 424 с.
24. Зайцев, Г.Н. Математический анализ биологических данных / Г.Н. Зайцев. – М.: Наука. – 1991. – 184 с.
25. Захаров, В.К. Лесная таксация / В.К. Захаров. – М.: Лесная промышленность. – 1967. – 406 с.
26. Здорик, Н.Г. Статистика для лесных специалистов / Н.Г. Здорик. – М.: Гослесбумиздат. – 1952. – 225 с.
27. Кендалл, Д.Дж. Статистические выводы и связи / Д.Дж. Кендалл, А. Стьюарт. – М.: Наука. – 1973. – 900 с.
28. Кравченко, Г.Л. Вариационная статистика / Г.Л. Кравченко, Е.С. Мурахтанов. – Брянск: БрТИ. – 1970. – 86 с.
29. Крамер, Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М.: Мир. – 1976. – 648 с.
30. Кузмичев, В.В. Закономерности роста древостоев / В.В. Кузмичев. – Новосибирск: Наука. – 1977. – 160 с.
31. Лакин, Г.Ф. Биометрия. Учебное пособие / Г.Ф. Лакин. – М.: Высшая школа. – 1990. – 352 с.
32. Лапицкая, О.В. История лесного хозяйства Беларуси / О.В. Лапицкая, В.Ф. Багинский // Лес в жизни восточных славян: от Киевской Руси до наших дней. Сборник научных трудов. – Гомель: ИЛ НАН Беларуси. – 2003. – Вып. 57. – С. 64-70.
33. Лапицкая, О.В. Возраст и оборот рубки древостоев в свете требований устойчивого развития / О.В. Лапицкая // Проблемы лесоведения и лесоводства. Сборник научных трудов. – Гомель: ИЛ НАН Беларуси. – 2003. – Вып. 56. – С. 188-195.
34. Леман, Э. Проверка статистических гипотез / Э. Леман. – М.: Мир. – 1964. – 498 с.
35. Лосицкий, К.Б. Эталонные леса / К.Б. Лосицкий, В.С. Чуенков. – М.: Лесная промышленность. – 1980. – 191 с.
36. Мелехов, И.С. Лесоведение / И.С. Мелехов. – М.: Лесная промышленность. – 1980. – 406 с.
37. Митропольский, А.К. Техника статистических вычислений / А.К. митропольский. – М.: Физматиздат. – 1961. – 479 с.

38. Моисеенко, Ф.П. О закономерностях в росте, строении и товарности насаждений / Ф.П. Моисеенко // Доклад на соискание ученой степени доктора с.-х. наук. – Киев: УСХА. – 1965. – 78 с.
39. Моисеенко, Ф.П. Таблицы для сортиментного учета леса на корню / Ф.П. Моисеенко. – Минск: Полымя. – 1972. – 328 с.
40. Морозов, Г.Ф. Учение о лесе / Г.Ф. Морозов. – М.-Л.: Госиздат. – 1925. – 367 с.
41. Мошкалев, А.Г. Таксация товарной структуры древостоев / А.Г. Мошкалев, А.А. Книзе, Н.И. Ксенофонтов, Н.С. Уланов. – М.: Лесная промышленность. – 1982. – 157 с.
42. Неверов, А.В. Спелость леса в системе устойчивого природопользования / А.В. Неверов, В.Ф. Багинский, О.В. Лапицкая // Труды Белорусского государственного технологического университета. Серия VII. Экономика и управление. – Минск: БГТУ. – 2002. – Вып.Х. – С. 207-215.
43. Никитин, К.Е. Лиственница на Украине / К.Е. Никитин. – Киев: Урожай. – 1965. – 331 с.
44. Никитин, К.Е. Методы и техника обработки лесоводственной информации / К.Е. Никитин, А.З. Швиденко – М.: Лесная промышленность. – 1978. – 270 с.
45. Нормативные материалы для таксации леса Белорусской ССР / Коллектив авторов под ред. Багинского В.Ф. – М.: ЦБНТИ-лесхоз. – 1984. – 300с.
46. Орлов, М.М. Лесоустройство / М.М. Орлов. – Л.: Гостехиздат. – 1927. – Т.1. – 428 с.
47. Плохинский, Н.А. Биометрия / Н.А. Плохинский. – М.: МГУ. – 1970. – 267 с.
48. Рокицкий, П.Ф. Биологическая статистика / П.Ф. Рокицкий. – Минск: Высшая школа. – 1964. – 326 с.
49. Свалов, Н.Н. Вариационная статистика. Учебное пособие / Н.Н. Свалов. – М.: Лесная промышленность. – 1977. – 177 с.
50. Свалов, Н.Н. Моделирование производительности древостоев и теория лесопользования / Н.Н. Свалов. – М.: Лесная промышленность. – 1979. – 216 с.
51. Суслов, И.П. Общая теория статистики / И.П. Суслов. – М.: Статистика. – 1978. – 391 с.
52. Третьяков, Н.В. Закон единства в строении насаждений / Н.В. Третьяков. – М.-Л.: Новая деревня. – 1927. – 113 с.
53. Трулль, О.А. Математическая статистика в лесном хозяйстве / О.А. Трулль. – Минск: Высшая школа. – 1966. – 233 с.
54. Турский, М.К. Лесоводство / М.К. Турский. – М.-Л.: Госиздат. – 1929. – 503 с.
55. Тюрин, А.В. Нормальная производительность сосны, березы, осины и ели / А.В. Тюрин. – М.-Л.: Сельхозгиз. – 1930. – 189 с.

56. Тюрин, А.В. Основы вариационной статистики в применении к лесоводству / А.В. Тюрин. – М.: Гослесбумиздат. – 1961. – 94 с.
57. Устинов, М.В. Математические методы в лесном хозяйстве / М.В. Устинов. – Брянск: БГИТА. – 1999. – 98 с.
58. Штоф, В.А. Моделирование и философия / В.А. Штоф. – Л.: ЛГУ. – 1966. – 202 с.
59. Юркевич, И.Д. География, типология и районирование лесной растительности / И.Д. Юркевич, В.С. Гельтман. – Минск: Наука и техника. – 1965. – 248 с.
60. Янушко, А.Д. Лесное хозяйство Беларуси / А.Д. Янушко. – Минск: БГТУ. – 2001. – 248 с.

## ПРИЛОЖЕНИЯ (математико-статистические таблицы)

### Приложение I

Случайные числа  
(по А.К. Митропольскому)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1534	7106	2836	7873	5574	7545	7590	5574	1202	7712
6128	8993	4102	2551	0303	2358	6427	7067	9325	2454
6047	8566	8644	9343	9297	6751	3500	8754	2913	1258
0806	5201	5705	7355	1448	9562	7514	9205	0402	2427
9915	8274	4525	5695	5752	9630	7172	6988	0227	4264
2882	7158	4341	3463	1178	5786	1173	0670	0820	5067
9213	1223	4388	9760	6691	6861	8214	8813	0611	3131
8410	9836	3899	3683	1253	1683	6988	9978	8026	6751
9974	2362	2103	4326	3825	9079	6187	2721	1489	4216
3402	8162	8226	0782	3364	7871	4500	5598	9421	3816
8188	6596	1492	2139	8823	6878	0613	7161	0241	3834
3825	7020	1124	7483	9155	4919	3209	5959	2364	2555
9801	8788	6338	5899	3309	0807	0968	0539	4205	8257
5603	1251	6352	6467	0231	3556	2569	9446	4174	9219
0714	3757	0378	8266	8864	1374	6687	1221	0678	3714
4617	5652	7627	0372	8151	3668	1994	4402	2124	0016
6789	6279	7306	1856	7028	9043	7161	7526	6923	6393
8705	4978	8621	1790	4433	6298	0854	9127	3445	1111
3840	1086	0774	9241	9297	4239	1739	7734	0119	2436
7662	3939	2965	3273	0551	1645	8477	1877	5327	8629
7639	2868	4391	2950	7122	7325	9727	0080	7467	7947
3237	3203	4246	7329	7936	0065	4146	0866	4916	8648
3917	6271	1721	5469	1914	8653	0387	2756	6073	8984
9138	9395	6005	6423	7977	1873	7103	4267	9316	7206
8358	5896	6286	9242	5040	8509	2941	3913	3028	1563
1030	5094	1745	2975	2018	7340	6547	0207	5587	0300
6606	6305	1564	6668	7822	7142	6564	1659	5369	1659
4533	8841	4922	9365	1361	6692	1633	6764	0747	3881
4258	2012	0992	0106	1542	4760	0392	4057	0092	5203
5224	5128	8949	7928	7267	0116	1476	2009	1772	3860
6872	7492	7962	1867	7437	1526	3516	9129	4153	8084
8638	8407	7198	0956	0950	7753	5144	3914	5596	6104
9958	7172	5822	4224	6701	7559	4985	4856	4461	6147
0265	3086	2996	0699	3584	9702	1665	0446	9107	6437
8987	5441	7878	9404	0487	2939	3805	9172	7887	5197
5552	3529	9627	9362	6298	6021	0024	9520	9154	0643
9383	6640	7394	9592	9903	7699	8939	9972	1257	0994
9903	4059	0332	9109	0182	6721	9163	9008	2542	4461
6530	5070	7589	6928	6014	1832	9307	5107	1354	9257
8679	8953	8310	2060	6277	1773	7979	6741	6033	3588
5765	4987	1639	3512	9843	5286	3786	2384	4919	5611
7198	2447	6716	0291	5585	1106	5330	0504	6346	3679

2385	0605	2678	1399	2371	7968	1212	9569	8650	5841
0732	8732	8660	5836	9065	4603	0029	8042	0159	0345
1642	6094	3795	2600	4532	9740	0376	4384	9203	5387
4514	1956	7212	0687	7632	2106	0846	7055	4106	9157
8744	5580	8038	9087	7222	0424	0028	4511	3191	9846
3729	6225	5397	6790	2157	3414	6509	5204	4779	5641
8858	3147	8410	2783	1290	9796	8873	7585	7185	4726
3522	5601	6197	6051	3470	8283	5702	0103	8726	5282

Продолжение приложения 1

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5489	5583	3156	0835	1988	3912	0938	7460	0869	4420
3522	0935	7877	5665	7020	9255	7379	7124	7878	5544
7555	7579	2550	2487	9477	0864	2349	1012	8250	2633
5759	3554	5080	9074	7001	6249	3224	6368	9102	2672
6303	6895	3371	3196	7231	2918	7380	0438	7547	2644
7351	5634	5323	2623	7803	8374	2191	0464	0696	9529
7068	7803	8832	5119	6350	0120	5026	3684	5657	0304
3613	1428	1796	8447	0503	5654	3524	7336	9536	1944
5143	4534	2105	0368	7890	2473	4240	8652	9435	1422
9815	5144	7649	8638	6137	8070	5345	4865	2456	5708
5780	1277	6316	1013	2867	9938	3930	3203	5696	1769
1187	0951	5991	5246	5700	5564	7352	0891	6249	6568
4184	2179	4554	9083	2254	2435	2965	5154	1209	7069
2916	2972	9885	0275	0144	8034	8122	3213	7666	0230
5524	1341	9860	6565	6981	9842	0171	2284	2707	3008
0146	5291	2354	5694	0377	5336	6460	9585	3415	2358
4920	2826	5238	5402	7937	1993	4332	2327	6875	5230
7978	1947	6380	3425	7267	7285	1130	7722	0164	8573
7453	0653	3645	7497	5969	8682	4191	2976	0361	9334
1473	6938	4899	5348	1641	3652	0852	5296	4538	4456
8162	8797	8000	4707	1880	9660	8446	1883	9768	0881
5645	4219	0807	3301	4279	4168	4305	9937	3120	5547
2042	1192	1175	8851	6432	4635	5757	6656	1660	5389
5470	7702	6958	9080	5925	8519	0127	9233	2452	7341
4045	1730	6005	1704	0345	3275	4738	4862	2556	8333
5880	1257	6163	4439	7276	6353	6912	0731	9033	5294
9083	4260	5277	4998	4298	5204	3965	4028	8936	5148
1762	8713	1189	1090	8989	7273	3213	1938	9321	4820
2023	2589	1740	0424	8924	0005	1969	1636	7237	1227
7965	3855	4765	0703	1678	0841	7543	0308	9732	1289
7690	0480	8098	9629	4819	4219	7241	5128	3853	1921
9292	0426	9573	4903	5916	6576	8368	3270	6641	0033
0867	1656	7016	4220	2533	6345	8227	1904	5138	2537
0505	2127	8255	5276	2233	3956	4118	8199	6380	6340
6295	9795	1112	5761	2575	6837	3336	9322	7403	8345
6323	2615	3410	3365	1117	2417	3176	2434	5240	5455
8672	8536	2966	5773	5412	8114	0930	4697	6919	4569
1422	5507	7596	0670	3013	1351	3886	3268	9469	2584
2653	1472	5113	5735	1469	9545	9331	5303	9914	6394
0438	4376	3328	8649	8327	0110	4549	7955	5275	2890
2851	2157	0047	7085	1129	0460	6821	8373	2572	8962
7962	2753	3077	8718	7418	8004	3125	3706	8822	1494
3837	4098	0220	1217	4732	0150	1637	1097	1040	7372
8542	4126	9274	2251	0607	4301	8730	7690	6235	3477
0139	0765	8039	9484	2577	7859	1976	0623	1418	6685
6687	1943	4307	0579	8171	8224	8641	7034	3595	3875
8242	5582	5872	3197	4919	2792	5991	4058	9769	1918



6859	9606	0522	4993	0345	8958	1289	8825	6941	7685
6590	1932	6043	3623	1973	4112	1795	8465	2110	8045
3482	0478	0221	6738	7323	5643	4767	0106	2372	9862

Приложение 2

N	V		N	V		N	V	
	5%	1%		5%	1%		5%	1%
4	0,96	0,99	13	0,41	0,52	22	0,32	0,41
5	0,81	0,92	14	0,40	0,50	23	0,31	0,41
6	0,69	0,80	15	0,38	0,49	24	0,31	0,40
7	0,61	0,74	16	0,37	0,47	25	0,30	0,39
8	0,55	0,68	17	0,36	0,46	26	0,30	0,39
9	0,51	0,64	18	0,35	0,45	27	0,30	0,39
10	0,48	0,60	19	0,34	0,44	28	0,29	0,38
11	0,45	0,57	20	0,33	0,43	29	0,29	0,37
12	0,43	0,54	21	0,33	0,42	30	0,28	0,37

Приложение 2

N	V		N	V		N	V	
	5%	1%		5%	1%		5%	1%
5	1,92	1,97	21	2,80	3,11	80	3,33	3,70
6	2,07	2,16	22	2,82	3,13	90	3,37	3,74
7	2,18	2,31	23	2,84	3,16	100	3,40	3,77
8	2,27	2,43	24	2,86	3,18	120	3,46	3,83
9	2,35	2,53	25	2,88	3,20	150	3,53	3,90
10	2,41	2,62	26	2,90	3,22	200	3,61	3,98
11	2,47	2,69	27	2,91	3,24	300	3,73	4,09
12	2,52	2,75	28	2,93	3,26	400	3,80	4,17
13	2,56	2,81	29	2,94	3,28	500	3,87	4,24
14	2,60	2,86	30	2,96	3,29	600	3,92	4,28
15	2,64	2,90	35	3,02	3,36	700	3,96	4,32
16	2,67	3,94	40	3,08	3,42	800	3,99	4,35
17	2,70	2,98	45	3,12	3,48	900	4,02	4,35
18	2,73	3,02	50	3,16	3,52	1000	4,05	4,41
19	2,75	3,05	60	3,22	3,58	1500	4,14	4,50
20	2,78	3,08	70	3,28	3,64	2000	4,21	4,56

Приложение 4

P	p									
	0,10	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01
0,75	33	40	51	67	91	132	206	367	827	3308
0,80	41	50	64	83	114	164	256	456	1026	4105
0,85	51	63	80	105	143	207	323	575	1295	5180
0,90	67	83	105	138	187	270	422	751	1690	6763

0,91	71	88	112	146	199	287	449	798	1796	7185
0,92	76	94	119	156	212	306	478	851	1915	7662
0,93	82	101	128	167	227	328	512	911	2051	8207
0,94	88	109	138	180	245	353	552	982	2210	8843
0,95	96	118	150	195	266	384	600	1067	2400	9603
0,96	105	130	164	215	292	421	659	1171	2636	10544
0,965	111	137	173	226	308	444	694	1234	2778	11112
0,970	117	145	183	240	327	470	735	1308	2943	11773
0,975	125	155	196	256	348	502	784	1395	3139	12559
0,980	135	167	211	276	375	541	845	1503	3382	13529
0,985	147	182	231	301	410	591	924	1643	3697	14791
0,990	165	204	259	338	460	663	1036	1843	4146	16587
0,991	170	210	266	348	473	682	1066	1895	4264	17057
0,992	175	217	274	358	488	703	1098	1953	4395	14583
0,993	181	224	284	371	505	727	1136	2020	4545	18182
0,994	188	233	294	385	524	755	1179	2097	4718	18875
0,995	196	243	307	402	547	787	1231	2188	4924	19698
0,996	207	255	323	422	575	828	1294	2301	5177	20709
0,997	220	271	344	449	611	880	1376	2446	5504	22018
0,998	238	294	373	487	663	954	1492	2652	5968	23873
0,999	270	334	422	552	751	1082	1691	3007	6767	27069

Приложение 5

Значения t-критерия Стьюдента

v	P												v
	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,01	0,001	
1	0,128	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,700	63,650	636,600	1
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	9,925	31,590	2
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	5,841	12,940	3
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	4,604	8,610	4
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	4,032	6,859	5
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,707	5,959	6
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	3,499	5,405	7
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	3,355	5,041	8
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	3,250	4,781	9
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	3,169	4,587	10
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	3,106	4,437	11
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	3,055	4,318	12
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	3,012	4,221	13
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,977	4,140	14
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,947	4,073	15
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,921	4,015	16
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,898	3,965	17
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,878	3,922	18
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,861	3,883	19
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,845	3,850	20

21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,831	3,819	21
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,819	3,792	22
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,807	3,767	23
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,797	3,745	24
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,787	3,725	25
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,779	3,707	26
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,771	3,690	27
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,763	3,674	28
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,756	3,659	29
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,750	3,646	30
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,704	3,551	40
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,660	3,460	60
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,617	3,373	120
>120	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,576	3,291	>120



Значения F-критерия Фишера (верхний ряд - 99,9%, средний - 99%, нижний - 95%)

v2	v2																							v2	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500		>500
3	167,5	148,5	141,1	137,1	134,6	132,9	131,8	130,6	130,0	129,5	128,9	128,3	127,7	127,1	126,5	125,9	125,6	125,3	125,0	124,7	124,4	124,1	123,8	123,5	3
	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,7	27,4	27,5	27,1	27,1	26,9	26,8	26,7	26,6	26,5	26,4	26,4	26,3	26,2	26,2	26,1	26,1	
	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,8	8,8	8,8	8,8	8,8	8,8	8,7	8,7	8,7	8,7	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,5	8,5	
4	74,1	61,2	66,1	53,4	51,7	50,5	49,8	49,0	48,6	48,2	47,8	47,4	47,0	46,6	46,2	45,8	45,6	45,4	45,2	45,0	44,7	44,5	44,3	44,1	4
	21,2	18,8	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,7	14,5	14,4	14,2	14,1	14,0	13,9	13,9	13,8	13,7	13,7	13,6	13,5	13,5	13,5	
	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	6,1	6,0	6,0	6,0	5,9	5,9	5,9	5,8	5,8	5,8	5,8	5,7	5,7	5,7	5,7	5,7	5,6	5,6	
5	47,0	36,6	33,2	31,1	29,8	28,8	28,2	27,6	27,3	27,0	26,7	26,4	26,1	25,8	25,4	25,1	24,9	24,8	24,6	24,5	24,3	24,1	24,0	23,8	5
	46,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	10,0	9,9	9,7	9,6	9,5	9,4	9,3	9,2	9,1	9,1	9,1	9,1	9,0	9,0	
	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,9	4,8	4,8	4,7	4,7	4,7	4,6	4,6	4,6	4,5	4,5	4,5	4,4	4,4	4,4	4,4	4,4	4,4	
6	35,5	27,0	23,7	21,9	20,8	20,0	19,5	19,0	18,8	18,5	18,3	18,0	17,7	17,5	17,2	16,9	16,8	16,6	16,5	16,4	16,2	16,1	15,9	15,8	6
	13,4	10,9	9,8	9,2	8,8	8,5	8,3	8,1	8,0	7,9	7,8	7,7	7,6	7,5	7,4	7,3	7,2	7,1	7,1	7,0	7,0	6,9	6,9	6,9	
	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,2	4,1	4,1	4,1	4,0	4,0	4,0	3,9	3,9	3,8	3,8	3,8	3,8	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7	
7	29,2	21,7	18,8	17,2	16,2	15,5	15,1	14,6	14,4	14,2	13,9	13,7	13,5	13,2	13,0	12,7	12,6	12,5	12,3	12,2	12,1	12,0	11,8	11,7	7
	12,3	9,6	8,5	7,9	7,5	7,2	7,0	6,8	6,7	6,6	6,5	6,5	6,4	6,2	6,2	6,1	6,0	5,9	5,9	5,8	5,8	5,7	5,7	5,7	
	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,8	3,7	3,7	3,6	3,6	3,6	3,5	3,5	3,4	3,4	3,4	3,3	3,3	3,3	3,3	3,3	3,2	3,2	
8	25,4	18,5	15,8	14,4	13,5	12,9	12,5	12,0	11,8	11,6	11,4	11,2	11,0	10,8	10,5	10,3	10,2	10,1	10,0	9,9	9,7	9,6	9,5	9,4	8
	11,3	8,7	7,6	7,0	6,6	6,4	6,2	6,0	5,9	5,8	5,7	5,6	5,5	5,4	5,3	5,2	5,1	5,1	5,0	5,0	4,9	4,9	4,9	4,9	
	5,3	4,6	4,1	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,4	3,3	3,3	3,2	3,2	3,2	3,1	3,1	3,1	3,1	3,0	3,0	3,0	2,9	2,9	2,9	
9	22,9	16,4	13,9	12,6	11,7	11,1	10,8	10,4	10,2	10,0	9,8	9,6	9,4	9,2	8,9	8,7	8,6	8,5	8,4	8,3	8,1	8,0	7,9	7,8	9
	10,6	8,0	7,0	6,4	6,1	5,8	5,6	5,5	5,4	5,3	5,2	5,1	5,0	4,9	4,8	4,7	4,6	4,6	4,5	4,5	4,4	4,4	4,3	4,3	
	5,1	4,3	3,6	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,2	3,1	3,1	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,7	2,7	2,7	
10	21,0	14,9	12,3	11,3	10,5	9,9	9,6	9,2	9,0	8,9	8,7	8,5	8,3	8,1	7,8	7,6	7,5	7,4	7,3	7,2	7,1	7,0	6,9	6,8	10
	10,0	7,9	6,6	6,0	5,6	5,4	5,2	5,1	5,0	4,9	4,8	4,7	4,6	4,5	4,4	4,3	4,3	4,2	4,1	4,1	4,0	4,0	3,9	3,9	
	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	3,1	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,7	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,5	
11	19,7	13,8	11,6	10,4	9,6	9,1	8,8	8,4	8,2	8,0	7,8	7,6	7,4	7,3	7,1	6,9	6,8	6,7	6,6	6,5	6,3	6,2	6,1	6,0	11
	9,7	7,2	6,2	5,7	5,3	5,1	4,9	4,7	4,6	4,5	4,5	4,4	4,3	4,2	4,1	4,0	3,9	3,9	3,8	3,7	3,7	3,7	3,6	3,6	
	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,5	2,4	2,4	2,4	2,4	
12	18,6	12,3	10,8	9,6	8,9	8,4	8,1	7,7	7,5	7,4	7,2	7,0	6,8	6,7	6,5	6,3	6,2	6,1	6,0	5,9	5,7	5,6	5,5	5,4	12
	9,3	6,9	6,0	5,4	5,1	4,8	4,7	4,5	4,4	4,3	4,2	4,2	4,1	4,0	3,9	3,8	3,7	3,6	3,6	3,5	3,5	3,4	3,4	3,4	
	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,5	2,4	2,4	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	
13	17,8	12,3	10,2	9,1	8,4	7,9	7,6	7,2	7,0	6,9	6,7	6,5	6,3	6,2	6,0	5,8	5,7	5,6	5,5	5,4	5,3	5,2	5,1	5,0	13
	9,1	6,7	5,7	5,2	4,9	4,6	4,4	4,3	4,2	4,1	4,0	4,0	3,9	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,4	3,3	3,3	3,2	3,2	3,2	

	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,6	2,6	2,6	2,5	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,3	2,2	2,2	
14	17,1	11,8	9,7	8,6	7,9	7,7	7,1	6,8	6,6	6,5	6,3	6,1	5,9	5,8	5,6	5,4	5,3	5,2	5,1	5,0	4,9	4,8	4,7	4,6	14
	8,9	6,5	5,6	5,0	4,7	4,5	4,3	4,1	4,0	3,9	3,9	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,3	3,3	3,2	3,1	3,1	3,1	3,0	3,0	
	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	

Продолжение приложения 6

v2	v2																							v2	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500		>500
15	16,6	11,3	9,3	8,3	7,6	7,1	6,8	6,5	6,3	6,2	6,0	5,8	5,6	5,5	5,3	5,1	5,0	4,9	4,8	4,7	4,6	4,5	4,4	4,3	15
	8,7	6,4	5,4	4,9	4,6	4,3	4,1	4,0	3,9	3,8	3,7	3,7	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,9	
	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,7	2,6	2,6	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1	2,1	
16	16,1	11,0	9,0	7,9	7,3	6,8	6,5	6,2	6,1	5,9	5,8	5,6	5,4	5,3	5,1	4,9	4,8	4,7	4,6	4,5	4,4	4,3	4,2	4,1	16
	8,5	6,2	5,3	4,8	4,4	4,2	4,0	3,9	3,8	3,7	3,6	3,5	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,8	
	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,7	2,6	2,5	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	
17	15,7	10,7	8,7	7,7	7,0	6,6	6,3	6,0	5,8	5,7	5,5	5,3	5,1	5,0	4,8	4,6	4,5	4,4	4,3	4,3	4,2	4,1	4,0	3,9	17
	8,4	6,1	5,2	4,7	4,3	4,1	3,9	3,8	3,7	3,6	3,5	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,7	
	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	
18	15,4	10,4	8,5	7,5	6,8	6,4	6,1	5,8	5,6	5,5	5,3	5,1	5,0	4,8	4,7	4,5	4,4	4,3	4,2	4,1	4,0	3,9	3,8	3,7	18
	8,3	6,0	5,1	4,6	4,2	4,0	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,6	2,6	2,6	
	4,4	3,5	3,2	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	
19	15,2	10,2	8,3	7,3	6,6	6,2	5,9	5,6	5,5	5,3	5,2	5,0	4,8	4,7	4,5	4,4	4,2	4,1	4,0	3,9	3,8	3,7	3,6	3,5	19
	8,2	5,9	5,0	4,5	4,2	3,9	3,8	3,6	3,5	3,4	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,9	2,8	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,5	
	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,9	
20	14,8	10,0	8,1	7,1	6,5	6,0	5,7	5,4	5,3	5,1	5,0	4,8	4,7	4,5	4,4	4,2	4,1	4,0	3,9	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	20
	8,1	5,8	4,9	4,4	4,1	3,9	3,7	3,6	3,4	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,9	2,8	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	
	4,3	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	
21	14,6	9,8	7,9	7,0	6,3	5,9	5,6	5,3	5,2	5,0	4,9	4,7	4,5	4,4	4,2	4,0	3,9	3,8	3,7	3,5	3,6	3,5	3,4	3,3	21
	8,0	5,8	4,9	4,4	4,0	3,8	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,4	
	4,3	3,5	3,1	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	
22	14,4	9,6	7,8	6,8	6,2	5,8	5,5	5,2	5,1	4,9	4,8	4,6	4,4	4,3	4,1	3,9	3,8	3,7	3,6	3,5	3,5	3,4	3,3	3,2	22
	7,9	5,7	4,8	4,3	4,0	3,8	3,6	3,4	3,3	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	
	4,3	3,4	3,0	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	
23	14,2	9,5	7,7	6,7	6,1	5,6	5,4	5,1	5,0	4,8	4,7	4,5	4,3	4,2	4,0	3,8	3,7	3,6	3,5	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	23
	7,9	5,7	4,8	4,3	4,0	3,7	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	
	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	
24	14,0	9,3	7,6	6,6	6,0	5,6	5,3	5,0	4,9	4,7	4,6	4,4	4,2	4,1	3,9	3,7	3,6	3,5	3,4	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	24
	7,8	5,6	4,7	4,2	3,9	3,7	3,5	3,4	3,2	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	

	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7		
25	13,9	9,2	7,5	6,5	5,9	5,5	5,2	4,9	4,8	4,6	4,5	4,3	4,2	4,0	3,9	3,7	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	25	
	7,8	5,6	4,7	4,2	3,9	3,6	3,5	3,3	3,2	3,1	3,0	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2		26
	4,2	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7		
26	13,7	9,1	7,4	6,4	5,8	5,4	5,1	4,8	4,7	4,5	4,4	4,2	4,1	3,9	3,8	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	26	
	7,7	5,5	4,6	4,1	3,8	3,6	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1		27
	4,2	3,3	3,1	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,7		
27,0	13,6	9,0	7,3	6,3	5,7	5,3	5,1	4,8	4,7	4,5	4,4	4,2	4,0	3,9	3,7	3,5	3,4	3,3	3,2	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	27	
	7,7	5,5	4,6	4,1	3,8	3,6	3,4	3,3	3,1	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1		27
	4,2	3,3	3,1	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,7		

Продолжение приложения 6

v2	v2																							v2		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500		>500	
28	13,5	8,9	7,2	6,3	5,7	5,2	5,0	4,7	4,6	4,4	4,3	4,1	4,0	3,8	3,7	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	28	
	7,6	5,4	4,6	4,1	3,8	3,5	3,4	3,2	3,1	3,0	2,9	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1		29
	4,2	3,3	2,9	2,7	2,6	2,4	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,7	1,6		
29	13,4	8,9	7,1	6,2	5,6	5,2	5,0	4,7	4,6	4,4	4,3	4,1	4,0	3,8	3,6	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	29	
	7,6	5,4	4,5	4,0	3,7	3,5	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0		30
	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6		
30	13,3	8,8	7,1	6,1	5,5	5,1	4,9	4,6	4,5	4,3	4,2	4,0	3,9	3,7	3,6	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	30	
	7,6	5,4	4,5	4,0	3,7	3,5	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,7	2,5	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0		32
	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6		
32	13,2	8,7	7,0	6,0	5,4	5,0	4,8	4,5	4,4	4,2	4,1	3,9	3,8	3,7	3,5	3,4	3,2	3,2	3,1	3,0	2,8	2,7	2,6	2,5	32	
	7,5	5,3	4,5	4,0	3,7	3,4	3,2	3,1	3,0	2,9	2,9	2,8	2,7	2,6	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0		34
	4,1	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6		
34	13,1	8,6	7,0	6,0	5,4	5,0	4,8	4,5	4,4	4,2	4,1	3,9	3,8	3,6	3,5	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,6	2,6	2,5	34	
	7,4	5,3	4,4	3,9	3,6	3,4	3,2	3,1	3,0	2,9	2,2	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9		36
	4,1	3,3	2,9	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,6	1,5		
36	13,0	8,6	6,9	5,9	5,3	4,9	4,7	4,4	4,3	4,1	4,0	3,8	3,7	3,6	3,4	3,3	3,1	3,1	3,0	2,9	2,7	2,6	2,5	2,4	36	
	7,4	5,2	4,4	3,9	3,6	3,3	3,2	3,0	2,9	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9		38
	4,1	3,3	2,9	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,6	1,5		
38	12,9	8,5	6,8	5,8	5,3	4,9	4,7	4,4	4,3	4,1	4,0	3,8	3,7	3,5	3,4	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	38	
	7,3	5,2	4,3	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8		40
	4,1	3,2	2,8	2,6	2,5	2,3	2,3	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5		
40	12,8	8,4	6,7	5,8	5,2	4,8	4,6	4,3	4,2	4,0	3,9	3,7	3,6	3,5	3,3	3,2	3,0	3,0	2,9	2,8	2,6	2,5	2,4	2,3	40	
	7,3	5,2	4,3	3,8	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8		42
	4,1	3,2	2,8	2,6	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5		
42	12,7	8,3	6,7	5,7	5,2	4,8	4,6	4,3	4,2	4,0	3,9	3,7	3,6	3,4	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,4	2,4	2,3	42	
	7,3	5,1	4,3	3,8	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,3	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8		

	4,1	3,2	2,8	2,6	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5		
44	12,5	8,3	6,6	5,6	5,1	4,7	4,5	4,2	4,1	3,9	3,8	3,6	3,5	3,4	3,2	3,1	2,9	2,9	2,8	2,7	2,5	2,4	2,3	2,2	44	
	7,2	5,1	4,3	3,8	3,5	3,2	3,1	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7		46
	4,1	3,2	2,8	2,6	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5		
46	12,4	8,1	6,5	5,6	5,0	4,6	4,4	4,1	4,0	3,8	3,7	3,5	3,4	3,3	3,1	3,0	2,8	2,8	2,7	2,6	2,4	2,3	2,2	2,1	46	
	7,2	5,1	4,2	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7		48
	4,0	3,2	2,8	2,6	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,7	1,7	1,5	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,5		
48	12,3	8,1	6,5	5,6	5,0	4,6	4,4	4,1	4,0	3,8	3,7	3,5	3,4	3,3	3,1	3,0	2,8	2,8	2,7	2,6	2,4	2,3	2,2	2,1	48	
	7,2	5,1	4,2	3,7	3,4	3,2	2,9	2,8	2,8	2,7	2,6	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7		50
	4,0	3,2	2,8	2,6	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,4		
50	12,2	8,0	6,4	5,4	4,9	4,5	4,3	4,0	3,9	3,7	3,6	3,4	3,3	3,2	3,0	2,9	2,7	2,7	2,6	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	50	
	7,2	5,1	4,2	3,7	3,4	3,2	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7		50
	4,0	3,2	2,8	2,6	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,5	1,4		

Продолжение приложения 6

v2	v2																							v2		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500		>500	
55	12,1	7,9	6,3	5,4	4,9	4,5	4,3	4,0	3,9	3,7	3,6	3,4	3,3	3,2	3,0	2,9	2,7	2,7	2,6	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	55	
	7,1	5,0	4,1	3,7	3,4	3,1	3,0	2,8	2,7	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6		60
	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,4	1,4		
60	12,0	7,8	6,2	5,3	4,8	4,4	4,2	3,9	3,8	3,6	3,5	3,3	3,2	3,1	2,9	2,8	2,6	2,6	2,5	2,4	2,2	2,1	2,0	1,9	60	
	7,1	5,0	4,1	3,6	3,3	3,1	2,9	2,8	2,7	2,6	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6		65
	4,0	3,1	2,8	2,5	2,4	2,2	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,4		
65	11,9	7,7	6,1	5,2	4,7	4,3	4,1	3,8	3,7	3,5	3,4	3,2	3,1	3,0	2,8	2,7	2,5	2,5	2,4	2,3	2,1	2,0	1,9	1,8	65	
	7,0	5,0	4,1	3,6	3,3	3,1	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7	1,6	1,6	1,6		70
	4,0	3,1	2,4	2,5	2,4	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,4	1,4	1,4		
70	11,6	7,6	6,0	5,2	4,7	4,3	4,1	3,8	3,7	3,5	3,4	3,2	3,1	3,0	2,8	2,7	2,5	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	1,8	1,7	70	
	7,0	4,9	4,1	3,6	3,3	3,1	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,1	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5		80
	4,0	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,4	1,3		
80	11,6	7,5	6,0	5,1	4,6	4,2	4,0	3,7	3,6	3,4	3,3	3,1	3,0	2,9	2,7	2,6	2,4	2,4	2,3	2,2	2,0	1,9	1,8	1,7	80	
	7,0	4,9	4,0	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5		100
	4,0	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,4	1,3	1,3		
100	11,5	7,4	5,9	5,0	4,1	4,1	3,9	3,7	3,6	3,4	3,3	3,1	3,0	2,8	2,7	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	1,9	1,8	1,7	1,6	100	
	6,9	4,8	4,0	3,5	3,2	3,0	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4		125
	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,3		
125	11,4	7,4	5,8	5,0	4,5	4,1	3,9	3,6	3,5	3,3	3,2	3,0	2,9	2,8	2,6	2,5	2,3	2,3	2,1	2,0	1,9	1,8	1,6	1,5	125	
	6,8	4,8	3,9	3,5	3,2	2,9	2,8	2,6	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4		150
	3,9	3,1	2,7	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2		
150	11,3	7,3	5,7	4,9	4,4	4,0	3,8	3,5	3,4	3,2	3,1	2,9	2,8	2,7	2,5	2,4	2,2	2,2	2,0	1,9	1,8	1,7	1,5	1,4		



	6,8	4,7	3,9	3,4	3,1	2,9	2,8	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,5	1,4	1,4	1,3		
	3,9	3,1	2,7	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2		
200	11,2	7,2	5,6	4,8	4,3	3,9	3,7	3,5	3,4	3,2	3,1	2,9	2,8	2,6	2,5	2,3	2,2	2,1	1,9	1,8	1,7	1,6	1,4	1,3	200	
	6,8	4,7	3,9	3,4	3,2	2,9	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,5	1,4	1,3	1,3		
	3,9	3,0	2,6	2,4	2,3	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,3	1,2	1,2		
400	11,0	7,1	5,6	4,7	4,2	3,8	3,6	3,4	3,3	3,1	3,0	2,8	2,7	2,5	2,4	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,6	1,5	1,4	1,3	400	
	6,7	4,7	3,8	3,4	3,1	2,8	2,7	2,5	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,2		
	3,9	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2	1,1		
1000	10,9	7,0	5,5	4,7	4,2	3,8	3,6	3,4	3,3	3,1	3,0	2,8	2,7	2,5	2,4	2,2	2,1	2,0	1,8	1,7	1,6	1,5	1,3	1,2	1000	
	6,7	4,6	3,8	3,4	3,3	3,0	2,8	2,7	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,4	1,2	1,1		
	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	1,1	1,1		
>1000	10,8	6,9	5,4	4,6	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	3,0	2,9	2,7	2,6	2,4	2,3	2,1	2,0	1,9	1,7	1,6	1,5	1,4	1,2	1,1	>1000	
	6,6	4,6	3,8	3,3	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,4	1,2	1,1	1,0		
	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2	1,1	1,0		

$\frac{R}{N_1 + N_2 + 1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>0,00</b>	$-\infty$	-3,09	-2,88	-2,75	-2,65	-2,58	-2,51	-2,46	-2,41	-2,37
0,01	-2,33	-2,29	-2,26	-2,23	-2,20	-2,17	-2,14	-2,12	-2,10	-2,07
0,02	-2,05	-2,03	-2,01	-2,00	-1,98	-1,96	-1,94	-1,93	-1,91	-1,90
0,03	-1,88	-1,87	-1,85	-1,84	-1,83	-1,81	-1,80	-1,79	-1,77	-1,76
0,04	-1,75	-1,74	-1,73	-1,72	-1,71	-1,70	-1,68	-1,67	-1,66	-1,65
0,05	-1,64	-1,64	-1,63	-1,62	-1,61	-1,60	-1,59	-1,58	-1,57	-1,57
0,06	-1,55	-1,55	-1,54	-1,53	-1,52	-1,51	-1,51	-1,50	-1,49	-1,48
0,07	-1,48	-1,47	-1,46	-1,45	-1,45	-1,44	-1,43	-1,43	-1,42	-1,41
0,08	-1,41	-1,40	-1,39	-1,39	-1,38	-1,37	-1,37	-1,36	-1,35	-1,35
0,09	-1,34	-1,33	-1,33	-1,32	-1,32	-1,31	-1,30	-1,30	-1,29	-1,29
<b>0,10</b>	-1,28	-1,28	-1,27	-1,26	-1,26	-1,25	-1,25	-1,24	-1,24	-1,23
0,11	-1,23	-1,22	-1,22	-1,21	-1,21	-1,20	-1,20	-1,19	-1,19	-1,18
0,12	-1,18	-1,17	-1,17	-1,16	-1,16	-1,15	-1,15	-1,14	-1,14	-1,13
0,13	-1,13	-1,12	-1,12	-1,11	-1,11	-1,10	-1,10	-1,09	-1,09	-1,09
0,14	-1,08	-1,08	-1,07	-1,07	-1,06	-1,06	-1,05	-1,05	-1,05	-1,04
0,15	-1,04	-1,03	-1,03	-1,02	-1,02	-1,02	-1,01	-1,01	-1,00	-1,00
0,16	-0,99	-0,99	-0,99	-0,98	-0,98	-0,97	-0,97	-0,97	-0,96	-0,96
0,17	-0,95	0,95	-0,95	-0,94	-0,94	-0,93	-0,93	-0,93	-0,92	-0,92
0,18	-0,92	-0,91	-0,91	-0,90	-0,90	-0,90	-0,89	-0,89	-0,89	-0,88
0,19	-0,88	-0,87	-0,87	-0,87	-0,86	-0,86	-0,86	-0,85	-0,85	-0,85
<b>0,20</b>	-0,84	-0,84	-0,83	-0,83	-0,83	-0,82	-0,82	-0,82	-0,81	-0,81
0,21	-0,81	-0,80	-0,80	-0,80	-0,79	-0,79	-0,79	-0,78	-0,78	-0,78
0,22	-0,77	-0,77	-0,77	-0,76	-0,76	-0,76	-0,75	-0,75	-0,75	-0,74
0,23	-0,74	-0,74	-0,73	-0,73	-0,73	-0,72	-0,72	-0,72	-0,71	-0,71
0,24	-0,71	-0,70	-0,70	-0,70	-0,69	-0,69	-0,69	0,68	-0,68	-0,68
0,25	-0,67	-0,67	-0,67	-0,67	-0,66	-0,66	-0,66	-0,65	-0,65	-0,65
0,26	-0,64	-0,64	-0,64	-0,63	-0,63	-0,63	-0,63	-0,62	-0,62	-0,62
0,27	-0,61	-0,61	-0,61	-0,60	-0,60	-0,60	-0,60	-0,59	-0,59	-0,59
0,28	-0,58	-0,58	-0,58	-0,57	-0,57	-0,57	-0,57	-0,56	-0,56	-0,56
0,29	-0,55	-0,55	-0,55	-0,54	-0,54	-0,54	-0,54	-0,53	-0,53	-0,53
<b>0,30</b>	-0,53	-0,52	-0,52	-0,52	-0,51	-0,51	-0,51	-0,50	-0,50	-0,50
0,31	-0,50	-0,49	-0,49	-0,49	-0,48	-0,48	-0,48	-0,47	-0,47	-0,47
0,32	-0,47	-0,46	-0,46	-0,46	-0,46	-0,45	-0,45	-0,45	-0,45	-0,44
0,33	-0,44	-0,44	-0,43	-0,43	-0,43	-0,43	-0,43	-0,42	-0,42	-0,42
0,34	-0,41	-0,41	-0,41	-0,40	-0,40	-0,40	-0,40	-0,39	-0,39	-0,39
0,35	-0,39	-0,38	-0,38	-0,38	-0,37	-0,37	-0,37	-0,37	-0,36	-0,36
0,36	-0,36	-0,36	-0,35	-0,35	-0,35	-0,35	-0,34	-0,34	-0,34	-0,33
0,37	-0,33	-0,33	-0,33	-0,32	-0,32	-0,32	-0,32	-0,31	-0,31	-0,31
0,38	-0,31	-0,30	-0,30	-0,30	-0,30	-0,29	-0,29	-0,29	-0,28	-0,28
0,39	-0,28	-0,28	-0,27	-0,27	-0,27	-0,27	-0,26	-0,26	-0,26	-0,26
<b>0,40</b>	-0,25	-0,25	-0,25	-0,25	-0,24	-0,24	-0,24	-0,24	-0,23	-0,23
0,41	-0,23	-0,23	-0,22	-0,22	-0,22	-0,21	-0,21	-0,21	-0,21	-0,20
0,42	-0,20	-0,20	-0,20	-0,19	-0,19	-0,19	-0,19	-0,18	-0,18	-0,18
0,43	-0,18	-0,17	-0,17	-0,17	-0,17	-0,16	-0,16	-0,16	-0,16	-0,15
0,44	-0,15	-0,15	-0,15	-0,14	-0,14	-0,14	-0,14	-0,13	-0,13	-0,13
0,45	-0,13	-0,12	-0,12	-0,12	-0,12	-0,11	-0,11	-0,11	-0,11	-0,10
0,46	-0,10	-0,10	-0,10	-0,09	-0,09	-0,09	-0,09	-0,08	-0,08	-0,08
0,47	-0,08	-0,07	-0,07	-0,07	-0,07	-0,06	-0,06	-0,06	-0,06	-0,05
0,48	-0,05	-0,05	-0,05	-0,04	-0,04	-0,04	-0,04	-0,03	-0,03	-0,03
0,49	-0,03	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	-0,00
<b>0,50</b>	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02

$\frac{R}{N_1 + N_2 + 1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,51	0,03	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05
0,52	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07
0,53	0,08	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09	0,09	0,10	0,10
0,54	0,10	0,10	0,11	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12
0,55	0,13	0,13	0,13	0,13	0,14	0,14	0,14	0,14	0,15	0,15
0,56	0,15	0,15	0,16	0,16	0,16	0,16	0,17	0,17	0,17	0,17
0,57	0,18	0,18	0,18	0,18	0,19	0,19	0,19	0,19	0,20	0,20
0,58	0,20	0,20	0,21	0,21	0,21	0,21	0,22	0,22	0,22	0,23
0,59	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,25
<b>0,60</b>	0,25	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,27	0,27	0,27	0,28
0,61	0,28	0,28	0,28	0,29	0,29	0,29	0,30	0,30	0,30	0,30
0,62	0,31	0,31	0,31	0,31	0,32	0,32	0,32	0,32	0,33	0,33
0,63	0,33	0,33	0,34	0,34	0,34	0,35	0,35	0,35	0,35	0,36
0,64	0,36	0,36	0,36	0,37	0,37	0,37	0,37	0,38	0,38	0,38
0,65	0,39	0,39	0,39	0,39	0,40	0,40	0,40	0,40	0,41	0,41
0,66	0,41	0,42	0,42	0,42	0,42	0,43	0,43	0,43	0,43	0,44
0,67	0,44	0,44	0,45	0,45	0,45	0,46	0,46	0,46	0,46	0,46
0,68	0,47	0,47	0,47	0,48	0,48	0,48	0,48	0,49	0,49	0,49
0,69	0,50	0,50	0,50	0,50	0,51	0,51	0,51	0,52	0,52	0,52
<b>0,70</b>	0,52	0,53	0,53	0,53	0,54	0,54	0,54	0,54	0,55	0,55
0,71	0,55	0,56	0,56	0,56	0,57	0,57	0,57	0,57	0,58	0,58
0,72	0,58	0,59	0,59	0,59	0,59	0,60	0,60	0,60	0,61	0,61
0,73	0,61	0,62	0,62	0,62	0,63	0,63	0,63	0,63	0,64	0,64
0,74	0,64	0,65	0,65	0,65	0,66	0,66	0,66	0,67	0,67	0,67
0,75	0,67	0,68	0,68	0,68	0,69	0,69	0,69	0,70	0,70	0,70
0,76	0,71	0,71	0,71	0,72	0,72	0,72	0,73	0,73	0,73	0,74
0,77	0,74	0,74	0,75	0,75	0,75	0,76	0,76	0,76	0,77	0,77
0,78	0,77	0,78	0,78	0,78	0,79	0,79	0,79	0,80	0,80	0,80
0,79	0,81	0,81	0,81	0,82	0,82	0,82	0,83	0,83	0,83	0,84
<b>0,80</b>	0,84	0,85	0,85	0,85	0,86	0,86	0,86	0,87	0,87	0,87
0,81	0,88	0,88	0,89	0,89	0,89	0,90	0,90	0,90	0,91	0,91
0,82	0,92	0,92	0,92	0,93	0,93	0,93	0,94	0,94	0,95	0,95
0,83	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99
0,84	0,99	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03
0,85	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08
0,86	1,08	1,09	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	1,11	1,12	1,12
0,87	1,13	1,13	1,14	1,14	1,15	1,15	1,16	1,16	1,17	1,17
0,88	1,18	1,18	1,19	1,19	1,20	1,20	1,21	1,21	1,22	1,22
0,89	1,23	1,23	1,24	1,24	1,25	1,25	1,26	1,26	1,27	1,28
<b>0,90</b>	1,28	1,29	1,29	1,30	1,30	1,31	1,32	1,32	1,33	1,33
0,91	1,34	1,35	1,35	1,36	1,37	1,37	1,38	1,39	1,39	1,40
0,92	1,41	1,41	1,42	1,43	1,43	1,44	1,45	1,45	1,46	1,47
0,93	1,48	1,48	1,49	1,50	1,51	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55
0,94	1,55	1,56	1,57	1,58	1,59	1,60	1,61	1,62	1,63	1,64
0,95	1,64	1,65	1,66	1,67	1,68	1,70	1,71	1,72	1,73	1,74
0,96	1,75	1,76	1,77	1,79	1,80	1,81	1,83	1,84	1,85	1,87
0,97	1,88	1,90	1,91	1,93	1,94	1,96	1,98	2,00	2,01	2,03
0,98	2,05	2,07	2,10	2,12	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29
0,99	2,33	2,37	2,41	2,46	2,51	2,58	2,65	2,75	2,88	3,09

Значения X-критерия Ван-дер-Вардена

v	$N_1 - N_2 = 0$ или 1		$N_1 - N_2 = 2$ или 3		$N_1 - N_2 = 4$ или 5	
	5%	1%	5%	1%	5%	1%
8	2,40	-	2,30	-	-	-
9	2,48	-	2,40	-	-	-
10	2,60	3,20	2,49	3,10	2,30	-
11	2,72	3,40	2,58	3,40	2,40	-
12	2,86	3,60	2,79	3,58	2,68	3,40
13	2,96	3,71	2,91	3,64	2,78	3,50
14	3,11	3,94	3,06	3,88	3,00	3,76
15	3,24	4,07	3,19	4,05	3,06	3,88
16	3,39	4,26	3,36	4,25	3,28	4,12
17	3,49	4,44	3,44	4,37	3,36	4,23
18	3,63	4,60	3,60	4,58	3,53	4,50
19	3,73	4,77	3,69	4,71	3,61	4,62
20	3,86	4,94	3,84	4,92	3,78	4,85
21	3,96	5,10	3,92	5,05	3,85	4,96
22	4,08	5,26	4,06	5,24	4,01	5,17
23	4,18	5,40	4,15	5,36	4,08	5,27
24	4,29	5,55	4,27	5,53	4,23	5,48
25	4,39	5,68	4,36	5,65	4,30	5,58
26	4,50	5,83	4,48	5,81	4,44	5,76
27	4,59	5,95	4,56	5,92	4,51	5,85
28	4,68	6,09	4,68	6,07	4,64	6,03
29	4,78	6,22	4,76	6,19	4,72	6,13
30	4,88	6,35	4,87	6,34	4,84	6,30
31	4,97	6,47	4,95	6,44	4,91	6,39
32	5,07	6,60	5,06	6,58	5,03	6,55
33	5,15	6,71	5,13	6,69	5,10	6,64
34	5,25	6,84	5,24	6,82	5,21	6,79
35	5,33	6,95	5,31	6,92	5,28	6,88
36	5,42	7,06	5,41	7,05	5,38	7,02
37	5,50	7,17	5,48	7,15	5,45	7,11
38	5,59	7,28	5,58	7,27	5,55	7,25
39	5,67	7,39	5,65	7,37	5,62	7,33
40	5,75	7,50	5,74	7,49	5,72	7,47
41	5,83	7,62	5,81	7,60	5,79	7,56
42	5,91	7,72	5,90	7,71	5,88	7,69
43	5,99	7,82	5,97	7,81	5,95	7,77
44	6,04	7,93	6,06	7,92	6,04	7,90
45	6,14	8,02	6,12	8,01	6,10	7,98
46	6,21	8,13	6,21	8,12	6,19	8,10
47	6,29	8,22	6,27	8,21	6,25	8,18
48	6,36	8,32	6,35	8,31	6,34	8,29
49	6,43	8,41	6,42	8,40	6,39	8,37
50	6,50	8,51	6,51	8,50	6,48	8,48

Значение Т-критерия Уайта

N <sub>1</sub> (большая выборка)	N <sub>2</sub> (меньшая выборка)													
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Уровень значимости 5 %														
5		6	11	17										
6		7	12	18	26									
7		7	13	20	27	36								
8	3	8	14	21	29	38	49							
9	3	8	15	22	31	40	51	63						
10	3	9	15	23	32	42	53	65	78					
11	4	9	16	24	34	44	55	68	81	96				
12	4	10	17	26	35	46	58	71	85	99	115			
13	4	10	18	27	37	48	60	73	88	103	119	137		
14	4	11	19	28	38	50	63	76	91	106	123	141	160	
15	4	11	20	29	40	52	65	79	94	110	127	145	164	185
16	4	12	21	31	42	54	67	82	97	114	131	150	169	
17	5	12	21	32	43	56	70	84	100	117	135	154		
18	5	13	22	33	45	58	72	87	103	121	139			
19	5	13	23	34	46	60	74	90	107	124				
20	5	14	24	35	48	62	77	93	110					
21	6	14	25	37	50	64	79	95						
22	6	15	26	38	51	66	82							
23	6	15	27	39	53	68								
24	6	16	28	40	55									
25	6	16	28	42										
26	7	17	29											
27	7	17												
Уровень значимости 1 %														
5				15										
6			10	16	23									
7			10	17	24	32								
8			11	17	25	34	43							
9		6	11	18	26	35	45	56						
10		6	12	19	27	37	47	58	71					
11		6	12	20	28	38	49	61	74	87				
12		7	13	21	30	40	51	63	76	90	106			
13		7	14	22	31	41	53	65	79	93	109	125		
14		7	14	22	32	43	54	67	81	96	112	129	147	
15		8	15	23	33	44	56	70	84	99	115	133	151	171
16		8	15	24	34	46	58	72	86	102	119	137	155	
17		8	16	25	36	47	60	74	89	105	122	140		
18		8	16	26	37	49	62	76	92	108	125			
19	3	9	17	27	38	50	64	78	94	111				
20	3	9	18	28	39	52	66	81	97					
21	3	9	18	29	40	53	68	83						
22	3	10	19	29	42	55	70							
23	3	10	19	30	43	57								
24	3	10	20	31	44									
25	3	11	20	32										
26	3	11	21											
27	4	11	21											

Значение Z-критерия .....											
N	Уровень значимости		N	Уровень значимости		N	Уровень значимости		N	Уровень значимости	
	5%	1%		5%	1%		5%	1%		5%	1%
6	6	-	30	21	23	54	35	37	78	49	51
7	7	-	31	22	24	55	36	38	79	49	52
8	8	8	32	23	24	56	36	39	80	50	52
9	8	9	33	23	25	57	37	39	81	50	53
10	9	10	34	24	25	58	37	40	82	51	54
11	10	11	35	24	26	59	38	40	83	51	54
12	10	11	36	25	27	60	39	41	84	52	55
13	11	12	37	25	27	61	39	41	85	53	55
14	12	13	38	26	28	62	40	42	86	53	56
15	12	13	39	27	28	63	40	43	87	54	56
16	13	14	40	27	29	64	41	43	88	54	57
17	13	15	41	28	30	65	41	44	89	55	58
18	14	15	42	28	30	66	42	44	90	55	58
19	15	16	43	29	31	67	42	45	91	56	59
20	15	17	44	29	31	68	43	46	92	56	59
21	16	17	45	30	32	69	44	46	93	57	60
22	17	18	46	31	33	70	44	47	94	57	60
23	17	19	47	31	33	71	45	47	95	58	61
24	18	19	48	32	34	72	45	48	96	59	62
25	18	20	49	32	34	73	46	48	97	59	62
26	19	20	50	33	35	74	46	49	98	60	63
27	20	21	51	33	36	75	47	50	99	60	63
28	20	22	52	34	36	76	48	50	100	61	64
29	21	22	53	35	37	77	48	51	-	-	-

Значение W-критерия Вилкоксона					
	Уровень значимости			Уровень значимости	
	5%	1%		5%	1%
6	1	-	16	31	21
7	3	-	17	36	24
8	5	1	18	41	29
9	7	3	19	47	33
10	9	4	20	53	39
11	12	6	21	60	44
12	15	8	22	67	50
13	18	11	23	74	56
14	22	14	24	82	62
15	26	17	25	90	69

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9430	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9880
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986		
3,0	0,9988	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9910	0,9910	0,9910	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9950	0,9950	0,9950	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>0,0</b>	00000	00798	01596	02393	03191	03988	04784	05581	06376	07171
0,1	07966	08759	09552	10343	11134	11294	12712	13499	14285	15069
0,2	15852	16633	17413	18191	18967	19741	20514	21284	22052	22818
0,3	23582	24344	25103	25860	26614	27366	28115	28862	29605	30346
0,4	31084	31819	32551	33280	34006	34729	35448	36164	36877	37587
0,5	38292	38995	39694	40389	41080	41768	42452	43132	43809	44481
0,6	45149	45814	46474	47131	47783	48431	49075	49714	50350	50981
0,7	51607	52230	52848	53461	54070	54675	55275	55870	56461	57047
0,8	57629	58206	58778	59346	59909	60468	61021	61570	62114	62653
0,9	63188	63718	64243	64763	65278	65789	66294	66795	67291	67783
<b>1,0</b>	68269	68750	69227	69699	70166	70628	71086	71538	71986	72429
1,1	72867	73300	73729	74152	74571	74986	75395	75800	76200	76595
1,2	76986	77372	77754	78130	78502	78870	79233	79592	79945	80295
1,3	80640	80980	81316	81648	81975	82298	82617	82931	83241	83547
1,4	83849	84146	84439	84728	85013	85294	85571	85844	86113	86378
1,5	86639	86896	87149	87398	87644	87886	88124	88358	88589	88817
1,6	89040	89260	89477	89690	89899	90106	90309	90508	90704	90897
1,7	91087	91273	91457	91637	91814	91988	92159	92327	92492	92655
1,8	92814	92970	93124	93275	93423	93569	93711	93852	93989	94124
1,9	94257	94387	94515	94639	94762	94882	95000	95116	95230	95341
<b>2,0</b>	95450	95557	95662	95764	95865	95964	96060	96155	96247	96338
2,1	96247	96514	96599	96683	96765	96844	96923	96999	97074	97148
2,2	97219	97289	97358	97425	97491	97555	97618	97679	97739	97798
2,3	97855	97911	97966	98019	98531	98571	98611	98649	98686	98723
2,4	98360	98405	98488	98490	98531	98571	98611	98649	98686	98723
2,5	98758	98793	98826	98859	98891	98923	98953	98983	99012	99040
2,6	99068	99095	99121	99146	99171	99195	99219	99241	99265	99285
2,7	99307	99327	99347	99367	99386	99404	99422	99439	99456	99473
2,8	99489	99505	99520	99535	99549	99563	99576	99590	99602	99615
2,9	99627	99639	99650	99661	99672	99682	99692	99702	99712	99721
3,0	99730	99739	99747	99755	99763	99771	99779	99786	99793	99800
3,1	99806	99813	99819	99825	99831	99837	99842	99848	99853	99858
3,2	99863	99867	99872	99876	99880	99885	99889	99892	99896	99900
3,3	99903	99907	99910	99913	99916	99919	99922	99925	99928	99930
3,4	99933	99935	99937	99940	99942	99944	99946	99948	99950	99952
3,5	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99963	99964	99966	99967
3,6	99968	99969	99971	99972	99973	99974	99975	99976	99977	99978
3,7	99978	99979	99980	99981	99982	99982	99983	99984	99984	99985
3,8	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989	99989	9999	9999
3,9	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992	99993	99993	99993
<b>4,0</b>	99994	99996	99997	99998	99999	99999	-	-	-	-



x			$f^{IV}(x)$	x		
<b>0,00</b>	0,39894	+0,00000	+1,19683	<b>0,50</b>	0,35207	+0,48409
0,01	0,39892	0,01197	1,19653	0,51	0,35029	0,48940
0,02	0,39886	0,02393	1,19563	0,52	0,34849	0,49460
0,03	0,39876	0,03588	1,19414	0,53	0,34667	0,49950
0,04	0,39862	0,04781	1,19204	0,54	0,34482	0,50430
0,05	0,39844	0,05972	1,18936	0,55	0,34294	0,50880
0,06	0,39822	0,07159	1,18608	0,56	0,34105	0,51300
0,07	0,39797	0,08344	1,18221	0,57	0,33912	0,51710
0,08	0,39767	0,09524	1,17775	0,58	0,33718	0,52090
0,09	0,39733	0,10699	1,17271	0,59	0,33521	0,52440
<b>0,10</b>	0,39695	+0,11869	+1,16708	<b>0,60</b>	0,33322	+0,52770
0,11	0,39654	0,13033	1,16088	0,61	0,33121	0,53090
0,12	0,39608	0,14190	1,15410	0,62	0,32918	0,53380
0,13	0,39559	0,15341	1,14676	0,63	0,32713	0,53640
0,14	0,39505	0,16484	1,13885	0,64	0,32506	0,53890
0,15	0,39448	0,18618	1,13038	0,65	0,32297	0,54110
0,16	0,39387	0,18744	1,12137	0,66	0,32086	0,54300
0,17	0,39322	0,19864	1,11180	0,67	0,31874	0,54480
0,18	0,39181	0,20968	1,10170	0,68	0,31659	0,54630
0,19	0,39104	0,22046	1,09106	0,69	0,31443	0,54750
<b>0,20</b>	0,39104	+0,23150	+1,07990	<b>0,70</b>	0,31225	+0,54880
0,21	0,39024	0,24224	1,06823	0,71	0,31006	0,54940
0,22	0,38940	0,25286	1,05604	0,72	0,30785	0,55000
0,23	0,38853	0,26336	1,04335	0,73	0,30563	0,55040
0,24	0,38762	0,27373	1,03018	0,74	0,30339	0,55050
0,25	0,38667	0,28396	1,01651	0,75	0,30114	0,55050
0,26	0,38568	0,29405	1,00238	0,76	0,29887	0,55020
0,27	0,38466	0,30401	0,98778	0,77	0,29659	0,54970
0,28	0,38361	0,31381	0,97273	0,78	0,29431	0,54900
0,29	0,38251	0,32346	0,95723	0,79	0,29200	0,54800
<b>0,30</b>	0,38139	+0,33295	+0,94130	<b>0,80</b>	0,28969	+0,54660
0,31	0,38023	0,34228	0,92495	0,81	0,28737	0,54550
0,32	0,37903	0,35145	0,90819	0,82	0,28504	0,54400
0,33	0,37780	0,36045	0,89103	0,83	0,28269	0,54220
0,34	0,38654	0,36927	0,87348	0,84	0,28064	0,54030
0,35	0,37524	0,37791	0,85555	0,85	0,27799	0,53810
0,36	0,37391	0,38968	0,83726	0,86	0,27562	0,53570
0,37	0,37255	0,39466	0,81862	0,87	0,27324	0,53320
0,38	0,37115	0,40275	0,79963	0,88	0,27086	0,53040
0,39	0,36973	0,41065	0,78032	0,89	0,26848	0,52750
<b>0,40</b>	0,36827	+0,41835	+0,76070	<b>0,90</b>	0,26609	+0,52440
0,41	0,36678	0,42586	0,74077	0,91	0,26369	0,52110
0,42	0,36526	0,43317	0,72056	0,92	0,26129	0,51760
0,43	0,36371	0,44027	0,70007	0,93	0,25888	0,51400
0,44	0,36213	0,44717	0,67932	0,94	0,25647	0,51020
0,45	0,36053	0,45386	0,65832	0,95	0,25406	0,50620
0,46	0,35889	0,46034	0,63709	0,96	0,25164	0,50210
0,47	0,35723	0,46660	0,61564	0,97	0,24923	0,49770
0,48	0,35553	0,47265	0,59398	0,98	0,24681	0,49330
0,49	0,35381	0,47848	0,57213	0,99	0,24439	0,48870
<b>0,50</b>	0,35207	+0,48409	+0,55010	<b>1,00</b>	0,24197	+0,48300

$x$	$f(x)$	$f^{III}(x)$	$f^{IV}(x)$	$x$	$f(x)$	$f^{III}(x)$	$f^{IV}(x)$
<b>1,00</b>	0,24197	+0,48394	-0,48394	<b>1,50</b>	0,12952	+0,14571	-0,70425
1,01	0,23955	0,47903	0,49826	1,51	0,12758	0,13869	0,69911
1,02	0,23713	0,47398	0,51220	1,52	0,12566	0,13172	0,69416
1,03	0,23471	0,46879	0,52573	1,53	0,12376	0,12481	0,68821
1,04	0,23230	0,46346	0,53887	1,54	0,12188	0,11795	0,68326
1,05	0,22988	0,45801	0,55160	1,55	0,12001	0,11114	0,67731
1,06	0,22747	0,45243	0,56392	1,56	0,11816	0,10440	0,67136
1,07	0,22506	0,44673	0,57584	1,57	0,11632	0,09772	0,66541
1,08	0,22265	0,44092	0,58734	1,58	0,11451	0,09111	0,65946
1,09	0,22025	0,43499	0,59842	1,59	0,11270	0,08457	0,65351
<b>1,10</b>	0,21785	+0,42895	-0,60909	<b>1,60</b>	0,11092	+0,07809	+0,64756
1,11	0,21546	0,42281	0,61934	1,61	0,10916	0,07168	0,64161
1,12	0,21307	0,41657	0,62917	1,62	0,10741	0,06535	0,63566
1,13	0,21069	0,41023	0,63857	1,63	0,10568	0,05910	0,62971
1,14	0,20831	0,40380	0,64755	1,64	0,10396	0,05292	0,62376
1,15	0,20594	0,39728	0,65611	1,65	0,10227	0,04683	0,61781
1,16	0,20357	0,39068	0,66424	1,66	0,10059	0,04081	0,61186
1,17	0,20121	0,38399	0,67195	1,67	0,09893	0,03488	0,60591
1,18	0,19886	0,37724	0,67924	1,68	0,09728	0,02903	0,59996
1,19	0,19652	0,37041	0,68610	1,69	0,09566	0,02326	0,59401
<b>1,20</b>	0,19419	+0,36352	-0,69254	<b>1,70</b>	0,09405	+0,01759	+0,58806
1,21	0,19186	0,35656	0,69856	1,71	0,09246	0,01200	0,58211
1,22	0,18954	0,34955	0,70416	1,72	0,09089	0,00650	0,57616
1,23	0,18724	0,34248	0,70935	1,73	0,08933	+0,00110	0,57021
1,24	0,18494	0,33536	0,71411	1,74	0,08780	-0,00422	+0,56426
1,25	0,18265	0,32820	0,71847	1,75	0,08628	0,00944	-0,55831
1,26	0,18037	0,32099	0,72241	1,76	0,08478	0,01456	0,55236
1,27	0,17810	0,31375	0,72594	1,77	0,08329	0,01959	0,54641
1,28	0,17585	0,30648	0,72907	1,78	0,08183	0,02453	0,54046
1,29	0,17360	0,29917	0,73180	1,79	0,08038	0,02937	0,53451
<b>1,30</b>	0,17137	+0,29184	-0,73413	<b>1,80</b>	0,07895	-0,03411	-0,46956
1,31	0,16915	0,28499	0,73606	1,81	0,07754	0,03875	0,46361
1,32	0,16694	0,27712	0,73760	1,82	0,07614	0,04329	0,45766
1,33	0,16474	0,26974	0,73876	1,83	0,07477	0,04774	0,45171
1,34	0,16256	0,26235	0,73953	1,84	0,07341	0,05208	0,44576
1,35	0,16038	0,25495	0,73993	1,85	0,07207	0,05633	0,43981
1,36	0,15823	0,24755	0,73995	1,86	0,07074	0,06047	0,43386
1,37	0,15608	0,24015	0,73961	1,87	0,06943	0,06452	0,42791
1,38	0,15395	0,23276	0,73890	1,88	0,06814	0,06846	0,42196
1,39	0,15183	0,22538	0,73784	1,89	0,06687	0,07231	0,41601
<b>1,40</b>	0,14973	+0,21800	-0,73642	<b>1,90</b>	0,06562	-0,07605	-0,36956
1,41	0,14764	0,21065	0,73466	1,91	0,06438	0,07969	0,36361
1,42	0,14556	0,20331	0,73256	1,92	0,06316	0,08323	0,35766
1,43	0,14350	0,19600	0,73012	1,93	0,06195	0,08667	0,35171
1,44	0,14146	0,18871	0,72736	1,94	0,06077	0,09002	0,34576
1,45	0,13943	0,18145	0,72427	1,95	0,05959	0,09326	0,33981
1,46	0,13742	0,17423	0,72087	1,96	0,05844	0,09640	0,33386
1,47	0,13542	0,16704	0,71716	1,97	0,05730	0,09944	0,32791
1,48	0,13344	0,15988	0,71315	1,98	0,05618	0,10239	0,32196
1,49	0,13147	0,15277	0,70885	1,99	0,05508	0,10523	0,31601
<b>1,50</b>	0,12952	+0,14571	-0,70425	<b>2,00</b>	0,05399	-0,10798	-0,26956

x	$f(x)$	$f^{III}(x)$	$f^{IV}(x)$	x	$f(x)$	$f^{III}(x)$	$f^{IV}(x)$
<b>2,00</b>	0,05399	-0,10798	-0,26996	<b>2,50</b>	0,01753	-0,14242	+0,07997
2,01	0,05292	0,11063	0,26027	2,51	0,01709	0,14160	0,08360
2,02	0,05186	0,11319	0,25064	2,52	0,01667	0,14075	0,08710
2,03	0,05082	0,11565	0,24109	2,53	0,01625	0,13986	0,09047
2,04	0,04980	0,11801	0,23161	2,54	0,01585	0,13894	0,09371
2,05	0,04879	0,12028	0,22220	2,55	0,01545	0,13798	0,09683
2,06	0,04780	0,12245	0,21287	2,56	0,01506	0,13700	0,09683
2,07	0,04682	0,12454	0,20363	2,57	0,01468	0,13599	0,09982
2,08	0,04586	0,12653	0,19448	2,58	0,01431	0,13495	0,10268
2,09	0,04491	0,12843	0,18542	2,59	0,01394	0,13388	0,10542
<b>2,10</b>	0,04398	-0,13024	-0,17646	<b>2,60</b>	0,01358	-0,13279	0,10804
2,11	0,04307	0,13196	0,16759	2,61	0,01323	0,13167	+0,11053
2,12	0,04217	0,13359	0,15883	2,62	0,01289	0,13053	0,11291
2,13	0,04128	0,13513	0,15017	2,63	0,01256	0,12937	0,11517
2,14	0,04041	0,13659	0,14162	2,64	0,01223	0,12818	0,11732
2,15	0,03955	0,13797	0,13319	2,65	0,01191	0,12698	0,11935
2,16	0,03871	0,13926	0,12486	2,66	0,01160	0,12576	0,12127
2,17	0,03788	0,14046	0,11665	2,67	0,01130	0,12452	0,12308
2,18	0,03706	0,14159	0,10856	2,68	0,01100	0,12326	0,12479
2,19	0,03626	0,14263	0,10059	2,69	0,01071	0,12199	0,12638
<b>2,20</b>	0,03547	-0,14360	-0,09275	<b>2,70</b>	0,01042	-0,12071	0,12787
2,21	0,03470	0,14449	0,08502	2,71	0,01014	0,11941	+0,12926
2,22	0,03394	0,14530	0,07743	2,72	0,00987	0,11810	0,13055
2,23	0,03319	0,14604	0,06996	2,73	0,00961	0,11677	0,13174
2,24	0,03246	0,14670	0,06263	2,74	0,00935	0,11544	0,13283
2,25	0,03174	0,14729	0,05542	2,75	0,00909	0,11410	0,13383
2,26	0,03103	0,14781	0,04835	2,76	0,00885	0,11274	0,13473
2,27	0,03034	0,14826	0,04141	2,77	0,00861	0,11139	0,13555
2,28	0,02965	0,14864	0,03461	2,78	0,00837	0,11002	0,13627
2,29	0,02898	0,14895	0,02794	2,79	0,00814	0,10865	0,13691
<b>2,30</b>	0,02833	-0,14920	-0,02141	<b>2,80</b>	0,00792	-0,10727	0,13746
2,31	0,02768	0,14938	0,01502	2,81	0,00770	0,10589	+0,13793
2,32	0,02705	0,14950	0,00877	2,82	0,00748	0,10450	0,13832
2,33	0,02643	0,14956	-0,00266	2,83	0,00727	0,10312	0,13863
2,34	0,02582	0,14955	+0,00332	2,84	0,00707	0,10173	0,13886
2,35	0,02522	0,14949	0,00915	2,85	0,00687	0,10034	0,13902
2,36	0,02463	0,14937	0,01485	2,86	0,00668	0,09895	0,13912
2,37	0,02406	0,14919	0,02040	2,87	0,00649	0,09755	0,13906
2,38	0,02349	0,14896	0,02582	2,88	0,00631	0,09616	0,13894
2,39	0,02294	0,14868	0,03109	2,89	0,00613	0,09478	0,13875
<b>2,40</b>	0,02239	-0,14834	+0,03622	<b>2,90</b>	0,00595	-0,09339	+0,13850
2,41	0,02186	0,14795	0,04122	2,91	0,00578	0,09201	0,13819
2,42	0,02134	0,14752	0,04607	2,92	0,00562	0,09063	0,13782
2,43	0,02083	0,14703	0,05079	2,93	0,00545	0,08925	0,13739
2,44	0,02033	0,14650	0,05537	2,94	0,00530	0,08788	0,13691
2,45	0,01984	0,14593	0,05981	2,95	0,00514	0,08651	0,13638
2,46	0,01936	0,14531	0,06411	2,96	0,00499	0,08515	0,13579
2,47	0,01889	0,14464	0,06828	2,97	0,00485	0,08380	0,13515
2,48	0,01842	0,14394	0,07231	2,98	0,00471	0,08245	0,13446
2,49	0,01797	0,14320	0,07621	2,99	0,00457	0,08111	0,1337
<b>2,50</b>	0,01753	-0,14242	+0,07997	<b>3,00</b>	0,00443	-0,07977	+0,13296

x	$f(x)$	$f^{III}(x)$	$f^{IV}(x)$	x	$f(x)$	$f^{III}(x)$	$f^{IV}(x)$
<b>3,00</b>	0,00443	-0,07977	+0,13296	<b>3,50</b>	0,00087	-0,02825	+0,06943
3,01	0,00430	0,07845	0,13214	3,51	0,00084	0,02757	0,06814
3,02	0,00417	0,077130	0,13128	3,52	0,00081	0,02689	0,06686
3,03	0,00405	0,07582	0,13038	3,53	0,00079	0,02623	0,06558
3,04	0,00393	0,07452	0,12944	3,54	0,00076	0,02558	0,06432
3,05	0,00381	0,07323	0,12847	3,55	0,00073	0,02494	0,06308
3,06	0,00370	0,07195	0,12747	3,56	0,00071	0,02432	0,06184
3,07	0,00358	0,07068	0,12643	3,57	0,00068	0,02370	0,06062
3,08	0,00348	0,06943	0,12536	3,58	0,00066	0,02310	0,05941
3,09	0,00337	0,06818	0,12426	3,59	0,00063	0,02252	0,05821
<b>3,10</b>	0,00327	-0,06694	+0,12313	<b>3,60</b>	0,00061	-0,02194	+0,05703
3,11	0,00317	0,06572	0,12198	3,61	0,00059	0,02138	0,05586
3,12	0,00307	0,06450	0,12080	3,62	0,00057	0,02082	0,05471
3,13	0,00298	0,06330	0,11960	3,63	0,00055	0,02028	0,05357
3,14	0,00288	0,06211	0,11838	3,64	0,00053	0,01975	0,05244
3,15	0,00279	0,06093	0,11714	3,65	0,00051	0,01923	0,05133
3,16	0,00271	0,05977	0,11588	3,66	0,00049	0,01873	0,05023
3,17	0,00262	0,05861	0,11460	3,67	0,00047	0,01823	0,04915
3,18	0,00254	0,05747	0,11330	3,68	0,00046	0,01774	0,04808
3,19	0,00246	0,05635	0,11199	3,69	0,00044	0,01727	0,04703
<b>3,20</b>	0,00238	-0,05523	+0,11066	<b>3,70</b>	0,00042	-0,01680	+0,04599
3,21	0,00231	0,05413	0,10933	3,71	0,00041	0,01635	0,04497
3,22	0,00224	0,05305	0,10798	3,72	0,00039	0,01590	0,04396
3,23	0,00216	0,05198	0,10662	3,73	0,00038	0,01547	0,04297
3,24	0,00210	0,05092	0,10525	3,74	0,00037	0,01504	0,04200
3,25	0,0020	0,04987	0,10387	3,75	0,00035	0,01463	0,04103
3,26	0,00196	0,04884	0,10249	3,76	0,00034	0,01422	0,04009
3,27	0,00190	0,04782	0,10110	3,77	0,00033	0,01383	0,03916
3,28	0,00184	0,04682	0,09970	3,78	0,00031	0,01344	0,03824
3,29	0,00178	0,04583	0,09830	3,79	0,00030	0,01306	0,03734
<b>3,30</b>	0,00172	-0,04485	+0,09690	<b>3,80</b>	0,00029	-0,01269	+0,03464
3,31	0,00167	0,04389	0,09549	3,81	0,00028	0,01233	0,03559
3,32	0,00161	0,04294	0,09409	3,82	0,00027	0,01198	0,03473
3,33	0,00156	0,04201	0,09268	3,83	0,00026	0,01164	0,03389
3,34	0,00151	0,04109	0,09128	3,84	0,00025	0,01130	0,03307
3,35	0,00146	0,04018	0,08987	3,85	0,00024	0,01098	0,03226
3,36	0,00141	0,03929	0,08847	3,86	0,00023	0,01066	0,03146
3,37	0,00136	0,03841	0,08707	3,87	0,00022	0,01035	0,03068
3,38	0,00132	0,03755	0,08567	3,88	0,00021	0,01004	0,02991
3,39	0,00127	0,03670	0,08428	3,89	0,00021	0,00975	0,02916
<b>3,40</b>	0,00123	-0,03586	+0,08290	<b>3,90</b>	0,00020	-0,00946	+0,02842
3,41	0,00119	0,03504	0,08152	3,91	0,00019	0,00918	0,02770
3,42	0,00115	0,03423	0,08014	3,92	0,00018	0,00891	0,02699
3,43	0,00111	0,03344	0,07877	3,93	0,00018	0,00864	0,02630
3,44	0,00107	0,03266	0,07741	3,94	0,00017	0,00838	0,02562
3,45	0,00104	0,03189	0,07606	3,95	0,00016	0,00813	0,02495
3,46	0,00100	0,03114	0,07472	3,96	0,00016	0,00788	0,02430
3,47	0,00097	0,03040	0,07338	3,97	0,00015	0,00764	0,02366
3,48	0,00094	0,02967	0,07205	3,98	0,00014	0,00741	0,02303
3,49	0,00090	0,02895	0,07074	3,99	0,00014	0,00718	0,02242
<b>3,50</b>	0,00087	-0,02825	+0,06943	<b>4,00</b>	0,00013	-0,00696	+0,02181

## Приложение 15

	Уровень значимости			Уровень значимости	
	5%	1%		5%	1%
25	0,711	1,061	250	0,251	0,360
30	0,661	0,982	300	0,230	0,329
35	0,621	0,921	350	0,213	0,305
40	0,587	0,869	400	0,200	0,285
45	0,558	0,825	450	0,188	0,269
50	0,533	0,787	500	0,179	0,255
60	0,492	0,723	550	0,171	0,243
70	0,459	0,673	600	0,163	0,233
80	0,432	0,631	650	0,157	0,224
90	0,409	0,596	700	0,151	0,215
100	0,389	0,567	750	0,146	0,208
125	0,350	0,508	800	0,142	0,202
150	0,321	0,464	850	0,138	0,196
175	0,298	0,430	900	0,134	0,190
200	0,280	0,403	950	0,130	0,185
			1000	0,127	0,180

## Приложение 16

## Критические значения коэффициента эксцесса

	Уровень значимости		
	10%	5%	1%
11	0,890	0,907	0,936
16	0,873	0,888	0,914
21	0,863	0,877	0,900
26	0,857	0,869	0,890
31	0,851	0,863	0,883
36	0,847	0,858	0,877
41	0,844	0,854	0,872
46	0,841	0,851	0,868
51	0,839	0,848	0,865
61	0,835	0,843	0,859
71	0,832	0,840	0,855
81	0,830	0,838	0,852
91	0,828	0,835	0,848
101	0,826	0,834	0,846
201	0,818	0,823	0,832
301	0,814	0,818	0,826
401	0,812	0,816	0,822
501	0,810	0,814	0,820

n	m																				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	1																				
1	1	1																			
2	1	2	1																		
3	1	3	3	1																	
4	1	4	6	4	1																
5	1	5	10	10	5	1															
6	1	6	15	20	15	6	1														
7	1	7	21	35	35	21	7	1													
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1												
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1											
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1										
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1									
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1								
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1							
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1						
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1					
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1				
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17	1			
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816	153	18	1		
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876	969	171	19	1	
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756	167960	125970	77520	38760	15504	4845	1140	190	20	1

m	λ																			
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066	3679	3329	3012	2725	2466	2231	2019	1827	1653	1496	1353
1	0905	1637	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659	3679	3662	3614	3543	3452	3347	3230	3106	2975	2842	2707
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647	1839	2014	2169	2303	2417	2510	2584	2640	2678	2700	2707
3	0002	0011	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494	0613	0738	0867	0998	1128	1255	1378	1496	1607	1710	1804
4	0000	0001	0003	0007	0016	0030	0050	0077	0111	0153	0203	0260	0324	0395	0471	0551	0636	0723	0812	0902
5				0001	0002	0004	0007	0012	0020	0031	0045	0062	0084	0111	0141	0176	0216	0260	0309	0361
6							0001	0002	0003	0005	0008	0012	0018	0026	0035	0047	0061	0078	0098	0120
7										0001	0001	0002	0003	0005	0008	0011	0015	0020	0027	0034
8													0001	0001	0001	0002	0003	0005	0006	0009
9																	0001	0001	0001	0002
m	λ																			
	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
0	1225	1108	1003	0907	0821	0743	0672	0608	0550	0498	0450	0408	0369	0334	0302	0273	0247	0224	0202	0183
1	2572	2438	2306	2177	2052	1931	1815	1703	1596	1494	1396	1304	1217	1135	1057	0984	0915	0850	0789	0733
2	2700	2681	2652	2613	2565	2510	2450	2384	2314	2240	2165	2087	2008	1929	1850	1770	1692	1615	1539	1465
3	1890	1966	2033	2090	2138	2176	2205	2225	2237	2240	2237	2226	2209	2186	2158	2125	2087	2046	2001	1954
4	0992	1082	1169	1254	1336	1414	1488	1557	1622	1680	1733	1781	1822	1858	1888	1912	1931	1944	1951	1954
5	0417	0476	0538	0602	0668	0735	0804	0872	0941	1008	1075	1140	1203	1264	1322	1377	1429	1477	1522	1563
6	0146	0174	0206	0241	0278	0319	0362	0407	0455	0504	0555	0608	0662	0716	0771	0826	0881	0935	0989	1042
7	0044	0055	0068	0083	0099	0118	0140	0163	0188	0216	0246	0278	0312	0348	0386	0425	0466	0508	0551	0595
8	0011	0015	0019	0025	0031	0038	0047	0057	0068	0081	0096	0111	0129	0148	0169	0191	0215	0241	0269	0298
9	0003	0004	0005	0007	0009	0011	0014	0018	0022	0027	0033	0040	0047	0056	0066	0076	0088	0102	0116	0132
10	0001	0001	0001	0002	0002	0003	0004	0005	0006	0008	0010	0013	0016	0019	0023	0028	0033	0039	0045	0053
11						0001	0001	0001	0002	0002	0003	0004	0005	0006	0007	0010	0011	0013	0016	0019
12												0001	0001	0002	0002	0003	0003	0004	0005	0006
13															0001	0001	0001	0001	0002	0002
14																				0001

m	λ																			
	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0
0	0166	0150	0136	0123	0111	0101	0091	0082	0074	0067	0061	0055	0050	0045	0041	0040	0033	0030	0027	0025
1	0679	0630	0583	0540	0500	0462	0427	0395	0365	0337	0311	0287	0264	0244	0225	0207	0191	0176	0161	0149
2	1393	1323	1254	1188	1125	1063	1004	0948	0894	0842	0793	0746	0701	0658	0618	0580	0544	0509	0477	0446
3	1904	1852	1798	1743	1687	1631	1574	1517	1460	1404	1348	1293	1238	1185	1133	1082	1033	0984	0938	0892
4	1951	1944	1933	1917	1898	1875	1849	1820	1789	1755	1718	1681	1641	1600	1558	1515	1472	1428	1383	1338
5	1600	1633	1662	1687	1708	1725	1738	1747	1753	1755	1753	1748	1740	1728	1714	1697	1678	1656	1632	1606
6	1093	1143	1191	1237	1281	1323	1362	1398	1431	1462	1490	1515	1537	1555	1571	1584	1594	1601	1605	1606
7	0640	0686	0732	0778	0824	0869	0914	0959	1002	1044	1086	1125	1163	1200	1234	1267	1298	1326	1353	1377
8	0328	0360	0393	0428	0463	0500	0537	0575	0614	0653	0692	0731	0771	0810	0849	0887	0925	0962	0998	1032
9	0150	0168	0188	0209	0232	0255	0281	0307	0334	0363	0392	0423	0454	0486	0519	0552	0586	0620	0654	0688
10	0061	0070	0081	0092	0104	0118	0132	0147	0164	0181	0200	0220	0241	0262	0285	0309	0334	0359	0386	0413
11	0023	0027	0032	0037	0043	0049	0056	0064	0073	0082	0093	0104	0116	0129	0143	0157	0173	0190	0207	0225
12	0008	0009	0011	0014	0016	0019	0022	0026	0030	0034	0039	0045	0051	0058	0065	0073	0082	0092	0102	0113
13	0002	0003	0004	0004	0006	0007	0008	0009	0011	0013	0015	0018	0021	0024	0028	0032	0036	0041	0046	0052
14	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0003	0003	0004	0005	0006	0007	0008	0009	0011	0013	0015	0017	0019	0022
15					0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002	0003	0003	0004	0005	0006	0006	0008	0009
16										0001	0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002	0003	0003
17																0001	0001	0001	0001	0001



Продолжение приложения 18

m	λ																			
	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0
0	0022	0020	0018	0017	0015	0014	0012	0011	0010	0009	0008	0007	0007	0006	0005	0500	0004	0004	0004	0003
1	0137	0126	0116	0106	0098	0090	0082	0076	0070	0064	0058	0054	0049	0045	0041	0038	0035	0032	0029	0027
2	0417	0390	0364	0340	0318	0296	0276	0258	0240	0223	0208	0194	0180	0167	0155	0144	0134	0125	0116	0107
3	0848	0806	0765	0726	0688	0652	0617	0584	0552	0521	0492	0464	0438	0413	0389	0366	0344	0324	0305	0286
4	1293	1249	1205	1161	1118	1075	1034	0992	0952	0921	0874	0836	0799	0764	0729	0696	0663	0632	0602	0572
5	1579	1549	1519	1487	1454	1420	1385	1349	1314	1277	1241	1204	1167	1130	1094	1057	1021	0986	0951	0916
6	1605	1601	1595	1586	1575	1562	1546	1529	1511	1490	1468	1444	1420	1394	1367	1339	1311	1282	1252	1221
7	1398	1418	1435	1450	1462	1472	1480	1486	1489	1490	1489	1486	1481	1474	1465	1454	1442	1428	1413	1396
8	1066	1099	1130	1160	1188	1215	1240	1263	1284	1304	1321	1337	1351	1363	1373	1382	1388	1392	1395	1396
9	0733	0757	0791	0825	0858	0891	0923	0954	0984	1014	1042	1070	1096	1121	1144	1167	1187	1207	1224	1241
10	0441	0469	0498	0528	0558	0588	0618	0649	0679	0710	0740	0770	0800	0829	0858	0887	0914	0941	0967	0993
11	0244	0264	0285	0307	0330	0353	0377	0401	0426	0452	0478	0505	0531	0558	0585	0612	0640	0667	0695	0722
12	0124	0137	0150	0164	0178	0194	0210	0227	0245	0264	0283	0302	0323	0344	0366	0388	0411	0434	0457	0481
13	0058	0065	0073	0081	0089	0098	0108	0119	0130	0142	0154	0168	0181	0196	0211	0227	0243	0260	0278	0296
14	0025	0029	0033	0037	0041	0046	0052	0058	0064	0071	0078	0086	0094	0104	0113	0123	0134	0145	0157	0169
15	0010	0012	0014	0016	0018	0020	0023	0026	0029	0033	0037	0041	0046	0051	0056	0062	0069	0075	0083	0090
16	0004	0005	0005	0006	0007	0008	0010	0011	0013	0014	0016	0019	0021	0024	0026	0030	0033	0037	0041	0045
17	0001	0002	0002	0002	0003	0003	0004	0004	0005	0006	0007	0008	0009	0010	0012	0013	0015	0017	0019	0021
18		0001	0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002	0003	0003	0004	0004	0005	0005	0006	0007	0008	0009
19								0001	0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002	0002	0003	0003	0004
20														0001	0001	0001	0001	0001	0001	0002
21																				0001

v	P												v
	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,01	0,001	
1	0,016	0,064	0,148	0,275	0,455	0,708	1,074	1,642	2,706	3,741	6,635	10,828	1
2	0,211	0,446	0,713	1,022	1,386	1,833	2,408	3,219	4,605	5,991	9,210	13,816	2
3	0,584	1,005	1,424	1,869	2,366	2,946	3,665	4,642	6,251	7,815	11,345	16,266	3
4	1,064	1,649	2,195	2,753	3,357	4,045	4,878	5,989	7,779	9,488	13,277	18,467	4
5	1,610	2,343	3,000	3,655	4,351	5,132	6,064	7,289	9,236	11,070	15,086	20,515	5
6	2,204	3,070	3,828	4,570	5,348	6,211	7,231	8,558	10,645	12,592	16,812	22,458	6
7	2,833	3,822	4,671	5,493	6,346	7,283	8,383	9,803	12,017	14,067	18,475	24,322	7
8	3,490	4,594	5,527	6,423	7,344	8,351	9,524	11,030	13,362	15,507	20,090	26,125	8
9	4,168	5,380	6,393	7,357	8,343	9,414	10,656	12,242	14,684	16,919	21,666	27,877	9
10	4,865	6,179	7,267	8,295	9,342	10,473	11,781	13,442	15,987	18,307	23,209	29,588	10
11	5,578	6,989	8,148	9,237	10,341	11,530	12,899	14,631	17,275	19,675	24,725	31,264	11
12	6,304	7,807	9,034	10,182	11,340	12,584	14,011	15,812	18,549	21,026	26,217	32,909	12
13	7,042	8,634	9,926	11,129	12,340	13,636	15,119	16,985	19,812	22,362	27,688	34,528	13
14	7,790	9,467	10,821	12,079	13,339	14,685	16,222	18,151	21,064	23,685	29,141	36,123	14
15	8,547	10,307	11,721	13,030	14,339	15,733	17,322	19,311	22,307	24,996	30,578	37,697	15
16	9,312	11,152	12,624	13,983	15,338	16,780	18,148	20,465	23,542	26,296	32,000	39,252	16
17	10,085	12,002	13,531	14,937	16,338	17,824	19,511	21,615	24,769	27,587	33,409	40,790	17
18	10,865	12,857	14,440	15,893	17,338	18,868	20,601	22,760	25,989	28,869	34,805	42,312	18
19	11,651	13,716	15,352	16,850	18,338	19,910	21,689	23,900	27,204	30,144	36,191	43,820	19
20	12,443	14,578	16,266	17,809	19,337	20,951	22,775	25,038	28,412	31,410	37,566	45,315	20
21	13,240	15,445	17,182	18,768	20,337	21,991	23,858	26,171	29,615	32,671	38,932	46,797	21
22	14,041	16,314	18,101	19,729	21,337	23,031	24,939	27,301	30,813	33,924	40,289	48,268	22
23	14,848	17,187	19,021	20,690	22,337	24,069	26,018	28,429	32,007	35,172	41,638	49,728	23
24	15,659	18,062	19,943	21,652	23,337	25,106	27,096	29,553	33,196	36,415	42,980	51,179	24
25	16,473	18,940	20,867	22,616	24,337	26,143	28,172	30,675	34,382	37,652	44,314	52,620	25
26	17,292	19,820	21,792	23,579	25,336	27,179	29,246	31,795	35,563	38,885	45,642	54,052	26
27	18,114	20,703	22,719	24,544	26,336	28,214	30,319	32,912	36,741	40,113	46,963	55,476	27
28	18,939	21,588	23,647	25,509	27,336	29,249	31,391	34,027	37,916	41,337	48,278	56,893	28
29	19,768	22,475	24,577	26,475	28,336	30,283	32,461	35,139	39,087	42,557	49,588	58,301	29
30	20,599	23,364	25,508	27,442	29,336	31,316	33,500	36,250	40,256	43,773	50,892	59,703	30
31	21,434	24,255	26,440	28,409	30,336	32,349	34,598	37,359	41,422	44,985	52,191	61,098	31
32	22,271	25,148	27,373	29,376	31,336	33,381	35,665	38,466	42,585	46,194	53,486	62,487	32
33	23,110	26,042	28,307	30,344	32,336	34,413	36,731	39,572	43,745	47,400	54,776	63,870	33
34	23,952	26,938	29,242	31,313	33,336	35,444	37,795	40,676	44,903	48,602	56,061	65,247	34
35	24,797	27,836	30,178	32,282	34,336	36,475	38,859	41,778	46,059	49,802	57,342	66,619	35
36	25,643	28,735	31,115	33,252	35,336	37,505	39,922	42,879	47,212	50,998	58,619	67,985	36
37	26,492	29,635	32,053	34,222	36,336	38,535	40,984	43,978	48,363	52,192	59,892	69,346	37
38	27,343	30,537	32,992	35,192	37,335	39,564	42,045	45,076	49,513	53,384	61,192	70,703	38
39	28,196	31,441	33,932	36,163	38,335	40,593	43,105	46,173	50,660	54,572	62,428	72,055	39
40	29,051	32,345	34,872	37,134	39,335	41,622	44,165	47,269	51,805	55,758	63,691	73,402	40
41	29,907	33,251	35,813	38,105	40,335	42,651	45,224	48,363	52,949	56,942	64,950	74,745	41
42	30,765	34,157	36,755	39,077	41,335	43,679	46,282	49,456	54,090	58,124	66,206	76,084	42
43	31,625	35,065	37,698	40,050	42,335	44,706	47,339	50,548	55,230	59,304	67,459	77,419	43
44	32,487	35,974	38,641	41,022	43,335	45,734	48,396	51,639	56,369	60,481	68,709	78,749	44
45	33,350	36,884	39,585	41,995	44,335	46,761	49,452	52,729	57,505	61,656	69,957	80,077	45
46	34,215	37,795	40,529	42,968	45,335	47,787	50,507	53,818	58,641	62,830	71,201	81,400	46
47	35,081	38,708	41,474	43,942	46,335	48,814	51,562	54,906	59,774	64,001	72,443	82,720	47
48	35,949	39,621	42,420	44,915	47,335	49,840	52,616	55,993	60,907	65,171	73,683	84,037	48
49	36,818	40,534	43,366	45,889	48,335	50,866	53,670	57,079	62,038	66,339	74,919	85,351	49
50	37,689	41,449	44,313	46,864	49,335	51,892	54,723	58,164	63,167	67,505	76,154	86,661	50

Значения критерия Колмогорова-Смирнова  $\lambda$ 

$\lambda$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0005	0,0008	0,0012	0,0019
0,4	0,0028	0,0039	0,0054	0,0073	0,0097	0,0125	0,0160	0,0200	0,0246	0,0300
0,5	0,0360	0,0428	0,0503	0,0585	0,0675	0,0771	0,0875	0,0986	0,1103	0,1227
0,6	0,1357	0,1492	0,1632	0,1777	0,1926	0,2079	0,2236	0,2395	0,2557	0,2721
0,7	0,2887	0,3054	0,3222	0,3391	0,3559	0,3728	0,3896	0,4063	0,4230	0,4395
0,8	0,4558	0,4720	0,4880	0,5038	0,5193	0,5346	0,5497	0,5645	0,5790	0,5933
0,9	0,6072	0,6209	0,6342	0,6473	0,6600	0,6725	0,6846	0,6964	0,7079	0,7191
1,0	0,7300	0,7405	0,7508	0,7607	0,7704	0,7797	0,7888	0,7976	0,8061	0,8143
1,1	0,8222	0,8299	0,8373	0,8445	0,8514	0,8580	0,8644	0,8706	0,8765	0,8822
1,2	0,8875	0,8930	0,8981	0,9029	0,9076	0,9121	0,9164	0,9205	0,9245	0,9282
1,3	0,9319	0,9353	0,9386	0,9418	0,9448	0,9477	0,9505	0,9531	0,9556	0,9580
1,4	0,9603	0,9624	0,9645	0,9665	0,9683	0,9701	0,9718	0,9734	0,9749	0,9764
1,5	0,9777	0,9790	0,9803	0,9814	0,9825	0,9836	0,9846	0,9855	0,9864	0,9872
1,6	0,9880	0,9887	0,9894	0,9901	0,9907	0,9913	0,9919	0,9924	0,9929	0,9933
1,7	0,9938	0,9942	0,9946	0,9949	0,9953	0,9956	0,9959	0,9962	0,9964	0,9967
1,8	0,9969	0,9971	0,9973	0,9975	0,9977	0,9978	0,9980	0,9981	0,9983	0,9984
1,9	0,9985	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9990	0,9991	0,9992	0,9992
2,0	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996
2,1	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
2,2	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
2,3	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
2,4	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

v	p					v	p				
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001		0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	9877	9969	9995	9999	1	16	4000	4683	5425	5897	7084
2	9000	9500	9800	9900	9990	17	3887	4555	5285	5751	6932
3	8054	8783	9343	9587	9912	18	3783	4438	5155	5614	6787
4	7293	8114	8822	9172	9741	19	3687	4329	5034	5487	6652
5	6694	7545	8329	8745	9507	20	3598	4227	4921	5368	6524
6	6215	7067	7887	8343	9249	25	3233	3809	4451	4869	5974
7	5822	6664	7498	7977	8982	30	2960	3494	4093	4487	5541
8	5494	6319	7155	7646	8721	35	2746	3246	3810	4182	5189
9	5214	6021	6851	7348	8471	40	2573	3044	3578	3932	4899
10	4973	5760	6581	7079	8233	50	2306	2732	3218	3541	4433
11	4762	5529	6339	6835	8010	60	2108	2500	2948	3248	4078
12	4575	5324	6120	6614	7800	70	1954	2319	2737	3017	3799
13	4409	5139	5923	6411	7603	80	1829	2172	2565	2830	3568
14	4259	4973	5742	6226	7420	90	1426	2050	2422	2673	3375
15	4124	4821	5577	6055	7246	100	1638	1946	2301	2540	3211

r	0,000	0,002	0,004	0,006	0,008	r	0,000	0,002	0,004	0,006	0,008
0,00	0000	0020	0040	0060	0080	0,50	5493	5520	5547	5573	5600
0,01	0100	0120	0140	0160	0180	0,51	5627	5654	5682	5709	5736
0,02	0200	0220	0240	0260	0280	0,52	5763	5791	5818	5846	5874
0,03	0300	0320	0340	0360	0380	0,53	5901	5929	5957	5985	6013
0,04	0400	0420	0440	0460	0480	0,54	6042	6070	6098	6127	6155
0,05	0500	0520	0541	0561	0581	0,55	6184	6213	6241	6270	6299
0,06	0601	0621	0641	0661	0681	0,56	6328	6358	6387	6416	6446
0,07	0701	0721	0741	0761	0782	0,57	6475	6505	6535	6565	6595
0,08	0802	0822	0842	0862	0882	0,58	6625	6655	6685	6716	6746
0,09	0902	0923	0943	0963	0983	0,59	6777	6807	6838	6869	6900
0,10	1003	1024	1044	1064	1084	0,60	6931	6963	6994	7026	7057
0,11	1104	1125	1145	1165	1186	0,61	7089	7121	7153	7185	7218
0,12	1206	1226	1246	1267	1287	0,62	7250	7283	7315	7348	7381
0,13	1307	1328	1348	1368	1389	0,63	7414	7447	7481	7514	7548
0,14	1409	1430	1450	1471	1491	0,64	7582	7616	7650	7684	7718
0,15	1511	1532	1552	1573	1593	0,65	7753	7788	7823	7858	7893
0,16	1614	1634	1655	1676	1696	0,66	7928	7964	7999	8035	8071
0,17	1717	1737	1758	1779	1799	0,67	8107	8144	8180	8217	8254
0,18	1820	1841	1861	1882	1903	0,68	8291	8328	8366	8404	8441
0,19	1923	1944	1965	1986	2007	0,69	8480	8518	8556	8495	8634
0,20	2027	2048	2069	2090	2111	0,70	8673	8712	8752	8792	8832
0,21	2132	2153	2174	2195	2216	0,71	8872	8912	8953	8994	9035
0,22	2237	2258	2279	2300	2321	0,72	9076	9118	9160	9202	9245
0,23	2342	2363	2384	2405	2427	0,73	9287	9330	9373	9417	9461
0,24	2448	2469	2490	2512	2533	0,74	9505	9549	9594	9639	9684
0,25	2554	2575	2597	2618	2640	0,75	0,973	0,978	0,982	0,987	0,991
0,26	2661	2683	2704	2726	2747	0,76	0,996	1,001	1,006	1,011	1,015
0,27	2769	2790	2812	2833	2855	0,77	1,020	1,025	1,030	1,035	1,040
0,28	2877	2899	2920	2942	2964	0,78	1,045	1,050	1,056	1,061	1,066
0,29	2986	3008	3029	3051	3073	0,79	1,071	1,077	1,082	1,088	1,093
0,30	3095	3117	3139	3161	3183	0,80	1,099	1,104	1,110	1,116	1,121
0,31	3205	3228	3250	3272	3294	0,81	1,127	1,133	1,139	1,145	1,151
0,32	3316	3339	3361	3383	3406	0,82	1,157	1,163	1,169	1,175	1,182
0,33	3428	3451	3473	3496	3518	0,83	1,188	1,195	1,201	1,208	1,214
0,34	3541	3564	3586	3609	3632	0,84	1,221	1,228	1,235	1,242	1,249
0,35	3654	3677	3700	3723	3746	0,85	1,256	1,263	1,271	1,278	1,286
0,36	3769	3792	3815	3838	3861	0,86	1,293	1,301	1,309	1,317	1,325
0,37	3884	3907	3931	3954	3977	0,87	1,333	1,341	1,350	1,358	1,367
0,38	4001	4024	4047	4071	4094	0,88	1,376	1,385	1,394	1,403	1,412
0,39	4118	4142	4165	4189	4213	0,89	1,422	1,432	1,442	1,452	1,462
0,40	4236	4260	4284	4308	4332	0,90	1,472	1,483	1,494	1,505	1,516
0,41	4356	4380	4404	4428	4453	0,91	1,528	1,539	1,551	1,564	1,576
0,42	4477	4501	4526	4550	4574	0,92	1,589	1,602	1,616	1,630	1,644
0,43	4599	4624	4648	4673	4698	0,93	1,658	1,673	1,689	1,705	1,721
0,44	4722	4747	4772	4797	4822	0,94	1,738	1,756	1,774	1,792	1,812
0,45	4847	4872	4897	4922	4948	0,95	1,832	1,853	1,874	1,897	1,921
0,46	4973	4999	5024	5049	5075	0,96	1,946	1,972	2,000	2,029	2,060
0,47	5101	5126	5152	5178	5204	0,97	2,092	2,127	2,165	2,205	2,249
0,48	5230	5256	5282	5308	5334	0,98	2,298	2,351	2,410	2,477	2,555
0,49	5361	5387	5413	5440	5466	0,99	2,647	2,759	2,903	3,106	3,453

Приложение 23

N			N		
	0,99	0,95		0,95	0,99
4	1,000		16	0,425	0,601
5	0,900	1,000	18	0,399	0,564
6	0,829	0,943	20	0,377	0,534
7	0,714	0,893	22	0,359	0,508
8	0,643	0,833	24	0,343	0,485
9	0,600	0,783	26	0,329	0,465
10	0,564	0,746	28	0,317	0,448
12	0,506	0,712	30	0,306	0,432
14	0,456	0,645			

Приложение 24

S	N				S	N		
	4	5	8	9		6	7	10
0	0,625	0,592	0,548	0,540	1	0,500	0,500	0,500
2	0,375	0,408	0,452	0,460	3	0,360	0,386	0,431
4	0,167	0,242	0,360	0,381	5	0,235	0,281	0,365
6	0,042	0,117	0,274	0,306	7	0,136	0,191	0,300
8		0,042	0,199	0,238	9	0,068	0,119	0,242
10		0,0083	0,138	0,179	11	0,0028	0,068	0,190
12			0,089	0,130	13	0,0083	0,035	0,146
14			0,054	0,090	15	0,0014	0,015	0,108
16			0,031	0,060	17		0,0054	0,078
18			0,016	0,038	19		0,0014	0,054
20			0,0071	0,022	21		0,0002	0,036
22			0,0028	0,012	23			0,023
24			0,00087	0,0063	25			0,014
26			0,00019	0,0029	27			0,0083
28			0,000025	0,0012	29			0,0046
30				0,00043	31			0,0023
32				0,00012	33			0,0011
34				0,00025	35			0,00047
36				0,0000028	37			0,00018
					39			0,000058
					41			0,000015
					43			0,0000028
					45			0,00000028

$\rho$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0105	0,0209	0,0314	0,0419	0,0524	0,0628	0,0733	0,0838	0,0942
0,1	0,1047	0,1151	0,1256	0,1360	0,1465	0,1569	0,1674	0,1778	0,1882	0,1986
0,2	0,2091	0,2195	0,2299	0,2403	0,2507	0,2611	0,2714	0,2818	0,2922	0,3025
0,3	0,3129	0,3232	0,3335	0,3439	0,3545	0,3645	0,3748	0,3850	0,3955	0,4056
0,4	0,4158	0,4261	0,4363	0,4465	0,4567	0,4669	0,4771	0,4872	0,4973	0,5075
0,5	0,5176	0,5277	0,5378	0,5479	0,5580	0,5680	0,5781	0,5881	0,5981	0,6081
0,6	0,6180	0,6280	0,6379	0,6478	0,6577	0,6676	0,6775	0,6873	0,6971	0,7069
0,7	0,7167	0,7265	0,7363	0,7460	0,7557	0,7654	0,7750	0,7847	0,7943	0,8039
0,8	0,8135	0,8230	0,8325	0,8421	0,8516	0,8610	0,8705	0,8799	0,8893	0,8986
0,9	0,9080	0,9173	0,9269	0,9359	0,9451	0,9543	0,9635	0,9727	0,9818	0,9909

РЕЗУЛЬТАТЫ

№	d, CM	h, M	№	d, CM	h, M	№	d, CM	h, M	№	d, CM	h, M	№	d, CM	h, M	№	d, CM	h, M	№	d, CM	h, M
1	20,1	21,7	11	13,6	18,0	21	24,5	20,2	31	23,6	17,0	41	16,5	18,2	51	26,9	26,2	61	14,7	18,0
2	19,7	17,1	12	21,2	19,8	22	21,5	18,5	32	16,9	18,5	42	16,3	18,8	52	24,2	28,8	62	7,9	9,6
3	15,8	18,3	13	24,3	16,5	23	21,5	18,5	33	9,7	12,0	43	20,0	18,5	53	27,0	29,9	63	16,4	20,0
4	12,0	16,0	14	19,6	17,0	24	20,6	19,7	34	17,9	18,1	44	22,1	18,8	54	25,0	20,5	64	16,3	18,7
5	19,3	19,4	15	17,3	17,8	25	15,0	18,2	35	16,6	17,8	45	21,3	20,7	55	27,9	21,3	65	15,5	18,4
6	15,5	17,1	16	21,7	19,6	26	14,3	16,6	36	12,8	17,3	46	14,7	17,5	56	8,9	9,7	66	16,0	17,6
7	16,0	19,2	17	22,4	19,2	27	18,9	18,4	37	15,4	18,3	47	27,4	20,7	57	17,9	20,3	67	20,2	19,1
8	15,4	18,5	18	14,4	20,0	28	29,2	19,8	38	22,3	19,0	48	21,0	18,3	58	13,3	18,4	68	14,9	18,2
9	9,3	11,1	19	9,9	10,6	29	14,3	16,1	39	14,4	18,5	49	6,6	8,0	59	17,2	21,4	69	23,5	20,0
10	16,4	19,5	20	14,8	19,3	30	6,3	7,2	40	22,1	20,6	50	28,9	21,5	60	23,9	20,8	70	11,5	17,2
71	26,0	21,5	81	24,8	19,8	91	24,7	20,8	101	16,5	18,4	111	19,6	19,0	121	19,0	19,5	131	16,3	18,9
72	25,4	20,6	82	23,7	20,8	92	18,3	19,6	102	20,8	19,6	112	17,2	18,9	122	20,9	20,9	132	19,7	18,6
73	14,6	18,7	83	15,3	18,2	93	16,5	18,0	103	12,6	17,0	113	13,5	17,4	123	14,9	19,3	133	13,0	16,0
74	12,5	17,9	84	16,6	17,4	94	19,6	19,2	104	24,7	18,1	114	21,4	19,2	124	13,4	18,0	134	16,9	18,7
75	15,9	19,2	85	19,9	19,5	95	15,0	17,7	105	18,5	17,1	115	15,5	19,8	125	11,2	11,9	135	11,8	12,4
76	12,8	17,3	86	26,2	19,4	96	27,4	20,1	106	25,3	19,5	116	11,6	10,7	126	13,6	17,0	136	13,0	15,9
77	16,9	19,9	87	25,0	19,1	97	21,6	19,8	107	8,6	9,6	117	21,7	20,2	127	21,2	20,0	137	20,5	21,2
78	14,1	17,0	88	17,5	18,3	98	11,4	10,8	108	18,8	19,7	118	16,4	19,1	128	13,8	17,8	138	24,1	21,3
79	12,5	16,5	89	8,9	9,5	99	16,9	18,9	109	23,9	20,9	119	21,5	22,1	129	18,9	19,2	139	18,7	19,9
80	8,0	8,1	90	23,1	19,9	100	20,5	19,4	110	11,7	17,3	120	19,3	20,5	130	19,2	20,3	140	23,8	19,6
141	19,9	19,7	151	17,7	20,0	161	16,0	14,6	171	13,5	17,6	181	15,3	18,4	191	18,3	20,3	201	23,7	20,0
142	17,0	17,2	152	12,5	15,5	162	17,8	20,1	172	12,9	18,8	182	16,5	19,9	192	18,2	20,2	202	13,7	20,1
143	13,5	18,0	153	17,3	18,3	163	24,3	21,7	173	25,1	21,4	183	19,3	20,4	193	23,1	20,3	203	22,3	20,5
144	11,0	11,9	154	17,2	18,5	164	19,6	18,7	174	13,0	17,4	184	14,4	18,3	194	17,4	19,5	204	17,7	19,5
145	16,3	18,2	155	11,5	11,6	165	17,5	19,0	175	26,4	22,2	185	16,9	20,5	195	13,6	17,8	205	18,2	18,6
146	18,5	18,6	156	17,6	19,1	166	16,8	18,6	176	16,7	19,6	186	14,6	12,5	19,6	11,8	16,6	206	9,8	14,2
147	19,6	18,9	157	15,3	18,4	167	16,7	19,9	177	13,9	17,9	187	18,7	20,7	197	11,7	17,9	207	22,2	20,0
148	20,2	20,5	158	25,6	22,9	168	17,4	20,3	178	30,8	22,8	188	20,2	22,0	198	14,7	19,6	208	17,7	21,0
149	23,5	22,8	159	22,9	21,3	169	16,9	19,7	179	23,7	22,5	189	20,9	20,9	199	15,3	17,9	209	10,8	20,0
150	13,0	17,1	160	12,9	16,3	170	19,1	20,4	180	23,6	20,0	190	17,6	21,6	200	13,8	19,1	210	13,9	19,4
211	16,9	21,2	221	20,4	22,5	231	18,5	19,7	241	19,9	20,4	251	24,7	19,3	261	12,8	19,6	271	22,6	20,4
212	14,2	18,8	222	17,5	18,8	232	21,0	21,0	242	19,6	21,5	252	20,4	22,0	262	31,7	23,8	272	21,8	21,8
213	17,0	19,9	223	25,3	21,0	233	10,7	13,0	243	27,4	22,6	253	14,3	21,3	263	15,3	15,3	273	14,9	22,0
214	25,0	20,5	224	19,9	20,4	234	17,4	15,3	244	19,7	22,1	254	22,4	22,0	264	14,0	14,3	274	14,7	21,3
215	27,9	21,3	225	16,3	21,1	235	23,5	19,8	245	26,8	23,5	255	16,9	21,5	265	31,4	23,7	275	19,9	22,1
216	18,9	19,7	226	13,9	20,1	236	20,6	20,3	246	12,4	16,2	256	22,6	20,1	266	21,7	22,2	276	13,9	20,8
217	17,0	20,0	227	15,0	18,0	237	19,0	20,0	247	30,0	23,0	257	9,1	12,0	267	14,0	18,0	277	14,0	20,0



7	9	3	7	4	6	7	6	4	7	1	1	7		9	7	3	3	7	4	2
21	13,	18,	22	16,	20,	23	23,	19,	24	23,	21,	25	24,	21,	26	25,	22,	27	16,	18,
8	3	4	8	2	3	8	4	2	8	3	4	8	0	8	8	2	1	8	3	9
21	17,	21,	22	14,	20,	23	21,	18,	24	17,	20,	25	14,	18,	26	14,	16,	27	16,	19,
9	2	4	9	9	9	9	5	0	9	2	4	9	4	6	9	0	6	9	2	7
22	23,	20,	23	21,	20,	24	13,	18,	25		13,	26	25,	20,	27	29,	22,	28	20,	20,
0	9	8	0	7	8	0	1	2	0	9,7	2	0	5	9	0	6	9	0	6	2
28	24,	22,	29	21,	18,	30	14,	19,	31	12,	19,	32	17,	21,	33	11,	16,	34	17,	21,
1	2	4	1	3	8	1	2	4	1	8	4	1	1	1	1	3	1	1	3	7
28	19,	21,	29	12,	17,	30	18,	21,	31	22,	21,	32	13,	17,	33	19,	19,	34	14,	19,
2	6	7	2	4	6	2	4	8	2	2	8	2	3	5	2	6	1	2	3	8
28	21,	20,	29	28,	20,	30	17,	17,	31	17,	21,	32	28,	21,	33	15,	19,	34	19,	19,
3	2	1	3	2	9	3	4	1	3	7	4	3	0	7	3	7	4	3	9	4
28	20,	21,	29	12,	18,	30	28,	23,	31	15,	20,	32	23,	21,	33	17,	18,	34	16,	21,
4	0	8	4	9	7	4	4	1	4	6	8	4	8	4	4	5	9	4	9	0
28	19,	21,	29	12,	18,	30	20,	21,	31	12,	16,	32	24,	22,	33	14,	19,	34	16,	22,
5	3	4	5	3	6	5	5	0	5	7	6	5	9	3	5	8	0	5	8	1
28	21,	20,	29	22,	22,	30	19,	21,	31	14,	18,	32	23,	21,	33	12,	16,	34	13,	21,
6	4	5	6	6	8	6	4	4	6	1	4	6	5	7	6	5	4	6	0	4
28	24,	21,	29	18,	21,	30	22,	20,	31	26,	22,	32	22,	23,	33	22,	21,	34	15,	20,
7	8	4	7	2	9	7	7	4	7	3	9	7	1	4	7	1	2	7	7	3
28	19,	19,	29	17,	21,	30	15,	18,	31	19,	23,	32	22,	22,	33	11,	14,	34	17,	21,
8	2	8	8	1	4	8	7	9	8	0	8	6	0	8	4	1	8	6	0	0
28	18,	17,	29	14,	19,	30	11,	18,	31	17,	20,	32	13,	19,	33	20,	20,	34	16,	19,
9	3	7	9	9	1	9	9	4	9	7	8	9	4	9	9	2	0	9	7	4
29	13,	19,	30	25,	21,	31	23,	21,	32	18,	21,	33	15,	20,	34	20,	22,	35	20,	21,
0	9	9	0	3	9	0	3	0	0	7	4	0	7	4	0	9	8	0	3	3
35	18,	18,	36	20,	19,	37	12,	17,	38	24,	20,	39	19,	19,	40	25,	21,	41	20,	19,
1	2	0	1	1	6	1	6	0	1	0	1	1	5	5	1	3	3	1	7	2
35	12,	11,	36	10,	16,	37	15,	17,	38	20,	17,	39	17,	16,	40	17,	21,	41	20,	19,
2	8	4	2	5	3	2	5	6	2	8	3	2	7	2	2	8	4	2	7	5
35	20,	22,	36	24,	19,	37	24,	19,	38	13,	17,	39	19,	20,	40	15,	20,	41	19,	19,
3	5	3	3	4	9	3	7	9	3	1	9	3	6	1	3	5	6	3	2	6
35	12,	12,	36	28,	21,	37	11,	16,	38	20,	17,	39	17,	17,	40	27,	22,	41	17,	19,
4	1	3	4	4	6	4	5	1	4	8	7	4	8	9	4	5	3	4	8	1
35	21,	22,	36	20,	19,	37	20,	19,	38	18,	19,	39	16,	14,	40	19,	17,	41	16,	18,
5	8	4	5	8	7	5	5	5	5	1	4	5	1	5	5	1	4	5	1	4
35	22,	21,	36	12,	17,	37	10,		38	17,	19,	39	16,	21,	40	19,	16,	41	22,	20,
6	2	6	6	5	6	6	6	9,4	6	9	0	6	5	7	6	6	9	6	0	5
35	10,	16,	36	19,	20,	37	17,	18,	38	22,	19,	39	20,	21,	40	23,	20,	41	11,	16,
7	1	1	7	4	2	7	7	9	7	3	2	7	0	4	7	9	2	7	0	9
35	10,	16,	36	19,	22,	37	15,	18,	38	15,	19,	39	12,	17,	40	19,	19,	41		
8	4	6	8	8	1	8	9	3	8	7	8	8	9	3	8	7	5	8	6,6	7,8
35	17,	19,	36	17,	18,	37	14,	18,	38	13,	18,	39	18,	20,	40	23,	19,	41	12,	17,
9	9	5	9	9	7	9	0	5	9	4	1	9	0	5	9	5	2	9	8	3
36	21,	20,	37	12,	16,	38	14,	19,	39	13,	17,	40	15,	20,	41		10,	42	17,	18,
0	0	6	0	6	1	0	7	0	0	1	9	0	4	2	0	5,5	6	0	1	4

Продолжение приложения 26

№	d, см	h, м	№	d, см	h, м	№	d, см	h, м	№	d, см	h, м	№	d, см	h, м	№	d, см	h, м	№	d, см	h, м	
42	17,	21,	43	22,	20,	44	23,	20,	45	16,	18,	46	14,	18,	47	26,	26,	48	16,	18,	
1	3	7	1	6	4	1	7	0	1	3	9	1	7	0	1	9	2	1	5	2	
42	14,	19,	43	21,	21,	44	13,	20,	45	19,	18,	46			47	24,	28,	48	16,	18,	
2	3	8	2	8	8	2	7	1	2	7	6	2	7,9	9,6	2	2	8	2	3	8	
42	19,	19,	43	14,	22,	44	22,	20,	45	13,	16,	46	16,	20,	47	27,	29,	48	20,	18,	
3	9	4	3	9	0	3	3	5	3	0	3	4	0	3	0	9	3	0	5	5	
42	16,	21,	43	14,	21,	44	17,	19,	45	16,	18,	46	16,	18,	47	25,	20,	48	22,	18,	
4	9	0	4	7	3	4	7	5	4	7	4	3	7	4	0	5	4	1	8	8	
42	16,	22,	43	19,	22,	44	18,	18,	45	11,	12,	46	15,	18,	47	27,	21,	48	21,	20,	
5	8	1	5	9	1	5	2	6	5	8	4	5	5	4	5	9	3	5	3	7	
42	13,	21,	43	13,	20,	44		14,	45	13,	15,	46	16,	17,	47		48	14,	17,	5	
6	0	4	6	9	8	6	9,8	2	6	0	9	6	0	6	6	8,9	9,7	6	7	5	
42	15,	20,	43	14,	20,	44	22,	22,	45	20,	21,	46	20,	19,	47	17,	20,	48	27,	20,	
7	7	3	7	4	2	7	2	0	7	5	2	7	2	1	7	9	3	7	4	7	
42	17,	21,	43	16,	18,	44	17,	21,	45	24,	21,	46	14,	18,	47	13,	18,	48	21,	18,	
8	6	0	8	3	9	8	7	0	8	1	3	8	9	2	8	3	4	8	0	3	
42	16,	19,	43	16,	19,	44	10,	20,	45	18,	19,	46	23,	20,	47	17,	21,	48			
9	7	4	9	2	7	9	8	0	9	6	7	9	5	0	9	2	4	9	6,6	8,0	
43	20,	21,	44	20,	20,	45	13,	19,	46	23,	19,	47	11,	17,	48	23,	20,	49	28,	21,	
0	3	3	0	6	2	0	9	4	0	8	6	0	5	2	0	9	8	0	5	5	
49	19,	19,	50	19,	19,	51	18,	20,	52	15,	18,	53	24,	19,	54	12,	19,	55	20,	19,	
1	6	0	1	0	5	1	0	3	1	3	4	1	7	3	1	8	6	1	7	2	
49	17,	18,	50	20,	20,	51	18,	20,	52	16,	19,	53	20,	22,	54	31,	23,	55	20,	19,	
2	7	9	2	9	9	2	2	2	2	5	9	2	4	0	2	7	8	2	7	5	
49	13,	17,	50	14,	19,	51	23,	20,	52	19,	20,	53	14,	21,	54	17,	15,	55	19,	19,	
3	5	4	3	9	3	3	1	1	3	1	4	3	1	3	3	0	3	3	2	6	
49	21,	19,	50	13,	18,	51	17,	19,	52	14,	18,	53	22,	22,	54	14,	14,	55	17,	19,	
4	9	2	4	6	0	4	4	5	4	3	0	4	0	0	4	0	3	4	8	1	
49	15,	19,	50	11,	11,	51	13,	17,	52	16,	20,	53	16,	21,	54	31,	23,	55	16,	18,	

5	1	8	5	2	9	5	6	8	5	9	5	5	9	5	5	4	7	5	1	4
49	11,	10,	50	13,	17,	51	11,	16,	52	14,	12,	53	22,	20,	54	21,	22,	55	22,	20,
6	4	7	6	5	0	6	0	8	6	6	5	6	0	1	6	7	2	6	0	5
49	21,	20,	50	21,	20,	51	11,	17,	52	18,	20,	53	7	9,1	12,	54	14,	18,	55	11,
7	1	2	7	2	0	7	9	1	7	3	7	7			9	3	3	7	0	16,
49	16,	19,	50	13,	17,	51	14,	19,	52	20,	22,	53	24,	21,	54	25,	22,	55	6,6	7,8
8	4	1	8	5	1	8	7	6	8	2	0	8	0	8	8	2	1	8		
49	21,	22,	50	18,	19,	51	15,	17,	52	20,	20,	53	14,	18,	54	14,	16,	55	12,	17,
9	5	1	9	5	2	9	3	9	9	0	9	9	4	6	9	0	6	9	8	3
50	19,	20,	51	19,	20,	52	13,	19,	53	17,	21,	54	25,	20,	55	29,	22,	56	17,	18,
0	3	5	0	2	3	0	8	1	0	1	6	0	5	9	0	6	9	0	1	4
56	25,	21,	57	11,	16,	58	12,	19,	59	24,	20,	60	18,	18,	61	24,	22,	62	21,	18,
1	3	3	1	3	1	1	8	4	1	0	1	1	2	0	1	2	4	1	3	8
56	17,	21,	57	19,	19,	58	22,	21,	59	20,	17,	60	12,	11,	61	19,	21,	62	12,	17,
2	8	4	2	6	1	2	2	8	2	8	3	2	8	4	2	6	7	2	4	6
56	15,	20,	57	15,	19,	58	17,	21,	59	13,	17,	60	20,	22,	61	21,	20,	62	28,	20,
3	5	6	3	7	4	3	7	4	3	1	9	3	5	3	2	1	3	2	2	9
56	27,	22,	57	17,	18,	58	15,	20,	59	20,	17,	60	12,	12,	61	20,	21,	62	12,	18,
4	5	3	4	5	9	4	6	8	4	8	7	4	1	3	4	0	8	4	9	7
56	19,	17,	57	14,	19,	58	12,	16,	59	18,	19,	60	21,	22,	61	19,	21,	62	12,	18,
5	1	4	5	8	0	5	7	6	5	1	4	5	8	4	5	3	4	5	3	6
56	19,	16,	57	12,	16,	58	14,	18,	59	17,	19,	60	22,	21,	61	21,	20,	62	22,	22,
6	6	9	6	5	4	6	1	4	6	9	0	6	2	6	6	4	5	6	6	8
56	23,	20,	57	22,	21,	58	26,	22,	59	22,	19,	60	10,	16,	61	24,	21,	62	18,	21,
7	9	2	7	1	2	7	3	9	7	3	2	7	1	1	7	8	4	7	2	9
56	19,	19,	57	11,	14,	58	19,	23,	59	15,	19,	60	10,	16,	61	19,	19,	62	17,	21,
8	7	5	8	4	1	8	8	0	8	7	8	8	4	6	8	2	8	8	1	4
56	23,	19,	57	20,	20,	58	17,	20,	59	13,	18,	60	17,	19,	61	18,	17,	62	14,	19,
9	5	2	9	2	0	9	7	8	9	4	1	9	9	5	9	3	7	9	9	1
57		10,	58	20,	22,	59	18,	21,	60	23,	20,	61	21,	20,	62	13,	19,	63	25,	21,
0	5,5	6	0	9	8	0	7	4	0	3	6	0	0	6	0	9	9	0	3	9
63	14,	19,	64	12,	17,	65	20,	19,	66	16,	21,	67	20,	22,	68	17,	20,	69	19,	19,
1	2	4	1	6	0	1	1	2	1	9	2	1	4	5	1	7	0	1	9	7
63	18,	21,	64	15,	17,	65	10,	16,	66	14,	18,	67	17,	18,	68	12,	16,	69	17,	17,
2	4	8	2	5	6	2	5	3	2	2	8	2	5	8	2	5	5	2	0	2
63	17,	17,	64	24,	19,	65	24,	19,	66	17,	19,	67	25,	21,	68	17,	18,	69	13,	18,
3	4	1	3	7	9	3	4	9	3	0	9	3	3	0	3	2	3	3	5	0
63	28,	23,	64	11,	16,	65	28,	21,	66	25,	20,	67	19,	20,	68	17,	18,	69	11,	11,
4	4	1	4	5	1	4	4	6	4	0	5	4	9	4	4	2	5	4	0	9
63	20,	21,	64	20,	19,	65	20,	19,	66	27,	21,	67	16,	21,	68	11,	11,	69	16,	18,
5	5	0	5	5	5	5	8	7	5	9	3	5	3	1	5	0	6	5	3	2
63	19,	21,	64	10,	9,4	65	12,	17,	66	18,	19,	67	13,	20,	68	17,	19,	69	18,	18,
6	4	4	6	6		6	5	6	6	9	7	6	9	1	6	6	1	6	5	0
63	22,	20,	64	17,	18,	65	19,	20,	66	17,	20,	67	15,	18,	68	12,	18,	69	19,	18,
7	7	4	7	7	9	7	4	2	7	9	3	7	4	6	7	3	4	7	6	9
63	15,	18,	64	15,	18,	65	19,	22,	66	13,	18,	67	16,	20,	68	25,	22,	69	20,	20,
8	7	9	8	9	3	8	8	1	8	3	4	8	2	3	8	6	9	8	2	5
63	11,	18,	64	14,	18,	65	17,	18,	66	17,	21,	67	14,	20,	68	22,	21,	69	23,	22,
9	9	4	9	0	5	9	9	7	9	2	4	9	9	9	0	3	9	5	8	8
64	23,	21,	65	14,	19,	66	12,	16,	67	23,	20,	68	21,	20,	69	12,	16,	70	13,	17,
0	3	0	0	7	0	0	6	1	0	9	8	0	7	8	0	9	3	0	3	1
70	16,	14,	71	13,	17,	72	16,	18,	73	24,	20,	74	24,	19,	75	26,	21,	76	20,	21,
1	0	6	1	5	6	1	5	4	1	7	8	1	8	8	1	0	5	1	1	7
70	17,	20,	71	12,	18,	72	20,	19,	73	18,	19,	74	23,	20,	75	25,	20,	76	19,	17,
2	8	1	2	9	8	2	8	6	2	3	6	2	7	8	2	4	6	2	7	1
70	24,	21,	71	25,	21,	72	12,	17,	73	16,	18,	74	15,	18,	75	14,	18,	76	15,	18,
3	2	7	3	1	4	3	6	0	3	5	0	3	3	2	6	7	3	8	3	3
70	19,	18,	71	13,	17,	72	24,	18,	73	19,	19,	74	16,	17,	75	12,	17,	76	12,	16,
4	6	7	4	0	1	4	7	1	4	6	2	4	6	4	4	5	9	4	0	0
70	17,	19,	71	26,	22,	72	18,	17,	73	15,	17,	74	19,	19,	75	15,	19,	76	19,	19,
5	5	0	5	4	2	5	0	5	5	0	7	5	9	5	5	9	2	5	3	4
70	16,	18,	71	16,	19,	72	25,	19,	73	27,	20,	74	26,	19,	75	12,	17,	76	15,	17,
6	8	8	6	7	6	6	3	5	6	4	1	6	2	4	6	8	3	6	5	1
70	16,	19,	71	13,	17,	72		8,6	9,6	73	21,	19,	74	25,	19,	75	16,	19,	76	16,
7	1	9	7	9	7	7				7	6	8	7	0	1	7	9	9	7	2
70	17,	20,	71	30,	22,	72	18,	19,	73	11,	10,	74	17,	18,	75	14,	17,	76	15,	18,
8	4	3	8	8	3	8	8	7	8	4	0	8	5	3	8	1	0	8	4	5
70	16,	19,	71	23,	22,	72	23,	20,	73	16,	18,	74			75	12,	16,	76		11,
9	7	6	9	7	5	9	9	0	9	9	9	9	8,9	9,5	9	5	5	9	9,3	1
71	19,	20,	72	23,	20,	73	11,	17,	74	20,	19,	75	23,	19,	76					
0	1	4	0	3	6	0	7	3	0	5	4	0	1	9	0	8,0	8,1	0	4	5
77	13,	18,	78	24,	20,	79	23,	17,	80	18,	19,	81	19,	20,	82	19,	19,	83	10,	15,
1	6	0	1	5	2	1	6	0	1	5	7	1	9	4	1	2	6	1	7	2
77	21,	19,	78	21,	18,	79	16,	18,	80	21,	21,	81	19,	21,	82	17,	19,	83	10,	16,
2	2	8	2	5	5	2	9	5	2	0	0	2	6	5	2	8	1	2	7	5
77	24,	16,	78	21,	18,	79	3	9,7	12,	80	10,	13,	81	27,	22,	82	16,	18,	83	14,
3	3	5	3	5	5	3			0	3	7	0	3	4	6	3	1	4	3	6
77	19,	17,	78	20,	19,	79	17,	18,	80	17,	15,	81	19,	22,	82	22,	20,	83	11,	16,
4	6	0	4	6	7	4	9	1	4	4	3	4	7	1	4	0	5	4	8	1
77	17,	17,	78	15,	18,	79	16,	17,	80	23,	19,	81	26,	23,	82	11,	16,	83	12,	15,
5	3	8	5	0	2	5	6	8	5	0	8	5	8	0	5	0	9	5	1	4
77	21,	19,	78	14,	16,	79	12,	17,	80	20,	20,	81	12,	16,	82	6,6	7,8	83	8,0	10,

6	7	6	6	3	6	6	8	3	6	8	3	6	4	2	6			6		5
77	22,	19,	78	18,	18,	79	15,	18,	80	19,	20,	81	30,	23,	82	23,	20,	83	11,	16,
7	4	2	7	9	4	7	4	3	7	6	4	7	1	1	7	9	2	7	0	9
77	14,	20,	78	29,	19,	79	22,	19,	80	23,	19,	81	23,	21,	82	19,	19,	83		
8	4	0	8	2	8	8	3	0	8	4	2	8	3	4	8	7	5	8	6,6	7,8
77		10,	78	14,	16,	79	14,	18,	80	21,	18,	81	17,	20,	82	23,	19,	83	12,	17,
9	9,9	6	9	3	1	9	4	5	9	5	0	9	2	4	9	5	2	9	8	3
78	14,	19,	79			80	22,	20,	81	13,	18,	82		13,	83		10,	84		
0	8	3	0	6,3	7,2	0	1	6	0	1	2	0	9,7	2	0	5,5	6	0	7,1	8,4

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1 БИОМЕТРИЯ КАК НАУКА.....	7
1.1 Определение биометрии как научной дисциплины, ее цели и задачи.....	7
1.2 Особенности биометрии как науки и ее место в ряду других наук...	8
1.3 История возникновения и развития математической статистики и биометрии.....	13
1.4 Лесная биометрия как часть общей биометрии и ее значение для развития лесного хозяйства.....	18
2 СТАТИСТИЧЕСКИЕ СОВОКУПНОСТИ.....	20
2.1 Статистические совокупности и статистические наблюдения. Статистические выборки.....	20
2.2 Генеральная и выборочная совокупность и их объем.....	22
2.3 Методы сбора и обработки информации в лесной биометрии...	24
2.4 Дедуктивный и индуктивный методы в лесной биометрии.....	33
3 ГРУППИРОВКА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ.....	36
3.1 Количественный и качественный анализ массовых явлений.....	36
3.2 Систематизация и группировка исходных данных.....	37
3.3 Составление рядов и таблиц распределения.....	38
3.4 Прогнозирование случайной величины.....	42
4 СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ.....	46
4.1 Статистические показатели вариационного ряда и их классификация.....	46
4.2 Средние величины и способы их вычисления.....	47
4.3 Средние арифметические и способы их вычисления.....	48
4.4 Другие виды средних величин. Средняя геометрическая.....	51
5 ПОКАЗАТЕЛИ ВАРИАЦИИ.....	60
5.1 Вариация как явление и ее источники.....	60
5.2 Типы варьирования.....	62
5.3 Показатели вариационных рядов и их вычисление. Пределы и размах вариации.....	62
5.4 Асимметрия, эксцесс, коэффициент вариации.....	76
6 ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ.....	80
6.1 Понятие о видах распределения.....	80
6.2 Эмпирические функции распределения.....	81
6.3 Функция нормального распределения и ее параметры.....	83
6.4 Вычисление теоретических частот кривой нормального распределения.....	89
7. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА.....	93
7.1 Понятие о биномиальном распределении.....	93
7.2 Биномиальное распределение как проявление событий с двумя исходами.....	95

7.3	Распределение Пуассона как частный случай биномиального распределения.....	102
7.4	Вычисление выравнивающих частот биномиального и пуассоновского распределений.....	104
8.	ДРУГИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. СИСТЕМА КРИВЫХ ПИРСОНА И ДЖОНСОНА.....	108
8.1.	Распределение типа А или Грама-Шарлье.....	108
8.2.	Другие распределения.....	113
8.3.	Система кривых Джонсона.....	122
8.4.	Система кривых Пирсона.....	131
9.	СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ.....	135
9.1	Ошибки выборочных статистических показателей и их теоретическое объяснение.....	135
9.2	Основные задачи статистического оценивания. Смещенные и несмещенные оценки.....	141
9.3	Ошибки статистик и их определение. Доверительный интервал.....	142
9.4	Ошибка суммы или разности средних значений.....	152
10.	ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ.....	154
10.1.	Статистические гипотезы. Простые и сложные гипотезы.....	154
10.2.	Параметрические методы оценки гипотез.....	162
10.3.	Непараметрические методы оценки гипотез.....	165
10.4.	Проверка статистических гипотез в практике лесного хозяйства и их использование а в лесном хозяйстве.....	172
11.	КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В ЛЕСНОМ ХОЗЯЙСТВЕ.....	183
11.1	Критерии согласия.....	183
11.2	Критерий согласия Пирсона.....	184
11.3	Критерий согласия Колмогорова-Смирнова.....	190
11.4	Применение статистического оценивания в лесном хозяйстве.....	193
12.	СТАТИСТИКИ СВЯЗИ.....	196
12.1	Понятие о корреляции.....	196
12.2	Коэффициент корреляции как мера линейной связи.....	200
12.3	Корреляционное отношение как мера криволинейной связи.....	209
12.4	Другие статистические показатели корреляции. Использование корреляции в лесном хозяйстве.....	215
13.	КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ КАК ИНСТРУМЕНТ НАУЧНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ.....	221
13.1	Цель и задачи корреляционного анализа.....	221
13.2	Множественная корреляция.....	222
13.3	Корреляционные модели.....	226
13.4	Корреляционные уравнения в лесном хозяйстве.....	229
14.	РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ.....	231
14.1.	Сущность регрессионного анализа. Регрессионные модели.....	231
14.2.	Методы определения вида регрессионных уравнений и их параметров.....	232

14.3. Метод наименьших квадратов.....	235
14.4. Вычисление значений зависимого признака на основе уравнений регрессий в лесном хозяйстве.....	244
15. ОЦЕНКА РЕГРЕССИОННЫХ УРАВНЕНИЙ.....	246
15.1. Ошибки регрессионных уравнений.....	246
15.2. Оценки коэффициентов уравнений регрессии.....	246
15.3. Остаточная дисперсия и ее анализ.....	252
15.4. Взаимокоррелирующие аргументы. Выбор аргументов в уравнении регрессии при их взаимной корреляции в лесном хозяйстве.....	257
16. ВЫБОР УРАВНЕНИЙ РЕГРЕССИИ, ИХ ВЕРИФИКАЦИЯ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ЛЕСНОМ ХОЗЯЙСТВЕ.....	259
16.1 Принципы и основные критерии выбора регрессионной модели.....	259
16.2 Основные виды закономерностей в лесоводстве, лесной таксации и других лесных дисциплинах, выражаемые с помощью регрессионных моделей.....	263
16.3 Верификация регрессионных моделей.....	273
16.4 Применение регрессионных моделей в лесном хозяйстве.....	277
17. ИЗМЕРЕНИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ КАЧЕСТВЕННЫМИ ПРИЗНАКАМИ.....	279
17.1 Особенности статистического анализа качественных признаков....	279
17.2 Основные методы анализа качественных признаков.....	283
17.3 Метод индексов.....	289
17.4 Применение статистических методов исследования качественных признаков в лесном хозяйстве.....	295
18. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ.....	298
18.1. Понятие о дисперсионном анализе.....	298
18.2. Однофакторный дисперсионный анализ.....	307
18.3. Двухфакторный дисперсионный анализ.....	315
18.4. Многофакторный дисперсионный анализ. Использование дисперсионного анализа в лесном хозяйстве.....	324
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	330
ПЕРЕЧЕНЬ ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	331
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	335