

Из изложенного следует, что безызлучательные переходы в ионах РЗ в Н- и D-содержащих растворителях осуществляются аналогично переходам в сложных органических молекулах и укладываются в рамки теории безызлучательных переходов, развиваемой Робинсоном и Фрошем [6]. Разница заключается лишь в том, что при размене электронной энергии в колебательную в органических молекулах основную роль играют внутримолекулярные взаимодействия, в то время как для ионов РЗ такую роль берут на себя взаимодействия ионов РЗ с колебаниями сольватной оболочки.

## Литература

- [1] М. А. Ельяшевич. Спектры редких земель. ГИТТЛ, М., 1953.  
 [2] П. П. Феофилов. Proc. Intern. Confer. Luminescence, Budapest, 2, 1727, 1968; Acad. Kiado; Acta Physica Polonica, 26, 331, 1964.  
 [3] G. H. Dieke, H. M. Crosswhite. Appl. Optics, 2, 675, 1963.  
 [4] W. R. Dawson, J. L. Kropp. JOSA, 55, 822, 1965; W. R. Dawson, J. L. Kropp, M. W. Windsor. J. Chem. Phys., 45, 2410, 1966.  
 [5] M. L. Bhaumik, L. J. Nugent. J. Chem. Phys., 43, 1680, 1965.  
 [6] G. W. Robinson, R. P. Frosch. J. Chem. Phys., 37, 1962, 1962; 38, 1187, 1963.

Поступило в Редакцию 23 мая 1969 г.

УДК 535.375 : 621.375.9 : 535

## РАСЧЕТ ИНТЕНСИВНОСТИ СТОКСОВЫХ КОМПОНЕНТ ВЫНУЖДЕННОГО КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ В СРЕДЕ С ПОТЕРЯМИ

Ю. Е. Дьяков

1. В одномерной стационарной модели ВКР интенсивность волны накачки  $I_L$  и интенсивности  $I_{S,n}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) стоксовых компонент различного порядка определяются системой нелинейных уравнений

$$\frac{dI_L}{dx} = -g_0 I_L I_{S,1} - \alpha_0 I_L; \quad \frac{dI_{S,n}}{dx} = I_{S,n} (g_n I_{S,n-1} - g'_n I_{S,n+1}) - \alpha_n I_{S,n}, \quad (1)$$

где  $g_0 = 16 \left(\frac{\pi}{c}\right)^3 \varphi_0 \chi''_{S,1}$ ,  $g_n = g_0 \left(\frac{\varphi_n \chi''_{S,n}}{\varphi_0 \chi''_{S,1}}\right)$ ,  $g'_n = g_n \left(\frac{\chi''_{S,n+1}}{\chi''_{S,1}}\right)$ ,  $\chi''_{S,n}$  и  $\alpha_n$  — резонансная нелинейная восприимчивость и коэффициент потерь для стоксовой волны  $n$ -го порядка с частотой  $\omega_{S,n}$  и волновым числом  $k_{S,n}$ , возбуждаемой от спонтанного уровня  $I_{S,n}^0$ ,  $\varphi_n = \frac{\omega_{S,n}^2}{k_{S,n}}$  [1]. Машинное решение (1) выявило четко выраженный

последовательный характер распределения интенсивностей  $I_{S,n}$  по длине  $x$  области взаимодействия. При этом в каждой точке заметную величину имеют не более двух волн, порядки которых различаются на единицу [1, 2]. Эта особенность использована ниже для отыскания приближенных аналитических выражений для  $I_{S,n}$ .

Если дисперсия потерь несущественна ( $\alpha_n \approx \alpha_0$ ), то задачу можно упростить, полагая

$$I_{S,n} = N_n \varphi_n e^{-\alpha_0 x}, \quad \xi = \frac{(1 - e^{-\alpha_0 x})}{\alpha_0}, \quad \gamma_n = 16 \left(\frac{\pi}{c}\right)^3 \varphi_n \varphi_{n-1} \chi''_{S,n}.$$

Тогда уравнения (1) примут вид

$$\frac{dN_0}{d\xi} = -\gamma_1 N_0 N_1, \quad \frac{dN_n}{d\xi} = N_n (\gamma_n N_{n-1} - \gamma_{n+1} N_{n+1}). \quad (2)$$

Легко видеть, что величина  $N_n$  пропорциональна плотности потока фотонов в стоксовой волне  $n$ -го порядка. Как следует из (2), выполняется закон сохранения

$$N_0(\xi) + N_1(\xi) + N_2(\xi) + \dots = \text{const} \quad (3)$$



и между величинами  $N_n(\xi)$  существует следующая связь:

$$\begin{aligned} \frac{N_0(\xi)}{N_0(0)} \left[ \frac{N_2(\xi)}{N_2(0)} \right]^{A_2} \cdots \left[ \frac{N_{2m}(\xi)}{N_{2m}(0)} \right]^{A_{2m}} &= \exp \left[ -\frac{\gamma_1}{B_{2m+1}} \int_0^\xi N_{2m+1}(\xi) d\xi \right], \\ \frac{N_1(\xi)}{N_1(0)} \left[ \frac{N_3(\xi)}{N_3(0)} \right]^{B_3} \cdots \left[ \frac{N_{2m+1}(\xi)}{N_{2m+1}(0)} \right]^{B_{2m+1}} \exp \left[ -\gamma_1 \int_0^\xi N_0(\xi) d\xi \right] &= \\ &= \exp \left[ \frac{\gamma_1}{A_{2m+2}} \int_0^\xi N_{2m+2}(\xi) d\xi \right], \end{aligned}$$

где  $A_{2m} = \left( \frac{\gamma_1 \gamma_3 \cdots \gamma_{2m-1}}{\gamma_2 \gamma_4 \cdots \gamma_{2m}} \right)$ ,  $B_{2m+1} = \left( \frac{\gamma_2 \gamma_4 \cdots \gamma_{2m}}{\gamma_3 \gamma_5 \cdots \gamma_{2m+1}} \right)$ .

Из (2) видно также, что максимум функции  $N_n(\xi)$  приходится на значение  $\xi = \xi_n$ , при котором

$$\gamma_n N_{n-1}(\xi) = \gamma_{n+1} N_{n+1}(\xi). \quad (4)$$

Предлагаемый метод интегрирования цепочки нелинейных уравнений (2) состоит в том, чтобы искать решение отдельно для каждого интервала  $\xi_{n-1} \leq \xi \leq \xi_n$ , учитывая при этом лишь интенсивности  $N_{n-1}$  и  $N_n$ , первая из которых, согласно (4), имеет максимум в начале этого интервала, а вторая — в конце. Вместо системы уравнений (2) при таком подходе нужно решать лишь два простых уравнения

$$\frac{dN_{n-1}}{d\xi} = -\gamma_n N_n N_{n-1}, \quad \frac{dN_n}{d\xi} = \gamma_n N_n N_{n-1}.$$

Для определения из (4) верхней границы  $\xi_n$  интервала следует также найти  $N_{n+1}(\xi)$ . Так как на рассматриваемом интервале величина  $N_{n+1}$  предполагается относительно малой ( $N_{n+1} \ll N_n$ ), то ее можно определить из линейного уравнения

$$\frac{dN_{n+1}}{d\xi} = \gamma_{n+1} N_n(\xi) N_{n+1}, \quad N_{n+1}(\xi = \xi_{n-1}) = N_{n+1}^0.$$

В результате, учитывая малость начальных уровней  $N_n^0$  ( $a_n \equiv \frac{N_n^0}{N_0(0)} \approx \frac{I_{S,n}^0}{I_L(0)} \approx 10^{-12}$ ), получим: если  $\xi_{n-1} \leq \xi \leq \xi_n$ , то

$$\frac{N_{n+1}(\xi)}{N_0(0)} = \frac{1}{1 + Q_n(\xi)}, \quad \frac{N_n(\xi)}{N_0(0)} = \frac{Q_n(\xi)}{1 + Q_n(\xi)}, \quad \frac{N_{n+1}(\xi)}{N_0(0)} = a_{n+1} [1 + Q_n(\xi)]^{\gamma_{n+1}},$$

где

$$Q_n(\xi) = \begin{cases} a_1 \exp [N_0(0) \gamma_1 \xi] & (n=1), \\ \frac{1}{1 + \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n}} \frac{1}{(a_n)^{1 + \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}} \exp [N_0(0) \gamma_n (\xi - \xi_{n-1})]} & (n=2, 3, \dots), \end{cases}$$

причем границы интервалов определяются рекуррентными формулами

$$\xi_n = \begin{cases} \frac{\left( \ln \frac{1}{a_1} + \frac{1}{1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}} \ln \frac{1}{a_2} \right)}{N_0(0) \gamma_1} & (n=1), \\ \xi_{n-1} + \frac{\left( \frac{1}{1 + \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}} \ln \frac{1}{a_n} + \frac{1}{1 + \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}} \ln \frac{1}{a_{n+1}} \right)}{N_0(0) \gamma_n} & (n=2, 3, \dots). \end{cases}$$

2. В частном случае отсутствия дисперсии ( $\chi''_{S,n} = \chi''_{S,1}$ ,  $a_n = a$ ,  $\varphi_n \sim \omega_{S,n}$ ) полученные выражения упрощаются. Учитывая, что  $N_n \sim \frac{I_{S,n}}{\omega_{S,n}}$  и полагая  $Z =$



$= g_0 I_L(0) x = g_0 I_L(0) \xi \alpha_0 x (1 - e^{-\alpha_0 x})^{-1}$ , найдем, что нормированные интенсивности взаимодействующих волн

$$K_L = \frac{I_L(x)}{I_L(0)} \text{ и } K_{S,n} = \frac{I_{S,n}(x)}{I_L(0)} \text{ будут равны}$$

$$\left. \begin{aligned} K_L(Z) &= \frac{e^{-\alpha_0 x}}{1 + Q_1(Z)} \quad (0 \leq Z \leq Z_1), \\ K_{S,n-1}(Z) &= \frac{\left(\frac{\omega_{S,n-1}}{\omega_L}\right) e^{-\alpha_0 x}}{1 + Q_n(Z)}, \quad K_{S,n}(Z) = \frac{\left(\frac{\omega_{S,n}}{\omega_L}\right) e^{-\alpha_0 x} Q_n(Z)}{1 + Q_n(Z)} \quad (Z_{n-1} \leq Z \leq Z_n), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

причем

$$Q_1(Z) = a \exp \left[ Z \frac{1 - e^{-\alpha_0 x}}{\alpha_0 x} \frac{\omega_{S,1}}{\omega_L} \right], \quad Z_1 = \frac{\alpha_0 x}{1 - e^{-\alpha_0 x}} \frac{\omega_L}{\omega_{S,1}} \left( 1 + \frac{1}{1 + \frac{\omega_{S,2}}{\omega_L}} \right) \ln \frac{1}{a}, \quad (6)$$

и для  $n = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} Q_n(Z) &= \left( \frac{\omega_{S,n}}{\omega_{S,n-2}} \right) \frac{1}{1 + \frac{\omega_{S,n-2}}{\omega_{S,n}}} \frac{1}{1 + \frac{\omega_{S,n}}{\omega_{S,n-2}}} (a) \exp \left[ (Z - Z_{n-1}) \frac{\omega_{S,n} \omega_{S,n-1}}{\omega_L^2} \frac{1 - e^{-\alpha_0 x}}{\alpha_0 x} \right], \\ Z_n &= Z_{n-1} + \frac{\alpha_0 x}{1 - e^{-\alpha_0 x}} \frac{\omega_L^2}{\omega_{S,n} \omega_{S,n-1}} \left( \frac{1}{1 + \frac{\omega_{S,n}}{\omega_{S,n-2}}} + \frac{1}{1 + \frac{\omega_{S,n+1}}{\omega_{S,n-1}}} \right) \ln \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (7)$$

3. Рассмотрим связь между первичной интенсивностью накачки и относительными интенсивностями стоксовых волн, определяемую формулами (5). Величина  $K_{S,n}(Z)$  при  $Z = Z_n$  принимает максимальное значение, равное

$$(K_{S,n})_{\max} = \frac{\omega_{S,n}}{\omega_L} e^{-\alpha_0 x}. \quad (8)$$

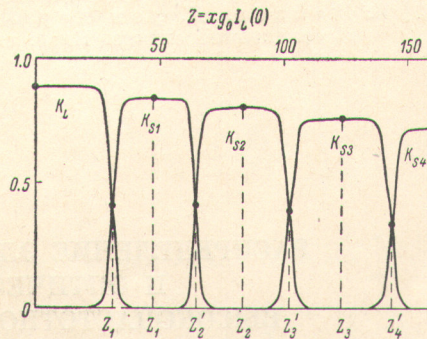
Таким образом, максимально достижимые интенсивности стоксовых компонент ВКР монотонно уменьшаются с увеличением порядка  $n$ . Это, впрочем, видно и непосредственно из соотношения (3), которое можно переписать в виде

$$K_L + \frac{\omega_L}{\omega_{S,1}} K_{S,1} + \frac{\omega_L}{\omega_{S,2}} K_{S,2} + \dots \simeq e^{-\alpha_0 x},$$

если учесть, что при  $Z = Z_n$  все интенсивности, кроме  $I_{S,n}$ , исчезающе малы.

Кривые  $K_L(Z)$  и  $K_{S,n}(Z)$ , представленные на рисунке, взяты из работы [2], где они были получены путем численного интегрирования системы уравнений (1) при следующих значениях параметров:  $g_0 = 10^{-2}$  см/Мвт,  $x = 30$  см,  $\alpha_0 = 4 \cdot 10^{-3}$  см $^{-1}$ ,  $\frac{\omega_{S,1}}{\omega_L} = 0.95$  и  $a = 10^{-12}$ . Вытекающие из (8) оценки  $(K_L)_{\max} = e^{-\alpha_0 x} = 0.887$ ,  $(K_{S,1})_{\max} = 0.843$ ,  $(K_{S,2})_{\max} = 0.798$ ,  $(K_{S,3})_{\max} = 0.754$  хорошо согласуются с этими кривыми, так же как и значения  $Z_n$ , найденные по (6) и (7):  $Z_1 = 47.5$ ,  $Z_2 = 83.8$ ,  $Z_3 = 124$ .

Характерными для семейства кривых  $K_{S,n}(Z)$  являются точки пересечения  $Z = Z'_n$ , в которых  $K_{S,n-1} = K_{S,n}$ . Условно  $Z'_n$  и  $Z'_{n+1}$  можно считать границами «блока»  $K_{S,n}$ . Как следует из (5), числа  $Z'_n$  являются корнями трансцендентного



<sup>1</sup> Видимо, по ошибке в [2] указано значение  $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-3}$  см $^{-1}$ .



уравнения

$$Q_n(Z'_n) = \frac{\omega_{S,n-1}}{\omega_{S,n}}, \text{ т. е. } Z'_1 \approx \frac{\alpha_0 x}{1 - e^{-\alpha_0 x}} \frac{\omega_L}{\omega_{S,1}} \ln \frac{1}{a},$$

$$Z'_n \approx Z_{n-1} + \frac{\alpha_0 x}{1 - e^{-\alpha_0 x}} \frac{\omega_L^2}{\omega_{S,n} \omega_{S,n-1}} \left( \frac{1}{1 + \frac{\omega_{S,n}}{\omega_{S,n-2}}} - \frac{1}{\ln \frac{1}{a}} \right) \ln \frac{1}{a} \quad (n=2, 3, \dots).$$

Для рассмотренного выше примера по этим формулам находим:  $Z'_1 = 30$ ,  $Z'_2 = 64$ ,  $Z'_3 = 102.4$  и  $Z'_4 = 145$ , так что занимаемая блоком  $K_{S,n}$  эффективная область  $\Delta Z'_n = Z'_{n+1} - Z'_n$  увеличивается с ростом порядка  $n$  стоксовой компоненты ВКР:  $\Delta Z'_1 = 34$ ,  $\Delta Z'_2 = 38.4$ ,  $\Delta Z'_3 = 42.6$  — в полном соответствии с приведенными на рисунке кривыми. Оценивая относительные интенсивности в точках пересечения, найдем

$$K_{S,n-1}(Z'_n) = K_{S,n}(Z'_n) = \frac{e^{-\alpha_0 x}}{\frac{\omega_L}{\omega_{S,n}} + \frac{\omega_L}{\omega_{S,n-1}}},$$

т. е. для приведенных выше условий

$$K_{S,1}(Z'_1) : K_{S,2}(Z'_2) : K_{S,3}(Z'_3) : K_{S,4}(Z'_4) = 0.421 : 0.418 : 0.388 : 0.366$$

опять в хорошем согласии с кривыми на рисунке. Таким образом, полученное приближенное решение уравнения (1) является достаточно точным и может служить для исследования принятой модели ВКР, не обращаясь к машинному расчету.

Автор благодарит С. А. Ахмазова за обсуждение.

#### Литература

- [1] Y. R. Shen, N. Bloembergen. Phys. Rev., 137A, 1787, 1965.
- [2] В. Райзер, Д. фон дер Линде. Аннотации докл. на IV Всес. симп. по нелинейной оптике. Киев, октябрь, 1968 г. Изд. МГУ, 1968.

Поступило в Редакцию 28 мая 1969 г.

УДК 537.525 : 546 : 293.

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ПО ЭНЕРГИЯМ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЫСОКОЧАСТОТНОГО РАЗРЯДА В АРГОНЕ

С. Д. Вагнер, В. А. Виролайнен и Ю. М. Каган

Расчет оптических свойств плазмы разряда требует знания функции распределения электронов по энергиям. Такие систематические измерения функций распределения были проведены за последние годы в положительном столбе разряда постоянного тока [1] и в полном катоде [2]. На основе этих измерений были составлены уравнения баланса для ряда возбужденных уровней [3]. При этом было достигнуто удовлетворительное согласие с результатами оптических измерений.

Подобные расчеты и сопоставления для высокочастотного разряда еще не производились. Имеются лишь отдельные измерения распределения электронов по энергиям [4]. Проведение такого сопоставления и является задачей настоящей работы.

Измерены функции распределения электронов в высокочастотном разряде в аргоне при частоте 28 Мгц в интервале давлений 0.05–0.25 тор при токах 50–150 ма. Методика измерений аналогична описанной в работе [5]. На рисунке приведены некоторые результаты измерений. Как видно, распределение близко к максвелловскому, построенному для той же средней энергии для случая давления 0.05 тор и значительно отклоняется от него при давлении 0.25 тор. Полученные результаты качественно согласуются с данными для разряда постоянного тока [6]. Уменьшение числа электро-