

**Министерство образования Республики Беларусь**

**Учреждение образования  
«Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины»**

**В. М. ЕФИМЕНКО**

**ЛЕСНАЯ БИОМЕТРИЯ**

**ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ  
по выполнению лабораторных работ  
для студентов специальности  
1-75 01 01 «Лесное хозяйство»**

Гомель 2007

УДК 630: 57.087.1(075.8)

ББК 43.4В631.8 Я73

Е-911

Рецензент:

кафедра лесохозяйственных дисциплин учреждения  
образования «Гомельский государственный университет имени  
Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию на заседании научно-методического  
совета учреждения образования «Гомельский государственный  
университет имени Франциска Скорины»

Ефименко, В. М.

Е-911

Лесная биометрия : Практическое пособие по  
выполнению лабораторных работ для студентов  
специальности 1-750101 «Лесное хозяйство» /  
В. М. Ефименко; М-во обр. РБ, Гомельский государственный  
университет им Ф. Скорины.– Гомель: ГГУ им. Ф.  
Скорины, 2007 – 70 с.

Целью подготовки практического пособия является оказание по-  
мощи студентам в овладении теоретическими основами курса  
«Лесная биометрия» и применении их на лабораторных занятиях и  
самостоятельной работе.

Практическое пособие адресовано студентам специальности 1-75  
01 01 «Лесное хозяйство».

УДК 630: 57.087.1(075.8)

ББК 43.4В631.8 Я73

© Ефименко В. М., 2007

© УО «ГГУ им.Ф.Скорины», 2007

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------|----|
| Введение                                                           | 4  |
| Тема 1 Составление вариационных рядов.....                         | 5  |
| Тема 2 Статистическая характеристика совокупностей наблюдений..... | 12 |
| Тема 3 Функции распределений статистической величины.....          | 21 |
| Тема 4 Статистическое оценивание.....                              | 30 |
| Тема 5 Статистическая проверка гипотез.....                        | 35 |
| Тема 6 Корреляционный анализ.....                                  | 38 |
| Тема 7 Регрессионный анализ.....                                   | 42 |
| Тема 8 Дисперсионный анализ.....                                   | 46 |
| Тема 9 Статистические функции анализа данных на ПЭВМ.....          | 52 |
| Литература.....                                                    | 58 |
| Приложение А.....                                                  | 59 |
| Приложение Б.....                                                  | 60 |
| Приложение В.....                                                  | 61 |
| Приложение Г.....                                                  | 62 |
| Приложение Д.....                                                  | 64 |
| Приложение Е.....                                                  | 67 |
| Приложение Ж.....                                                  | 68 |

## ВВЕДЕНИЕ

Переход лесного хозяйства Республики Беларусь на самоокупаемость и самофинансирование требует решения задач связанных с организацией систем его ведения, успешное решение которых возможно при условии высококачественной подготовки специалистов.

Специалист лесного хозяйства должен оценивать деревья в лесу не только в качестве источника ресурсов, но и уметь выявлять их роль в средообразующих процессах, формализуя их в статистических и математических взаимосвязях и моделях.

Лабораторные занятия являются составной частью учебного процесса при подготовке специалистов, проводятся согласно учебным планам в сроки, соответствующие графику учебного процесса.

В пособии приводится краткое содержание понятий основных тем курса «Лесная биометрия», цели и хода выполнения лабораторных работ, а также вопросы для самоконтроля.

## **ТЕМА 1 СОСТАВЛЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ РЯДОВ**

- 1 Образование выборочной совокупности.
- 2 Образование вариационных рядов.
- 3 Графическое отображение вариационных рядов.

### ***Основные понятия по теме***

**Образование выборочной совокупности.** Статистической совокупностью называют некоторое множество относительно однородных предметов или объектов, объединяемых по выбранному признаку.

Теоретически бесконечно большая или приближающаяся к бесконечности совокупность всех единиц или членов вариационного ряда называют **генеральной**.

Генеральная совокупность может состоять из такого большого количества единиц, что изучить их все не представляется возможным. Поэтому приходится иметь дело со сравнительно небольшими, **выборочными** совокупностями.

Выборочная совокупность наиболее полно отражающая свойства генеральной называется репрезентативной, например, при изучении роста деревьев в высоту исключаются деревья, сломанные бурей, поврежденные огнем и т.д.

При образовании выборки используется метод случайного отбора, то есть выдерживается принцип объективности.

Например, если необходимо определить среднюю высоту 20 деревьев, то нельзя их выбирать по своему вкусу. Следует измерять высоту у каждого 10 или 20 и т.д. дерева или предварительно пронумеровав отобрать по таблице случайных чисел.

**Образование вариационных рядов.** Статистическая совокупность подвергается упорядочиванию, которое заключается в следующем:

а) находится минимальная и максимальная варианты

$$x_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} x(i), x_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} x(i)$$

б) весь диапазон значений признака [от  $x_{\min}$ , до  $x_{\max}$ ] разбивается на «к» интервалов одинаковой протяженности  $h = (x_{\max} - x_{\min}) / k$ .

Величину интервала обычно определяют по формуле:

$$k = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\text{от } 8 \text{ до } 12}, \text{ где}$$

$X_{\max}$  и  $X_{\min}$  - соответственно наибольшее и наименьшее значение признака или вариант. Числа от 8 до 12 означают предварительно принимаемое количество классов.

В качестве  $k$  принимают круглое число, ближайшее к полученному частному. При этом действительное число классов определится как частное от деления размаха вариантов ( $X_{\max} - X_{\min}$ ) на округленное значение интервала. В качестве полученного частного принимают целочисленную величину. Округление делается всегда в большую сторону. Хороший результат вычисления величины интервала получается при применении формулы:

$$k = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{1 + 3,322 \lg N}.$$

в) Находятся граничные точки каждого из интервалов. Границы и срединные значения классов устанавливаются следующим образом.

В качестве среднего значения первого класса принимают число  $k$ , ближайшее к наименьшей (в возрастающем ряду) или наибольшей (в убывающем ряду) вариантам ряда распределения.

Например, для диаметров, при составлении возрастающего ряда (14,0-17,9; 18,0-21,9 и т.д.), таким числом оказывается 16,0. Нижние границы классов определяют путем вычитания половины величины интервала из срединных значений каждого класса, а верхние границы - путем прибавления этой половины. Для первого класса получим соответственно числа 14,0 и 18,0; для второго - 18,0 и 22,0.

Срединные значения последующих классов получают путем последовательного прибавления величины интервала. Для ряда диаметров они окажутся равными: 20,24, 28 и т.д. Эти значения называют классовыми вариантами, так как они представляют собою классы.

В целях исключения перекрытия верхней границы предыдущего класса с нижней границей последующего класса, (например, чисел 18,0 и 18,0, входящих в первый и второй классы), нижние границы классов увеличивают на величину, равную точности измерения признака (можно верхние границы классов уменьшить на ту же величину и таким образом получить значения границ классов: для диаметров она равна 0,1 см, для высот 0,1 м).

г) Затем подсчитывается число вариантов  $N_i$ , попавших в интервал, причем варианты, попавшие на границы интервалов, относят только к одному из интервалов, результат заносится в таблицу:

| Классы | Частоты | Классы | Частоты |
|--------|---------|--------|---------|
|        |         |        |         |

Пример:

| Границы классов, см | Срединные значения классов, см | Частоты (число стволов) |          |
|---------------------|--------------------------------|-------------------------|----------|
|                     |                                | в рабочей записи        | в цифрах |
| 14,1-18,0           | 16                             | : :                     | 4        |
| 18,1-22,0           | 20                             | □                       | 7        |
| 22,1-26,0           | 24                             | □                       | 8        |
| 26,1-30,0           | 28                             | ⊠ □                     | 28       |
| 30,1-34,0           | 32                             | ⊠ □                     | 20       |
| 34,1-38,0           | 36                             | ⊠ □                     | 18       |
| 38,1-42,0           | 40                             | ⊠                       | 9        |
|                     | Σ                              |                         | 94       |

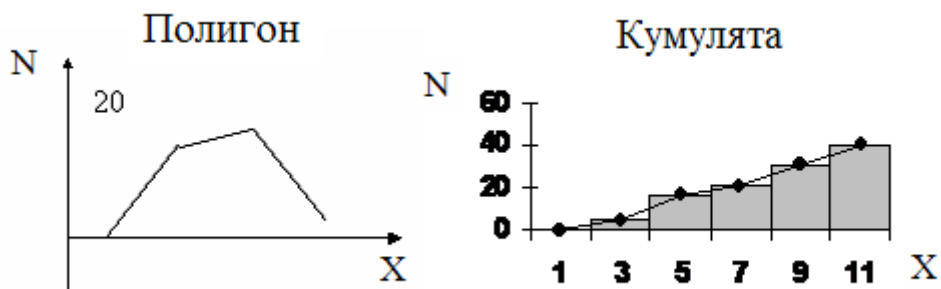
**Графическое изображение вариационных рядов.** Обычно табличное распределение частот дополняют его графическим представлением. Схематически все множество графических представлений статистических данных разделяют на два класса: диаграммы и линейные изображения. К классу линейных графиков относятся полигон, кумулятивная кривая, огива.

**Полигоном** частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки  $(x_1, N_1), \dots, (x_k, N_k)$ .

**Кумулятивная кривая (кривая сумм)** - ломаная, составленная по последовательно суммированным, т.е. накопленным частотам или относительным частотам. При построении кумулятивной кривой дискретного признака на ось абсцисс наносятся значения признака, а ординатами служат нарастающие итоги частот. Соединением вершин ординат прямыми линиями получают **кумуляту**. Кумулятивную кривую называют полигоном накопленных частот.

Если на ось ординат нанести значение признака, а накопленные частоты - на ось абсцисс, то получим кривую, называемую **огивой**.

Пример графического отображения статистических данных



**Диаграммы.** Диаграмма (от греческого *diagramma* - изображение, чертёж, рисунок) - это графическое изображение, наглядно показывающее соотношение между сравниваемыми величинами. Диаграммы бывают различных видов: полосовые (ленточные), столбиковые, круговые и т. д.

**Полосовые** - особенно наглядны при сравнении величин, связанных между собой в единое целое. Ширина полос должна быть одинаковой. По длине полосы разбиваются на части, пропорциональные изображаемым величинам.

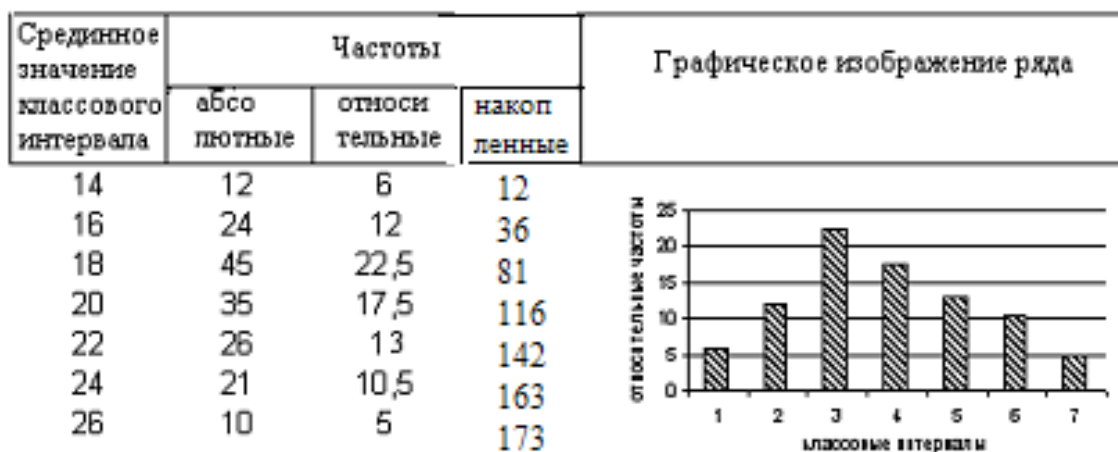
**Гистограмма частот** является видом столбиковых диаграмм представляющая ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основанием которых служат частотные интервалы длины  $h$ , а высоты равны отношению  $N_i/h$  - плотность частоты. Гистограмма относительных частот - аналог плотности распределения непрерывной случайной величины.

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают классовые интервалы, а над ними на расстоянии  $N_i/h$  проводят отрезки параллельные основанию, см. рисунок.

**Масштабированной** называют диаграмму, в которой значения частот обозначены над столбиками и над осью ординат указывается размерность масштабирования (например, разделить на  $h$ ).

Каждое значение изучаемого показателя изображается в виде вертикального столбика. Количество столбиков определяется числом классов изучаемых показаний (данных). Расстояние между столбиками должно быть одинаковым. У основания столбиков приводится название изучаемого показателя.

### Пример построения гистограммы



**Структурная диаграмма** - позволяет сопоставить статистические совокупности по составу.

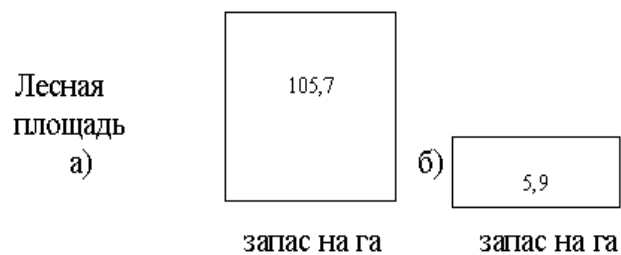
При построении квадратных и круговых диаграмм площади квадратов или кругов выражают изображаемые величины.

Секторная диаграмма строится таким образом, чтобы каждый сектор занимал площадь круга пропорционально удельному весу отображаемых частей целого, исходя из соотношения -  $1\% = 3,6$  градуса.

**Знак Варзара.** - Известный русский статистик В. Е. Варзар предложил использовать прямоугольные фигуры для графического изображения трех показателей, один из которых является произведением двух других. В каждом таком прямоугольнике основание пропорционально одному из показателей — сомножителей, а высота его соответствует второму показателю — сомножителю. Площадь прямоугольника равна величине третьего показателя, являющегося произведением двух первых. Располагая рядом несколько прямоугольников, относящихся к разным показателям, можно сравнивать не только размеры показателя — произведения, но и значения показателей — сомножителей.

Пример. Запас лесного фонда равен произведению запаса ( $\text{м}^3$ ) на единице площади (га) и общей занимаемой площади (тыс. га).

| Общий запас<br>лесного фонда,<br>тыс. $\text{м}^3$ | Запас древостоя на<br>единице площади, $\text{м}^3$<br>на га | Занимаемая насаждениями<br>площадь, га |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| 105,7                                              | 100                                                          | 1057                                   |
| 5,9                                                | 65                                                           | 91                                     |



а - молодняки,  
б - средневозрастные.

На этом графике можно сравнить между собой:

- \* запас древостоя на единице площади (по длине основания);
- \* занимаемая насаждениями площадь (по длине боковой стороны);
- \* общий запас лесного фонда (по площади прямоугольника).

При использовании ПЭВМ описанные диаграммы и иной структуры строятся при помощи «мастер диаграмм» в приложении EXCEL.

### Вопросы для самоконтроля

- 1 Что такое выборочная и сгруппированная статистическая совокупность?
- 2 Как образуется классовый интервал?
- 3 Что такое кумулята, огива и как они отображаются графически?
- 4 Как построить полигон распределения статистических частот, гистограмму, диаграмму?

### Лабораторная работа

**Материалы и оборудование:** данные замеров статистических величин; миллиметровка; калькуляторы.

**Цель.** Образование выборочных, сгруппированных статистических совокупностей и их графическое отображение.

## *Ход работы*

**1 Образование выборочной совокупности.** На основании совокупности замеров диаметров и высот сосны (полученной от преподавателя) и таблицы случайных чисел (приложение А) образовать выборочную частичную совокупность, которая приводится в следующей форме:

| Порядковый номер в вариационном ряду<br>1.....50 | Порядковый номер отобранных деревьев | Значение признака         |                        |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------|------------------------|
|                                                  |                                      | Замер диаметра,<br>(Д) см | Замер высоты,<br>(Н) м |
|                                                  |                                      |                           |                        |

Просматривается с любого места таблица случайных чисел (Приложение А) в пределе до числового значения - 150, выбираются и заносятся в таблицу значения, соответствующие данному числовому интервалу в количестве 50 штук.

**2 Образование вариационных рядов.** На основании совокупности с 150 значениями диаметров и высот и основных положений по теме определяется размерность классов и проводится разноска частот вариантов по классам диаметров и высот.

**3 Графическое изображение вариационных рядов.** На основании сгруппированных вариационных рядов на миллиметровой бумаге вычерчивается (либо строится при помощи ПЭВМ) полигон частот диаметров и высот, полигон накопленных частот диаметров и высот, столбиковая диаграмма, кумулята, огива.

## **ТЕМА 2 СТАТИСТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СОВОКУПНОСТЕЙ НАБЛЮДЕНИЙ**

- 1 Статистические показатели малой выборочной совокупности
- 2 Статистические показатели сгруппированных данных

### ***Основные понятия по теме***

**Статистические показатели малой выборочной совокупности.** Наиболее распространенным и используемым показателем является **среднеарифметическая величина**. Она рассчитывается по формуле:

$$\bar{X} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / N = (\sum x_i) / N,$$

где  $N$  - общее число вариантов;  $\Sigma$  - знак суммирования;  
 $x_i$  - значения вариантов.

**Средняя квадратическая** величина используется при вычислении средней из величин объема, запаса, площади. Рассчитывается по формуле:

$$\bar{X}_q = \sqrt{(\sum x_i^2) / N}$$

где  $x_i^2$  - квадраты замеряемых величин - объем, площадь и т. п.;  $N$  - общее число деревьев в выборке;  $x_i$  - значения вариантов.

**Средняя геометрическая**  $M_g$  (или  $\bar{X}_g$ ) используется для расчета среднего темпа роста изучаемого признака. Она известна также как средняя логарифмическая, так как ее логарифм есть арифметическая средняя логарифмов составляющих величин.

Вычисляется по формуле:

$$\bar{X}_g = \sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n},$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - темпы роста (величины, показывающие, во сколько раз увеличивался признак от периода к периоду);  $n$  - число периодов.

При  $n > 2$  формулу удобнее применять в логарифмическом виде:

$$\ln \bar{X}_g = \frac{1}{n} (\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n) = (1/n) \cdot (\sum \ln x_i).$$

откуда  $\overline{X}_g = e^{\ln}$ , где  $e$  – основание натуральных логарифмов, равно 2,72.

**Средняя гармоническая** используется для вычисления средней величины отношений двух варьирующих величин. Она определяется по формуле:

$$\overline{X}_h = N / (\sum 1/x_i),$$

где  $N$  – число значений;  $x_i$  – значения соотношений величин  
Рассеяние вариант выборки относительно средней характеризуется:

**линейным отклонением;**

**среднеквадратическим отклонением - дисперсией;**

**основным отклонением;**

**коэффициентом изменчивости.**

Их вычисляют по формулам:

линейное отклонение  $\alpha = x_i - \bar{x}$ ,

среднеквадратическое отклонение (дисперсия)

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$$

основное отклонение  $D = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2}$

коэффициент изменчивости  $C_x = \frac{\sigma_x \cdot 100}{\bar{x}}$

При  $C_x \leq 30\%$  – выборка имеет большую степень концентрации вариант возле величины. При  $30\% \leq C_x \leq 100\%$  – степень концентрации допустимая. При  $C_x > 100\%$  – делается вывод о неоднородности выборки.

**Статистические показатели сгруппированных данных.** Для упрощения расчетов показателей сгруппированного статистического ряда применяется система так называемых моментов.

**Моменты случайной величины** являются обобщенным понятием числовой характеристики случайных величин. Оно широко применяется в механике для описания распределения масс (статистические моменты, моменты инерции и т.д.). Совершенно теми же приемами пользуются в теории вероятностей для описания

основных свойств распределения случайной величины. Моментом статистической величины называется среднее из отклонений индивидуальных значений признака от определенной величины.

Различают моменты двух видов: начальные и центральные.

В общем случае моменты распределения вариационного ряда определяются выражением 
$$\mu_p = \sum_{i=1}^k n_i \cdot (x_i - a)^p$$

В зависимости от значения «а» общая схема моментов порядка «р» разбивается на подсистемы.

а=0, получаем систему начальных моментов

$$\mu_{p,0} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i^p$$

а=x, получаем систему центральных (основных) моментов

$$\mu_{p,0} = \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^p, \text{ где } n_i - \text{ веса отдельных значений; } N$$

– общее число значений.

а=const, получаем систему условных моментов.

Показатель степени определяет порядок момента - первая степень показывает, что рассчитывается момент первого порядка, вторая степень – рассчитывается момент второго порядка и т. д. В большинстве случаев используются моменты четырех порядков.

**Расчет начальных моментов по способу произведений.** По данным разности численности вариационного ряда диаметров и высот по классам проводим поэтапные **расчеты моментов по способу произведений**, которые приводятся в таблице:

Пример расчета моментов по способу произведений

| X   | n     | A <sub>x</sub>      | a  | a <sup>2</sup> | a·n | a <sup>2</sup> ·n | a <sup>3</sup> ·n | a <sup>4</sup> ·n |
|-----|-------|---------------------|----|----------------|-----|-------------------|-------------------|-------------------|
| 77  | 4     |                     | -3 | 9              | -12 | 36                | -107              | 324               |
| 91  | 6     |                     | -2 | 4              | -12 | 24                | -48               | 96                |
| 105 | 15    |                     | -1 | 1              | -15 | 15                | -15               | 15                |
| 119 | 27    | 119                 | 0  | 0              | 0   | 0                 | 0                 | 0                 |
| 133 | 16    |                     | 1  | 1              | 16  | 16                | 16                | 16                |
| 147 | 10    |                     | 2  | 4              | 20  | 40                | 80                | 160               |
| 161 | 5     |                     | 3  | 9              | 15  | 45                | 135               | 405               |
| 175 | 0     |                     | 4  | 16             | 0   | 0                 | 0                 | 0                 |
| 189 | 2     |                     | 5  | 25             | 10  | 50                | 250               | 1250              |
|     | Сумма | Сумма верхней части |    |                | -39 | 75                | -171              | 435               |
|     | N=85  | Сумма нижней части  |    |                | 61  | 151               | 481               | 1831              |
|     |       | Сумма алгебр. d =   |    |                | 22  | 226               | 310               | 2266              |

В этой таблице A<sub>x</sub> – условное среднее значение, за которое принимается среднее значение класса с наибольшим числом вариантов, а – начальное отклонение – рассчитывается по формуле:

$a = \frac{X - Ax}{k}$ , где  $k$  – величина классового интервала (размер класса);  $X$  – среднее значение класса;  $Ax$  – условное среднее.

Начальный момент первой степени равен:

$$m_1 = \frac{\Sigma a \cdot n}{N} = 22/85 = 0,2588$$

Начальный момент второй степени равен:

$$m_2 = \frac{\Sigma a^2 \cdot n}{N} = 226/85 = 2,659$$

Начальный момент третьей степени равен:

$$m_3 = \frac{\Sigma a^3 \cdot n}{N} = 310/85 = 3,647$$

Начальный момент четвертой степени равен:

$$m_4 = \frac{\Sigma a^4 \cdot n}{N} = 2266/85 = 26,659$$

В представленной схеме первые две колонки – вариационный ряд. Третья колонка содержит условную среднюю величину, за которую обычно принимается одно из средних значений классов, ближайшее по значению к средней.

**Расчет начальных моментов по способу сумм.** Первые три колонки те же, что и в предыдущей таблице.

Пример расчета моментов по способу сумм

| x                   | n  | $A_x$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---------------------|----|-------|-------|-------|-------|-------|
| 77                  | 4  |       | 4     | 4     | 4     | -     |
| 91                  | 6  |       | 10    | 14    | -     | -     |
| 105                 | 15 |       | 25    | -     | -     | -     |
| 119                 | 27 | 119   | -     | -     | -     | -     |
| 133                 | 16 |       | 33    | -     | -     | -     |
| 147                 | 10 |       | 17    | 28    | -     | -     |
| 161                 | 5  |       | 7     | 11    | 17    | -     |
| 175                 | 0  |       | 2     | 4     | 6     | 8     |
| 189                 | 2  |       | 2     | 2     | 2     | 2     |
| Сумма верхней части |    |       | -39   | -18   | -4    | 0     |
| Сумма нижней части  |    |       | 61    | 45    | 25    | 10    |
| Сумма алгебр. d     |    |       | 22    | 27    | 21    | 10    |
| Сумма арифм. s      |    |       | 100   | 63    | 29    | 10    |

При этом важно, чтобы условное среднее было записано в строке избранного класса. (в нашем примере оно равно 119 и записано против четвертого класса). Затем в схеме наносятся прочерки в клетки, суммы которых исключаются.

Последовательное суммирование проводится вначале сверху, а затем снизу. Частоту первого класса переносят в колонку  $S_1$ . Далее эту частоту суммируют с частотой второго класса и т. д.

Все суммы в таблице выше условной середины – отрицательные, а ниже – положительные.

Расчеты моментов производятся в соответствии с приведенными формулами, где  $d$  – алгебраические суммы, а  $S$  – суммы арифметические.

Начальный момент первой степени равен:

$$m_1 = \frac{d_1}{N} = 22/85 = 0,2588.$$

Начальный момент второй степени равен:

$$m_2 = \frac{S_1 + 2 \cdot S_2}{N} = 100 + 2 \cdot 63/85 = 2,659$$

Начальный момент третьей степени равен:

$$m_3 = \frac{d_1 + 6d_2 + 6d_3}{N} = (22 + 6 \times 27 + 6 \times 21)/85 = 3,647$$

Начальный момент четвертой степени равен:

$$m_4 = (S_1 + 14S_2 + 36S_3 + 24 S_4)/N = (100 + 14 \cdot 63 + 36 \cdot 29 + 24 \cdot 10)/85 = 26,659.$$

Для характеристики формы распределения статистических величин используют **центральные моменты**, которые рассчитываются по начальным моментам.

Центральный момент первой степени всегда равен нулю, поскольку вычисляется как  $\mu_1 = m_1 - m_1$ .

Центральный момент второй степени рассчитывается через начальные моменты по формуле:  $\mu_2 = m_2 - m_1^2$ .

Центральный момент третьей степени рассчитывается через начальные моменты по формуле:  $\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$ .

Центральный момент четвертой степени рассчитывается через начальные моменты по формуле:  $\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$ .

Отклонение распределений фактических данных от нормального типа характеризуется **основными моментами** -  $r_3, r_4$ , которые показывают асимметричность **коэффициент асимметрии** -  $A$  и крутость **коэффициент эксцессов** распределений -  $E$ :

$$A = r_3 = \mu_3 / (\sqrt{\mu_2})^3; \quad E = r_4 - 3 = \mu_4 / (\mu_2)^2 - 3$$

При помощи моментов статистических величин рассчитываются также остальные характеристики вариационного ряда.

**Средняя** рассчитывается по формуле:  $\bar{X} = A_x + k \cdot m_1$

**Дисперсия** учитывает отклонение каждого из значений выборки от среднеарифметической величины:  $S = k \mu_2$ .

**Основное отклонение** представлено в тех же единицах измерения, что и средняя величина и рассчитывается в двух вариантах – неполное без учета размера класса

$$\sigma' = \sqrt{\mu_2} \text{ и полное с учетом размера класса } \sigma = K \cdot \sqrt{\mu_2}.$$

Величина **коэффициента вариации** является относительным выражением основного отклонения, которая позволяет судить о степени изменчивости вне зависимости от абсолютных значений выборки:

$$C_x = \frac{\sigma_x \cdot 100}{\bar{X}}.$$

**Вычисление смешанных моментов** позволяет характеризовать степень взаимообусловленных изменений наблюдений относительно друг друга.

Исходными данными для вычисления смешанного начального момента первого порядка  $m_{1x}$  служит таблица распределения диаметров и высот, которая составляется параллельно с рядами распределений.

Разноску наблюденных значений признаков производят сразу по обоим признакам. Каждую варианту в клетке, образуемой пересечением строки и столбца, соответствующих значениям варианты по обоим признакам (Приложение Б), обозначают постановкой точки или черточки, как при составлении ряда распределения. Если диаметр ствола сосны равен 20,8, а высота 28,0 м, варианта должна быть занесена в клетку, образуемую 3- строкой и 2-м столбцом таблицы. После разnosки всех вариантов и обозначения их в цифровой записи подводят итоги частот по каждой строке и столбцу. В таблице процесс разnosки вариантов и обозначения их точками не показаны. Приведены итоги распределения, показанные в цифрах.

Оформление таблицы распределения заканчивается вычислением эмпирических средних значений зависимого признака (высоты) по классам независимого (диаметра). Для этого сначала в пределах каждого класса независимого признака находят суммы произведений срединных значений классов зависимого признака на соответствующие им частоты, помещенные в корреляционной таблице. Найденные по каждому разряду суммы произведений (они вписаны во 2-й строке снизу) делят на общее количество частот класса.

Полученные в результате этого деления средние значения зависимого признака по классам независимого, то есть средние эмпирические высоты, вписаны в 3-й строке снизу.

**Смешанный начальный момент** вычисляется непосредственно на основе таблицы распределения соотношений диаметров и высот. Для нахождения моментов в таблицу с исходной информацией вводят 5 дополнительных столбцов и 7 10 дополнительных строк.

В первую дополнительную строку вписывают отклонения классовых вариантов ряда независимого признака  $X$  от условной средней

величины этого ряда  $M'$ , выраженные в рабочих единицах, то есть поделенные на величину классового промежутка ( $k_x$ ).

$$X_k = (X - M'_x) / k_x$$

Во вторую дополнительную строку вписывают произведения частот на условные отклонения ( $n_x x_k$ ) и в третью – произведения частот на квадраты условных отклонений ( $n_x x_k^2$ ). В следующую строку по каждому частному ряду распределения, то есть по каждому частному ряду распределения, то есть по каждому столбцу, вписывают произведения отклонений классовых вариантов ряда зависимой переменной от их условной средней величины на частоты каждого частного ряда зависимой.

Для класса  $X=16$ , например значения этих произведений получают так: условное отклонение  $y_k$  (в первом дополнительном столбце и восьмой строке таблицы), равное  $-3$ , умножают на численность  $n_{yx}=1$ ; условное отклонение (в 9-й строке таблицы), равное  $-4$ , умножают на численность  $n_{yx}=1$ ; условные отклонения 10-й и 12-й строк таблицы, соответственно равные  $-5$  и  $-7$ , умножают на численности, равные 1. Полученные произведения  $-3$ ,  $-4$ ,  $-5$ ,  $-7$  суммируют. Сумма произведений  $-19$ .

В пятую дополнительную строку вписывают значения произведений условных отклонений ряда независимой переменной  $x_k$  на алгебраические суммы произведений ( $n_{yx} y_k$ ), вписанные в предыдущей строке.

В шестую строку таблицы вписывают значения средних квадратов отклонений частных рядов зависимого признака по классам независимого. Для первого частного ряда (1-й столбец) средний квадрат

$$[(n_{yx} y_k)^2] / n_x = (-19)^2 / 4 = 90,25.$$

В седьмую (самую нижнюю строку) вписывают средние значения зависимого признака  $\bar{y}_i$  по каждому классу независимого. Эти значения впервые вычислены в процессе составления рабочей таблицы.

Содержание дополнительных пяти столбцов таблицы аналогично содержанию рассмотренных строк без двух последних. Оно ясно из символов, указанных в заголовках столбцов. Столбцы эти служат для проверки расчетов, произведенных в строках. Суммы третьей строки снизу и последнего столбца должны совпадать (см. число 225).

После проверки этих сумм и нахождения сумм других строк и столбцов вычисляют начальные моменты и основные отклонения. Формулы и последовательность расчетов приведены в нижней части таблицы справа.

В этих формулах:

$m_{1x}$  и  $m_{2x}$  - первый и второй начальные моменты ряда распределения независимого признака;

$m_{1y}$   $m_{2y}$  – 1 и 2-й начальные моменты ряда зависимого признака;

$m_{1xy}$  – момент произведения отклонений;

$m_{2y/x}$  –средний квадрат условных произвольных отклонений частных средних ряда у по классам x (второй момент);

$\sigma'_x$ ,  $\sigma'_y$  – основные отклонения вариантов, соответственно ряда x и у от их средних  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , выраженные в долях интервалов.

При помощи смешанных моментов вычисляются следующие статистические показатели.

**Коэффициент корреляции** является мерой тесноты связи между двумя величинами (например, Д и Н). Он может вычисляться при малом и большом числе наблюдений, изменяется в пределах от –1 до +1. Вычисляется по формуле:

$$r = (m_{1xy} - m_{1x} m_{1y}) / \sigma'_x \sigma'_y$$

Ошибка коэффициента вычисляется по формуле:

$$m_r = 1 - r^2 / \sqrt{N}.$$

**Корреляционное отношение.** В тех случаях, когда зависимость между величинами криволинейная, вычисляется корреляционное отношение  $\eta$ . Оно изменяется в пределах от 0 до +1 и отрицательным не может быть. Если корреляционное отношение стремиться к +1, то это означает, что криволинейная корреляция стремиться к функциональной зависимости. Корреляционное отношение всегда по своей абсолютной величине больше коэффициента корреляции.

Вычисляется по формуле: 
$$\eta = \sqrt{\frac{(m_{2y/x} - m_{1y}^2)}{\sigma'_y}}$$

### Вопросы для самоконтроля

1. Что такое статистические моменты и как они вычисляются?
2. Что такое основное отклонение, дисперсия, коэффициент вариации и как они вычисляются?
3. Что такое средняя арифметическая, средняя квадратическая, средняя гармоническая, средняя геометрическая и как они вычисляются?

## Лабораторная работа

**Материалы и оборудование:** данные замеров статистических величин и расчетов по лабораторной работе темы 1; калькуляторы.

**Цель:** Определение статистических показателей выборочной и сгруппированной совокупности

### Ход работы

1 На основе основных положений темы определить: среднюю арифметическую, среднюю квадратическую, среднюю геометрическую, среднюю гармоническую. В качестве отдельных вариантов используются значения диаметров или высот. Промежуточные показатели расчетов располагают в виде таблицы.

| $x_i$<br>(высота или диаметр) | $x_i^2$        | $\ln x_i$          | $1/x_i$  | $\alpha = (x_i - \bar{x})$ | $\alpha^2$ |
|-------------------------------|----------------|--------------------|----------|----------------------------|------------|
|                               |                |                    |          |                            |            |
| $\Sigma X_i$                  | $\Sigma X_i^2$ | $\Sigma (\ln X_i)$ | $\Sigma$ | $\Sigma$                   | $\Sigma$   |

2 На основе основных положений темы и данных выборочной совокупности определить: среднеквадратическое отклонение, дисперсию, коэффициент вариации.

3 На основе основных положений темы и данных сгруппированной совокупности найти начальные статистические моменты по способу произведений, по способу сумм.

4 На основе основных положений темы и данных сгруппированной совокупности найти центральные (основные) моменты рядов распределений по диаметру и высоте.

5 На основе основных положений темы и данных сгруппированной совокупности найти значение средней арифметической, дисперсии, основного отклонения, ассиметрии и эксцесса.

6 На основе основных положений темы и данных сгруппированной совокупности по высоте и диаметру найти смешанные моменты двух случайных величин и степень их взаимозависимости – коэффициента корреляции, корреляционного отношения.

### **ТЕМА 3    ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ**

- 1 Как осуществить расчет биномиального распределения?
- 2 Как осуществить расчет распределения Пуассона?

#### ***Основные понятия по теме***

***Определение типа распределения частот вариационного ряда.*** Показатели частот вариационных рядов по диаметру либо по высоте являются отражением частного случая распределения – для конкретного насаждения, в котором производился обмер деревьев. Если взять близкое по характеристикам насаждение, то его распределение деревьев обязательно совпадает с полученными аналитическими данными.

При решении задач связанных с обработкой лесоводственной информации часто необходимо выявлять принадлежность кривой отражающей распределение частот наблюдаемых экспериментальных значений к определенному типу.

Наиболее распространенным типом распределения является нормальное – которое характеризуется колоколообразной формой с осью симметрии совпадающей со среднеарифметической величиной. При отклонении от оси симметрии вправо или влево используются другие типы распределений.

***Тип распределения выбирается в зависимости от величины асимметрии и эксцесса.*** При нормальном распределении величина асимметрии стремится к нулю, а эксцесса к трем. Если значение асимметрии лежит в пределах 0,4-0,8, то расчет распределения ведут по типу А, при больших абсолютных значениях асимметрии рассчитывают распределение типа В (кривая Грама-Шарлье), при наличии максимальной частоты в выборке в одном из крайних классов (первый или последний) рассчитывают распределение Пуассона, при симметричном расположении частот – биномиальное распределение.

Определение проводится при помощи критерия Пирсона. Конкретный тип кривой устанавливают в зависимости от величины критерия -  $\chi$

$$\chi = \frac{r_3^2(r_4 - 3)}{4 \cdot (4r_4 - 3r_3^2) \cdot (2r_4 - 3r_3^2 - 6)};$$

где  $r_3$  и  $r_4$  – третий и четвертый основные моменты,

Тип кривых определяемых критерием Пирсона

| Тип кривой | Характерные признаки кривой                   | $\chi$              | Теоретический аналог распределения       |
|------------|-----------------------------------------------|---------------------|------------------------------------------|
| I          | ограничена с обеих сторон, асимметрична       | $\chi < 0$          | бета-распределение                       |
| II         | ограничена с обеих сторон, симметрична        | $\chi = 0$          |                                          |
| III        | ограничена слева, асимметрична                | $\chi = \infty$     | при $ \chi  > 4$ , – гамма-распределение |
| IV         | не ограничена по обоим сторонам, асимметрична | $0 < \chi < 1$      |                                          |
| V          | ограничена с одной стороны, асимметрична      | $\chi = 1$          |                                          |
| VI         | ограничена с одной стороны, асимметрична      | $1 < \chi < \infty$ |                                          |
| VII        | не ограничена по обоим сторонам, симметрична  | $\chi = 0$          |                                          |
| VIII       | не ограничена по обоим сторонам, симметрична  | $\chi = 0$          | нормальное распределение                 |

**Расчет биномиального распределения.** Соответствие эмпирического распределения биномиальному определяют разными способами в зависимости от величины частоты вариантов. Если величина частоты больше 10, то теоретические частоты биномиального распределения получают с достаточной точностью при помощи формулы частот нормального распределения. Если частоты меньше 10, то лучше воспользоваться формулой разложения бинома, отдельные члены которого представляют собой теоретические частоты биномиального распределения.

Теоретические частоты биномиального распределения по схеме нормального распределения вычисляются по формуле:

$$f' = \frac{(N_n \cdot k \cdot \varphi(t))}{\sigma}, \text{ где}$$

$f'$  – теоретические частоты биномиального распределения;

$N_n$  – сумма частот;

$\varphi(t)$  - функция от  $t$  равна  $0,39894/e^{0.5 \cdot t^2}$  (см. приложение В);

$t$  – нормированное отклонение  $(x - \bar{X})/\sigma$ ;

$\sigma$  – основное отклонение

$x$  – номера градаций классов статистического признака;

$\bar{X}$  – средняя арифметическая;

$f$  – эмпирические частоты;

$k$  – классовой интервал.

Теоретические частоты вычисляются согласно действиям по приведенному примеру в таблице в следующем порядке.

Перемножаем номера классов из столбца 1 на соответствующие им частоты из столбца 2, результаты записываем в столбце 3.

Числа столбца 3 умножаем на числа столбца 1, результаты записываем в столбце 4.

Суммируем числа столбцов 2-4, получаем итоги

$$N_n = 120, \quad \sum(x \cdot f) = 585, \quad \sum(x^2 \cdot f) = 3159.$$

Вычисляем среднюю арифметическую  $\bar{X} = 585 / 120 = 4,88$ .

Вычисляем среднее квадратическое и основное отклонение

$$\sigma^2 = \sqrt{((\sum(x^2 \cdot f) - (\sum(f \cdot x))^2 / N_n)) / (N - 1)}$$
$$\sigma^2 = (3159 - (585^2 / 120)) / (120 - 1) = 2,581$$
$$\sigma = \sqrt{2,581} = 1,607$$

Дисперсия  $\sigma^2 = 2,581$  меньше чем средняя 4,88, поэтому в данном случае можно применить биномиальное распределение.

Разности средней арифметической с номерами классов (без учета знаков) делим на  $\sigma = 1,607$ , получаем значения нормированных отклонений в столбце 5.

По значению  $t$  (без учета знака) в таблице приложения В находим значение  $\varphi(t)$  и выписываем их в столбец 6.

Находим значение выражения  $(N_n \cdot k) / \sigma = (120 \cdot 1) / 1,607 = 74,67$

Перемножаем числа из столбца 6 на полученное значение и, округляя до целых чисел, получаем в столбце 7 теоретические частоты кривой биномиального распределения, уравнение которой имеет вид:

$$f' = 74,67 \varphi(t), \text{ где } t = (x - 4,88) / 1,607.$$

### Пример расчета биномиального распределения

| х – номер классов | f – эмпирические частоты | х · f | х <sup>2</sup> · f | t = (х - $\bar{X}$ ) / σ | φ(t)    | f' = $N_n \cdot k \cdot \varphi(t) / \sigma$ |
|-------------------|--------------------------|-------|--------------------|--------------------------|---------|----------------------------------------------|
| 1                 | 4                        | 4     | 4                  | 2,41                     | 0,02186 | 2                                            |
| 2                 | 7                        | 14    | 28                 | 1,79                     | 0,08038 | 6                                            |
| 3                 | 8                        | 24    | 72                 | 1,17                     | 0,20121 | 15                                           |
| 4                 | 23                       | 92    | 368                | 0,55                     | 0,34294 | 26                                           |
| 5                 | 40                       | 200   | 1000               | 0,07                     | 0,39797 | 30                                           |
| 6                 | 23                       | 138   | 828                | 0,7                      | 0,31225 | 23                                           |
| 7                 | 9                        | 63    | 441                | 1,32                     | 0,16694 | 12                                           |
| 8                 | 4                        | 32    | 256                | 1,94                     | 0,06077 | 5                                            |
| 9                 | 2                        | 18    | 162                | 2,56                     | 0,01506 | 1                                            |
| Σ                 | 120                      | 585   | 3159               |                          |         | 119                                          |

**Расчет распределения Пуассона.** Распределение Пуассона характерно для событий, вероятность которых очень мала. Также как и при биномиальном распределении, эмпирические частоты распределения Пуассона являются числом наблюдений по градациям наблюдаемого признака. В распределении средняя арифметическая примерно равна дисперсии:  $\bar{X} \approx \sigma^2$ , что является основным его признаком.

Теоретические частоты распределения Пуассона вычисляют по формуле:

$$f' = \left( \frac{\bar{X}^x}{x!} \right) \cdot N_n \cdot e^{-\bar{X}}, \text{ где}$$

$f'$  – теоретические частоты распределения Пуассона;

х – градации значений наблюдаемого признака;

$x!$  – (икс-факториал) обозначает произведение ряда натуральных чисел, например:  $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ;

$\bar{X}$  – средняя арифметическая данного ряда;

$N_n$  – общее число наблюдений;

$e^{-\bar{X}}$  - основание натурального логарифма (2,7182818) в степени  $\bar{X}$ .

Пример расчета частот проводим в таблице. Средняя арифметическая находится по формуле:  $\bar{X} = \frac{\sum x \cdot f}{N_n}$ . Для приведенного примера она равна 0,672. Возводим последовательно  $\bar{X}$  в степень равную величинам градаций классов. Затем вычислим факториалы от  $x$ . Находим последовательно частное  $\frac{\bar{X}^x}{x!}$ . Вычисляем выраже-

ние  $N_n \cdot e^{-\bar{X}}$  равное для данного примера 62,43. Полученное частное последовательно перемножаем на 62,43 и записываем с округлением до целого в качестве найденных частот. Оценка совпадения эмпирических частот с теоретическими проводится по критерию  $\chi^2$  хи-квадрат (критерий Пирсона).

#### Пример расчета распределения Пуассона

| Средние градации классов | Частоты      | $\bar{X}^x = 0,672^x$ | $x!$     | $\frac{\bar{X}^x}{x!}$ | $\frac{\bar{X}^x}{x!} \cdot N_n \cdot e^{-\bar{X}}$ | $f'$ |
|--------------------------|--------------|-----------------------|----------|------------------------|-----------------------------------------------------|------|
| 0                        | 70           | 1,00                  | $0! = 1$ | 1,0                    | 62,43                                               | 62   |
| 1                        | 32           | 0,672                 | 1        | 0,672                  | 41,95                                               | 42   |
| 2                        | 14           | 0,4516                | 2        | 0,2258                 | 14,1                                                | 14   |
| 3                        | 2            | 0,3035                | 6        | 0,0506                 | 3,16                                                | 3    |
| 4                        | 4            | 0,2039                | 24       | 0,0085                 | 0,53                                                | 1    |
|                          | $\Sigma=122$ |                       |          |                        |                                                     | 122  |

**Расчет нормального распределения.** Основная формула, по которой строится эта кривая, - формула, выражающая зависимость между переменными величинами  $Y$  и  $X$ :

$$y = \frac{N}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2}$$

При использовании ПЭВМ расчет проводят по соотношению:

$$y = N \cdot \exp(\ln k + \ln 0,39894 - \ln \sigma - 0,5 \cdot t^2), \text{ где}$$

$y$  – расчетная, теоретическая частота;  
 $N$  – общее число вариант данной совокупности;  
 $\sigma$  – основное отклонение;  
 $(x_i - \bar{X})$  – отклонение варианты (середины класса) от средней арифметической;  
 $t = (x - \bar{X})/\sigma$  – нормированное отклонение;  
 $\pi = 3,1416$ ,  
 $k$  – классовый интервал,  
 $e$  – основание натуральных логарифмов, равное 2,7182818;

При отклонении  $(x_i - \bar{X})$  равном нулю  $e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2}$  превращается в единицу. В этом случае функция нормального распределения дает максимальную частоту. Используя эту особенность и нормируя отклонение, расчет теоретических частот проводится следующим образом.

Вначале определяется максимальная частота:

$$N_{\max} = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \text{ или}$$

$$n_{\max} = \frac{N}{\sigma' \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} = 85 / (1,61 \cdot \sqrt{6,2832}) = 21,064, \text{ где}$$

$\sigma$  – основное отклонение полное;

$\sigma'$  – основное отклонение неполное;

$N$  – сумма частот.

Затем расчет ведется по схеме, приведенной в таблице.

В первой колонке записываются средние значения классов с добавкой вверх и вниз по одному-два класса (если число классов меньше 10). За условное значение классов, помещенные во второй колонке, берутся начальные отклонения (см. вычисление моментов по способу произведений).

В третьей записываются частоты.

В четвертой колонке записывается алгебраическая разница между условным значением класса и первым начальным моментом. Эта же разница, деленная на основное отклонение (в условных единицах), представляет собой нормированное отклонение, которое используется для нахождения по приложению - Г функции  $e^{-\frac{1}{2}(x_i - \bar{X})^2}$ . При этом для нахождения искомых значений используется линейная

интерполяция между табличными данными. Умножением расчетной максимальной частоты построчно на найденные значения функции находятся теоретические частоты, которые записываются в последней колонке таблицы.

### Пример расчета нормального распределения

| Х -<br>среднее<br>значе-<br>ние<br>классов | Х' -<br>услов-<br>ное<br>значе-<br>ние<br>классов | n -<br>ча-<br>сто-<br>та, | Х' - m <sub>1</sub> | Х'' =<br>(Х' -<br>m <sub>1</sub> )/σ'<br>нормиро-<br>ванное<br>отклоне-<br>ние | $e^{-\frac{1}{2}(x_i - \bar{X})^2}$ | $n' = n'_{\max} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_i - \bar{X})^2}$ | n' -<br>окргл |
|--------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------------------------------|---------------|
| 63                                         | -4                                                | 0                         | -4,2588             | -2,6454                                                                        | 0,03023                             | 0,637                                                    | 0             |
| 77                                         | -3                                                | 4                         | -3,2588             | -2,0242                                                                        | 0,12891                             | 2,715                                                    | 3             |
| 91                                         | -2                                                | 6                         | -2,2588             | -1,4031                                                                        | 0,37369                             | 7,871                                                    | 8             |
| 105                                        | -1                                                | 15                        | -1,2588             | -0,7819                                                                        | 0,73661                             | 15,516                                                   | 15            |
| 119                                        | 0                                                 | 27                        | -0,2588             | -0,1608                                                                        | 0,98598                             | 20,769                                                   | 21            |
| 133                                        | 1                                                 | 16                        | 0,7412              | 0,4604                                                                         | 0,89793                             | 18,914                                                   | 19            |
| 147                                        | 2                                                 | 10                        | 1,7412              | 1,0816                                                                         | 0,55715                             | 11,736                                                   | 12            |
| 161                                        | 3                                                 | 5                         | 2,7412              | 1,7027                                                                         | 0,23467                             | 4,943                                                    | 5             |
| 175                                        | 4                                                 | 0                         | 3,7412              | 2,3239                                                                         | 0,06719                             | 1,415                                                    | 1             |
| 189                                        | 5                                                 | 2                         | 4,7412              | 2,9450                                                                         | 0,01309                             | 0,276                                                    | 1             |
| 203                                        | 6                                                 | 0                         | 5,7412              | 3,5662                                                                         | 0,00173                             | 0,037                                                    | 0             |
| Σ                                          |                                                   | 85                        |                     |                                                                                | 4,02718                             | 84,829                                                   | 85            |

**Расчет кривой нормального распределения типа А.** Распределение этого типа является разложением в ряд уравнения нормального распределения. Оно полнее учитывает ассиметрию, эксцесс и дает лучшую аппроксимацию экспериментального ряда, чем уравнение Лапласа-Гаусса (нормальное распределение).

Расчет теоретических частот ведется по формуле:  $n' = \frac{N}{\sigma^1} f_A(x)$ ,  
где функция  $f_A(x) = f(x) - \frac{r_3}{6} f^{III}(x) + \frac{r_4 - 3}{24} f^{IV}(x)$ , где  
**f(x)** – функция кривой нормального распределения;  
**f<sup>III</sup>(x), f<sup>IV</sup>(x)** - производные функции кривой нормального распределения;  
**r<sub>3</sub>, r<sub>4</sub>** – основные моменты;

Форма записи результатов расчета приведена в таблице.

В ней первые пять колонок заполняются так же, как при вычислении частот при нормальном распределении вариант.

Значения для шестой, седьмой и восьмой колонок берутся из таблицы приложения Д на основе нормированного отклонения (пятая колонка). При этом для нахождения искомых значений используется линейная интерполяция между табличными данными.

В таблице величина  $f^{III}_{(x)}$  приведена для положительных значений нормированного отклонения. Для отрицательных значений  $X''$  значность (плюс или минус) выбранных табличных значений меняется на противоположную. Значность табличных значений  $f(x)$  и  $f^{IV}_{(x)}$  не зависит от знака  $X''$  поэтому при выборке их из таблицы знаки не меняются.

В девятой колонке построчно записывается произведение  $f^{III}_{(x)}$  и коэффициента  $r_3 / \sigma$ . При этом следует внимательно учитывать знаки используемых при расчетах чисел.

При расчетах по десятой колонке следует иметь ввиду, что иногда выражение  $r_4 - 3$  может иметь отрицательное значение, а значение четвертой производной  $f^{IV}_{(x)}$  может менять значность при различных отклонениях.

В одиннадцатой колонке построчно приводятся алгебраические суммы значений шестой, девятой и десятой колонок.

В двенадцатой колонке приведены расчетные частоты. Их сумма должна быть близка к общей численности ряда (N).

Для контроля расчетов сопоставляется сумма значений одиннадцатой колонки и сумма значений из шестой, девятой и десятой колонок.

### Вопросы для самоконтроля

- 1 Как определяется тип кривой при помощи критерия Пирсона?
- 2 Как осуществить расчет нормального распределения?
- 3 Как осуществить расчет нормального распределения типа А?

### Лабораторная работа

**Материалы и оборудование:** данные замеров статистических величин и расчетов по лабораторной работе темы 2; калькуляторы.

**Цель.** Определение типа распределения и расчет теоретических частот биномиального, Пуассона, нормального распределения.

# Схема расчета частот распределения типа А

| Среднее<br>значение<br>классов<br>X | Условное<br>значение<br>классов<br>X' | Часто<br>та,<br>и | Нормирован<br>ное<br>отклонение<br>$X''=(X'-m)/\sigma'$ | $f(x)$  | $f^{III}(x)$ | $f^{IV}(x)$ | $-\frac{x-3}{6}f^{III}(x)$ | $\frac{x-3}{24}f^{IV}(x)$ | $f_A(x)$ | $n'=\frac{N}{f}f_A(x)$ |
|-------------------------------------|---------------------------------------|-------------------|---------------------------------------------------------|---------|--------------|-------------|----------------------------|---------------------------|----------|------------------------|
| 63                                  | -4                                    | 0                 | -2.6454                                                 | 0,01206 | +0,12753     | +0,12039    | -0,00824                   | +0,00283                  | 0,00665  | 0,351                  |
| 77                                  | -3                                    | 4                 | -2.0242                                                 | 0,05142 | +0,11422     | -0,24663    | -0,00738                   | -0,00579                  | 0,03825  | 2,020                  |
| 91                                  | -2                                    | 6                 | -1.4031                                                 | 0,14908 | -0,21571     | -0,73587    | +0,01394                   | -0,01728                  | 0,14574  | 7,695                  |
| 105                                 | -1                                    | 15                | -0.7819                                                 | 0,29386 | -0,54883     | -0,08651    | +0,03546                   | -0,00203                  | 0,32729  | 17,28                  |
| 119                                 | 0                                     | 27                | -0.1608                                                 | 0,39382 | -0,18833     | +1,12061    | +0,01217                   | +0,02631                  | 0,43230  | 22,825                 |
| 133                                 | 1                                     | 16                | 0.4604                                                  | 0,35882 | -0,46059     | +0,63623    | -0,02976                   | +0,01494                  | 0,34400  | 18,163                 |
| 147                                 | 2                                     | 10                | 1.0816                                                  | 0,22227 | -0,43997     | -0,58911    | -0,02843                   | -0,01383                  | 0,18001  | 9,504                  |
| 161                                 | 3                                     | 5                 | 1.7027                                                  | 0,09362 | +0,01608     | -0,56075    | -0,00104                   | -0,01317                  | 0,07941  | 4,093                  |
| 175                                 | 4                                     | 0                 | 2.3239                                                  | 0,02681 | -0,14952     | -0,00638    | +0,00966                   | -0,00015                  | 0,03632  | 1,918                  |
| 189                                 | 5                                     | 2                 | 2.9450                                                  | 0,00522 | -0,08719     | +0,13664    | +0,00563                   | +0,00321                  | 0,01406  | 0,742                  |
| 203                                 | 6                                     | 0                 | 3.5662                                                  | 0,00069 | -0,02394     | +0,06108    | +0,00154                   | +0,00143                  | 0,00366  | 0,193                  |
|                                     |                                       |                   |                                                         |         |              |             | -0,07485                   | -0,05225                  |          |                        |
|                                     |                                       |                   |                                                         |         |              |             | +0,07840                   | +0,04872                  |          |                        |
| $\Sigma$                            |                                       | 85                |                                                         | 1,60767 |              |             | +0,00355                   | -0,00353                  | 1,60769  | 84,783                 |

## Ход работы

1 На основе основных положений темы и данных сгруппированной совокупности по диаметру либо высоте определить тип кривой отражающей распределение частот вариационного ряда по критерию Пирсона.

2 На основе основных положений темы и данных сгруппированной совокупности по диаметру либо высоте рассчитать теоретические частоты биномиального и распределения Пуассона.

3 На основе основных положений темы и данных сгруппированной совокупности по диаметру либо высоте рассчитать теоретические частоты нормального распределения и типа А.

## ТЕМА 4 СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

- 1 Расчет ошибок основных статистических показателей.
- 2 Расчет доверительных интервалов статистических показателей.

### *Основные понятия по теме*

**Расчет ошибок основных статистических показателей.** Выборочная совокупность довольно точно воспроизводит свойства и соотношения в генеральной совокупности, но не абсолютно точно вследствие колеблемости изучаемых признаков. Поэтому между статистическими показателями выборочной совокупности и действительными значениями этих показателей генеральной совокупности всегда будут некоторые расхождения, которые являются случайными ошибками выборки (иначе - случайными ошибками репрезентативности) и называются **основными ошибками** того или иного статистического показателя.

На основании величины этой основной ошибки и значения соответствующего показателя выборки можно судить о действительном значении данного показателя в генеральной совокупности. Так, с вероятностью равной 0,68 (в 68% случаев из ста), можно утверждать, что расхождение между действительным значением данного показателя в генеральной совокупности и вычисленным его значением для выборки не превышает однократного значения основной ошибки этого показателя (со знаком плюс или минус); предельное же расхождение не превышает трехкратного значения основной ошибки (о чем можно утверждать с вероятностью 0,997 или 99,7% случаев из ста).

Основные ошибки статистических показателей вычисляются по формулам:

**Ошибка среднего значения** (или ошибка среднеквадратического отклонения)  $m_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ;

Если распределение частот сильно отличается от нормального, то ошибку сигмы вычисляют по формуле:  $m_\sigma = \sqrt{\frac{(\mu_4 - \mu_2^2)}{(4 \cdot \mu_2 \cdot N)}}$

**Ошибка коэффициента изменчивости**  $m_c = \frac{C}{\sqrt{n}} \left[ 0.5 + \left( \frac{C}{100} \right)^2 \right]$

**Точность опыта**, или процент ошибки наблюдения – это процент расхождения между генеральной и выборочной средней, который вычисляется по формуле:  $p = \frac{100 \cdot m_x}{X}$  или же по формуле

$p = \frac{C}{\sqrt{N}}$ . В 68% случаях расхождение между генеральной и выборочной средней не превышает однократного значения точности опыта (в одну или другую сторону), а предельное расхождение – не превосходит трехкратного значения.

Точность опыта показывает, насколько процентов можно ошибиться, если утверждать, что генеральная средняя равна полученной выборочной средней.

Полученный процент ошибки сопоставляется с заданным: если он не больше заданного, точность достаточная, а если больше, то точность результата является неудовлетворительной; значит, следует увеличить число наблюдений.

**Ошибка точности** опыта может быть вычислена через ошибку коэффициента изменчивости:  $m_p = \frac{m_c}{\sqrt{N}}$ .

**Ошибка показателя асимметрии** проводится по формуле:  $m_A = \sqrt{\frac{6}{N}}$ . Ошибка показателя эксцесса равна удвоенной ошибке показателя асимметрии.

Более точное значение ошибок получают по формуле

$$s_A = \sqrt{\frac{6n \cdot (n-1)}{(n-2) \cdot (n+1) \cdot (n+3)}};$$

$$s_E = \sqrt{\frac{24n \cdot (n-1)^2}{(n-3) \cdot (n-2) \cdot (n+2) \cdot (n+5)}}$$

После вычисления того или иного статистического показателя необходимо проверить степень его надежности или достоверности

путем деления величины данного показателя на величину его основной ошибки:  $t = \frac{X}{m_x}$ , где

$X$  - величина любого статистического показателя;

$m_x$  - величина ошибки любого статистического показателя.

Если частное  $t$  получится равным или больше трех, то значение показателя является надежным, достоверным, и им можно пользоваться для разных сопоставлений и выводов. Если же это отношение будет меньше трех, то данный показатель оказывается ненадежным, величина его не достоверна и является лишь в той или иной мере вероятной. Такие показатели нельзя сопоставлять между собой или производить на основе их заключения.

Нередко приходится решать вопрос, насколько существенно различие в значениях показателей какого-либо признака, вычисленных для разных совокупностей. С этой целью находится основная ошибка разницы чисел и доказывается ее достоверность по выше описанному принципу.

Ошибка разности вычисляется как корень квадратный из суммы квадратов основных ошибок исследуемого показателя, то есть

$$m_s = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}.$$

Полученную разность показателей делят на его ошибку. Находится показатель существенности различия средних значений:

$$t = \frac{X_1 - X_2}{m_s} = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}.$$

Если этот показатель получится больше трех, то различие существенно, доказано, и данное мероприятие вызвало существенное изменение; обе сравниваемые выборочные совокупности являются представителями качественно разных генеральных совокупностей. Если же он получится меньше трех, то можно утверждать, что расхождение оказалось случайным, недостоверным и во всяком случае целесообразность данного мероприятия осталась недоказанной.

**Расчет доверительных интервалов статистических показателей.** Среднее значение, основное (квадратическое) отклонение, коэффициент изменчивости, асимметрия, эксцесс дают представление о величине и форме распределений наблюдений. Однако они не дают представления о возможных значениях случайной величины. Оно заключается в вычислении вероятности того, что значение величины будет заключаться в определенных границах. Считается, что границы достоверно определены если вероятность близка к

единице, например, 0,99 или 0,999 (99,0% или 99,9%). Соответствующие границы называются доверительными.

В зависимости от типа распределения данных доверительный интервал рассчитывается двумя способами.

В симметричных распределениях, близких к нормальному, размах отклонений данных от средней арифметической обычно равен приблизительно  $3\sigma$  в обе стороны от значения средней. (так называемый закон трех сигм).

При расчете доверительного интервала для трех стандартных доверительных уровней: 95%, 99%, 99,9%  $t$  выбирается по числу степеней свободы из таблицы.

Значения показателя  $t$  (критерия Стьюдента)

| Число степеней свободы | Доверительные уровни |      |       |
|------------------------|----------------------|------|-------|
|                        | 95%                  | 99%  | 99,9% |
| 9                      | 2,3                  | 3,2  | 4,8   |
| 10                     | 2,2                  | 3,2  | 4,6   |
| 11-14                  | 2,2                  | 3,0  | 4,3   |
| 15-20                  | 2,1                  | 2,9  | 3,9   |
| 21-30                  | 2,1                  | 2,8  | 3,7   |
| 31-60                  | 2,0                  | 2,7  | 3,5   |
| 61-120                 | 2,0                  | 2,6  | 3,4   |
| $\infty$               | 1,96                 | 2,58 | 3,29  |

Доверительный интервал статистического показателя, например, средней арифметической строится по формуле:

$$\bar{X} - t \cdot m_{\bar{x}} < \text{истинное значение} < \bar{X} + t \cdot m_{\bar{x}}$$

Подставляя в формулу величины среднего арифметического, коэффициента вариации, коэффициента асимметрии, эксцесса и их ошибок определяются доверительные интервалы для этих показателей.

Когда доверительный интервал необходимо определить при неизвестном типе распределения вариант применяется неравенство Чебышева. В этом случае подразумевается, что размах отклонений от средней арифметической в совокупности может быть больше, чем в нормальном распределении, то есть больше, чем  $3\sigma$ .

Согласно неравенству Чебышева истинная средняя арифметическая находится в интервале:

$$\bar{X} - \frac{m_{\bar{x}}}{\sqrt{1-P'}} < \text{истинное значение} < \bar{X} + \frac{m_{\bar{x}}}{\sqrt{1-P'}}, \text{ где}$$

$\bar{x}$  - средняя арифметическая, рассчитанная по выборке;  $m_M$  - ее ошибка;  $P'$  - доверительный уровень в долях единицы или  $1 - P' = W$  - уровень значимости, например, доверительный уровень вероятности равен 0,95 95%, а уровень значимости  $W = 1 - 0,95 = 0,05$ ).

Подставляя в формулу величины среднего арифметического, коэффициента вариации, коэффициента асимметрии, эксцесса и их ошибок строятся доверительные интервалы для этих показателей.

### Вопросы для самоконтроля

- 1 Как определяются основные ошибки статистических показателей?
- 2 Как определяется доверительный интервал при нормальном распределении статистических показателей?
- 3 Как определяется доверительный интервал при неизвестном типе распределений статистических вариантов?

### Лабораторная работа

**Материалы и оборудование:** данные замеров статистических величин и расчетов по лабораторной работе темы 2; калькуляторы.

**Цель.** Определение основных ошибок статистических показателей и их доверительных интервалов.

### Ход работы

1 На основе основных положений темы и расчетов по лабораторной работе темы 2 определить основные ошибки статистических показателей;

2 На основе основных положений темы и расчетов по лабораторной работе темы 2 определить доверительный интервал для основных ошибок статистических показателей.

## **ТЕМА 5 СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ**

- 1 Критерий согласия Пирсона.
- 2 Критерий согласия Колмогорова-Смирнова.

### ***Основные понятия по теме***

**Критерий согласия Пирсона.** Критерии различия, при помощи которых могут быть сравнены статистические совокупности, разделяются на две группы: параметрические и непараметрические. К первой группе относятся критерии, для применения которых необходимо вычислить среднюю арифметическую, сигму или ошибки параметров (критерий Стьюдента, Фишера).

Непараметрические критерии не требуют для своего применения вычисления названных показателей, что упрощает процесс сравнения совокупностей. Критерий согласия Пирсона (или  $\chi^2$ ), критерий Колмогорова (или лямбда  $\lambda$ ) относятся к непараметрическим критериям.

Оценка близости, согласованности в распределении частот, вычисленных для любого типа распределений и полученных по фактическим данным производится при помощи критерия Пирсона. Он может быть также применен как для сравнения двух вариационных рядов, так и для установления правильности выбора теоретического распределения. Он рассчитывается по формуле:

$$\chi^2 = \frac{1}{K-1} \sum \frac{(n - n^1)^2}{n^1}, \text{ где}$$

$\chi^2$  - критерий Пирсона;

K – количество классов включая добавленные при проведении расчетов;

n – частота фактическая;

$n^1$  – частота расчетная.

Если критерий согласия равен или больше 2, то расхождение сравниваемых рядов считается существенным, и если меньше 2, - расхождение несущественное. Более точная оценка значимости коэффициента проводится по специальным таблицам.

Расчет критерия согласия Пирсона оформляется в виде таблицы.

### Пример расчета критерия согласия Пирсона

| X                                        | n           | n'          | $n - n'$ | $(n - n')^2$ | $(n - n')^2 / n'$ |
|------------------------------------------|-------------|-------------|----------|--------------|-------------------|
| 63                                       | 0           | 1           | -1       | 1            | 1                 |
| 77                                       | 4           | 3           | 1        | 1            | 0,33              |
| 91                                       | 6           | 8           | -2       | 4            | 0,50              |
| 105                                      | 15          | 16          | -1       | 1            | 0,06              |
| 119                                      | 27          | 21          | 6        | 36           | 1,71              |
| 133                                      | 16          | 19          | -3       | 9            | 0,47              |
| 147                                      | 10          | 12          | -2       | 4            | 0,33              |
| 161                                      | 5           | 4           | 1        | 1            | 0,25              |
| 175                                      | 0           | 1           | -1       | 1            | 1                 |
| 189                                      | 2           | 1           | 1        | 1            | 1                 |
| 203                                      | 0           | 1           | -1       | 1            | 1                 |
|                                          | $\Sigma$ 85 | $\Sigma$ 87 |          |              | $\Sigma$ 4,65     |
| $\chi^2 = (1/ 11-1) \times 4,65 = 0,465$ |             |             |          |              |                   |

**Критерий согласия Колмогорова-Смирнова.** Один из наиболее простых и удобных при сопоставлении эмпирических совокупностей большого объема – критерий, предложенный А.Н. Колмогоровым и Н.В. Смирновым. Этот непараметрический показатель, обозначаемый греческой буквой  $\lambda$  (лямбда), представляет собой максимальную разность ( $d_{\max}$ ) между значениями накопленных частот эмпирического и вычисленного рядов (без учета знаков d), отнесенную к корню квадратному из суммы всех вариант совокупности:

$$\lambda = \frac{d_{\max}}{\sqrt{n}}$$

Условием применения критерия «лямбда» служит достаточное число (не менее 100) наблюдений.

Предельные значения критерия лямбда, соответствующие трем уровням доверительной вероятности –  $P_1 = 0,95$ ,  $P_2 = 0,99$  и  $P_3 = 0,999$  – соответственно равны 1,36, 1,63 и 1,95.

Расчет критерия «лямбда» показан на примере распределения высот в 40-летнем сосняке.

### Пример расчета критерия Колмогорова-Смирнова

| Срединные значения классов (х) | Эмпирические частоты (р) | Теорет. вычисл. частоты (окргл.) (р') | Накопленные Частоты |     | p-p'=d |
|--------------------------------|--------------------------|---------------------------------------|---------------------|-----|--------|
|                                |                          |                                       | р                   | р'  |        |
| 8,8                            | 1                        | 1                                     | 1                   | 1   | 0      |
| 9,3                            | 2                        | 2                                     | 3                   | 3   | 0      |
| 9,8                            | 3                        | 4                                     | 6                   | 7   | 1      |
| 10,3                           | 7                        | 8                                     | 13                  | 15  | 2      |
| 10,8                           | 10                       | 12                                    | 23                  | 27  | 4      |
| 11,3                           | 16                       | 15                                    | 39                  | 42  | 3      |
| 11,8                           | 16                       | 16                                    | 55                  | 58  | 3      |
| 12,3                           | 17                       | 15                                    | 72                  | 73  | 1      |
| 12,8                           | 12                       | 12                                    | 84                  | 85  | 1      |
| 13,3                           | 7                        | 8                                     | 91                  | 93  | 2      |
| 13,8                           | 4                        | 4                                     | 95                  | 97  | 2      |
| 14,3                           | 3                        | 2                                     | 98                  | 99  | 1      |
| 14,8                           | 2                        | 1                                     | 100                 | 100 | 0      |
| Сумма                          | 100                      | 100                                   | -                   | -   | -      |

Расчет необходимых значений показан в таблице. Максимальное значение разности  $p - p' = 4$ , откуда  $\lambda = \frac{4}{\sqrt{100}} = 0,4$ . Полученная величина значительно меньше предельного значения лямбда (1,36) для  $P = 0,05$ . следовательно, расхождения между эмпирическими и вычисленными частотами симметричного распределения лежат в пределах случайных колебаний, они не достоверны. На этом основании распределение высот в исследованном древостое можно считать нормальным.

### Вопросы для самоконтроля

- 1 Что такое параметрические и непараметрические критерии и как они вычисляются?
- 2 Для каких целей применяются статистические критерии?

## Лабораторная работа

**Материалы и оборудование:** данные замеров статистических величин и расчетов по лабораторной работе темы 3; калькуляторы.

**Цель.** Определение соответствия расчетных и фактических кривых распределений диаметров и высот по критериям согласия Пирсона, Колмогорова – Смирнова.

### Ход работы

1 На основе основных положений темы и расчетов по лабораторной работе темы 3 определить соответствие расчетных и фактических кривых распределений диаметров и высот по критерию согласия Пирсона;

2 На основе основных положений темы и расчетов по лабораторной работе темы 3 определить соответствие расчетных и фактических кривых распределений диаметров и высот по критерию Колмогорова – Смирнова.

## ТЕМА 6 КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

1 Коэффициент корреляции.

2 Коэффициент множественной корреляции.

### *Основные понятия по теме*

**Коэффициент корреляции.** Отличительной особенностью биологических объектов является многообразие признаков, характеризующих каждый из них. Часто наблюдается связь между вариациями по различным признакам. В простейшем случае связь между двумя переменными величинами строго однозначна. Например, вес образцов, сделанных из одного и того же материала, определяется их объемом. Такого рода зависимость принято называть **функциональной**. Для биологических объектов связь обычно бывает менее жесткой: объекты с одинаковым значением одного признака имеют, как правило, разные значения по другим признакам. Такую связь между вариациями разных признаков называют корреляцией (дословный перевод: соотношение) между признаками.

Если устанавливается наличие и характер корреляции между признаками (например, диаметром и высотой), то производится

разноска полученных численных значений в одну общую таблицу называемую **корреляционной решеткой** (см. вычисление смешанных моментов).

Для расчета коэффициента корреляции формируется выборка. Для этого используются значения частичной совокупности в объеме 50 пар значений диаметров и высот из первой лабораторной работы (задание 1). Данные группируются согласно следующей таблице. В каждой колонке должно быть 25 значений.

| Диаметр X                                                | Высота Y                                                 | Диаметр                                                  | Высота Z                                                 |
|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| Выписываются значения с номерами: 2, 4, 6, и т. д. до 50 | Выписываются значения с номерами: 2, 4, 6, и т. д. до 50 | Выписываются значения с номерами: 1, 3, 5, и т. д. до 49 | Выписываются значения с номерами: 1, 3, 5, и т. д. до 49 |

Значения с четными или нечетными номерами преобразуются согласно следующей таблице.

| Диаметр, см<br>X                          | Высота, м<br>Y | X <sup>2</sup> | Y <sup>2</sup> | X · Y |
|-------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|-------|
| Значения из частичной совокупности 25 шт. |                |                |                |       |
| Σ                                         | Σ              | Σ              | Σ              | Σ     |

Затем вычисляется коэффициент корреляции, его ошибка и достоверность.

Коэффициент корреляции вычисляется в тех случаях, когда требуется выразить количественно силу связи между двумя сопряженными признаками, если известно, что зависимость одного из признаков от другого близка к прямолинейной.

При малых объемах выборок (до 30-50) коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$r = \frac{\sum x \cdot y - (\sum x \cdot \sum y) / N}{\sqrt{[\sum x^2 - (\sum x)^2 / N] \cdot [\sum y^2 - (\sum y)^2 / N]}}$$

При расчетах коэффициента корреляции на ПЭВМ как для малых, так и для больших рядов (без группирования в классы) удобна формула:

$$r = [ \sum (X - \bar{X}) (Y - \bar{Y}) ] / \sqrt{\sum (X - \bar{X})^2 \sum (Y - \bar{Y})^2}$$

Достоверность коэффициента корреляции можно оценить по формуле  $t = (0,5 \cdot \ln(1 + r / (1 - r))) \cdot \sqrt{N - 3}$ , где  $t$  – критерий Стьюдента при числе свободы  $\nu = N - 2$ .

По результатам расчетов делается вывод о характере связи:

- связь между признаками прямая ( $r > 0$ ) или обратная ( $r < 0$ );
- теснота связи близка к функциональной  $r = 1.0$ ;
- $r = 0.901 - 0.999$  связь очень высокая;
- $r = 0.701 - 0.900$  высокая;
- $r = 0.501 - 0.700$  значительная;
- $r = 0.301 - 0.500$  слабая;
- $r = 0 - 0.300$  отсутствует.

Затем определяется достоверность вычисленных показателей и сравниваются их значения, полученные по способу смешанных моментов и по приведенной формуле для малой выборки.

**Коэффициент множественной корреляции.** При анализе множественных взаимосвязей **выявляются структуры** связей в определенном наборе признаков, и **проводится отбор** наиболее тесно связанных между собой признаков.

Силу совокупной взаимосвязи трех признаков, когда измеряется совместное взаимодействие двух признаков с третьим можно определить при помощи множественных коэффициентов корреляции по формулам:

$$R^2_{y \cdot xz} = (r^2_{xy} + r^2_{yz} - A) / (1 - r^2_{xz})$$

$$R^2_{x \cdot yz} = (r^2_{xy} + r^2_{xz} - A) / (1 - r^2_{yz})$$

$$R^2_{z \cdot xy} = (r^2_{zx} + r^2_{zy} - A) / (1 - r^2_{xy}), \text{ где}$$

$R_{y \cdot xz}$  – множественный коэффициент корреляции; точка например, после  $y$  означает, что изучается совместное или объединенное влияние аргументов  $x, z$  на функцию  $y$ ;

$A = 2 r_{xy} r_{xz} r_{yz}$ ,  $r_{yz}, r_{yx}, r_{xz}$  – полные (обычные) коэффициенты корреляции попарно между признаками  $x, y, z$ ;

$r_{yx \cdot x}, r_{yx \cdot z}, r_{xz \cdot y}$  - частные коэффициенты корреляции попарно при исключении влияния третьего признака, индекс последнего ставится справа от точки.

Критерий достоверности (t) частного коэффициента корреляции при любом объеме совокупности вычисляют по формуле:

$$t = R_{xy \cdot z} \sqrt{(N - n - 2) / (1 - R_{xy \cdot z}^2)}$$

В формулу вместо  $R_{y \cdot xz}$  можно подставлять величину любого частного коэффициента корреляции. При оценке достоверности частного коэффициента корреляции по таблице значений критерия Стьюдента число степеней свободы принимается  $v = N - 2 - n$ , где N – объем выборки; n – число факторов, действие которых устраняется (в данном случае  $n = 1$ ).

Вычисление множественного и частных коэффициентов корреляции производится в следующем порядке. Вычисляем полные коэффициенты корреляции между значениями высот и диаметров, для чего произведем действия, указанные в таблице. Подставляя суммы столбцов этой таблицы в формулу вычисления коэффициента корреляции, получим значения  $r_{yx}, r_{xz}, r_{yz}$  и оцениваем их величину и достоверность.

| Диаметр<br>X | Высота<br>Y | Высота<br>Z | $X^2$    | $Y^2$    | $Z^2$    | XY       | XZ       | YZ       |
|--------------|-------------|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              |             |             |          |          |          |          |          |          |
| $\Sigma$     | $\Sigma$    | $\Sigma$    | $\Sigma$ | $\Sigma$ | $\Sigma$ | $\Sigma$ | $\Sigma$ | $\Sigma$ |

### Вопросы для самоконтроля

- 1 Что такое коэффициент корреляции и как он вычисляется?
- 2 Что такое множественный коэффициент корреляции и как он вычисляется?
- 4 Какова сфера применения корреляционного анализа в лесном хозяйстве?

### Лабораторная работа

**Материалы и оборудование:** данные замеров статистических величин и расчетов по лабораторной работе темы 2; калькуляторы.

**Цель.** Определение простого и множественного коэффициентов корреляции.

### **Ход работы**

1 На основе положений темы 6 и выборочной совокупности из лабораторной работы по теме 2 отразить взаимообусловленность диаметров и высот деревьев аналитическими показателями.

## **ТЕМА 7 РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ**

- 1 Расчет линии регрессии.
- 2 Оценка регрессионных уравнений.

### ***Основные понятия по теме***

***Расчет линии регрессии.*** Регрессионный анализ предполагает аналитическое выражение вероятностной связи между признаками уравнениями различного вида.

Регрессионные модели обычно используют для выражения разного рода связей в лесной таксации, лесоводстве и в других лесных дисциплинах. Чаще всего они применяются для нахождения общей зависимости по экспериментальным данным. Выведенное уравнение сглаживает (выравнивает) полученные (экспериментальные) данные. В этом случае сохраняется главная тенденция изменения функции в зависимости от изменения аргументов, и устраняются случайные отклонения.

По форме различают линейную регрессию и не линейную. По направлению связи различают прямую т.е. с увеличением признака  $x$  увеличивается признак  $y$  и обратную т.е. с увеличением  $x$  уменьшается  $y$ . Наиболее точная оценка принадлежности к виду связи производится с помощью метода наименьших квадратов (МНК). При МНК  $\min$  сумма квадратов отклонений эмпирических значений  $y$  от теоретических полученных по выбранному уравнению регрессии стремится к минимуму.

Простейшей теоретической линией регрессии является прямая линия, или парабола первого порядка, которая имеет вид:

$$Y' = a_0 + a_1 \cdot x,$$

где  $Y'$  - теоретические значения функции или зависимой переменной;  $x$  - аргумент или независимая переменная;  $a_0, a_1$  - коэффициенты уравнения, имеющие различное значение в зависи-

мости от специфики изучаемого явления;  $\bar{Y}$  – эмпирические значения зависимой переменной.

Коэффициенты определяются по формулам:

$$a_0 = \bar{Y} - a_1 \cdot \bar{X} \quad a_1 = \frac{\sum(x - \bar{X}) \cdot (y - \bar{Y})}{\sum(x - \bar{X})^2},$$

где  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  средние арифметические рядов аргументов ( $X$ ) и функции ( $Y$ ).

Ход вычислений приведен в таблице.

| $x$      | $y$      | $x - \bar{X}$ | $(x - \bar{X})^2$ | $(y - \bar{Y})$ | $(x - \bar{X}) \cdot (y - \bar{Y})$ | $(y - \bar{Y})^2$ | $y'$ |
|----------|----------|---------------|-------------------|-----------------|-------------------------------------|-------------------|------|
|          |          |               |                   |                 |                                     |                   |      |
| $\Sigma$ | $\Sigma$ | $\Sigma$      | $\Sigma$          |                 | $\Sigma$                            | $\Sigma$          |      |

В качестве исходных данных используются вариационные ряды частичной совокупности или средние значения высот и диаметров при вычислении смешанных моментов.

Если известны среднеквадратические отклонения для рядов  $x$  и  $y$  и найден коэффициент корреляции между ними (см. вычисление смешанных моментов), то величина  $a_1$  вычисляется по формуле:

$a_1 = r_{xy} \cdot (\sigma_y / \sigma_x)$ , где  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$  – дисперсии выборочных (или усредненных) рядов;  $r_{xy}$  – мера корреляционной взаимосвязи.

Точки пересечения с осями ординат и абсцисс равны соответственно:

$$y = a_0, \quad x = -(a_0/a_1).$$

При исследованиях нередко применяется аппроксимация криволинейных эмпирических зависимостей параболой второго порядка и другими видами уравнений, нахождение аналитического выражения их проводится на ПЭВМ при помощи встроенных программ в EXCEL (см. лаб. работу темы 9).

**Оценка регрессионных уравнений.** Поскольку в определении линий регрессии участвуют несколько параметров, то необходимо оценить пределы изменчивости каждого из них.

Наиболее вероятная область расположения линии прямой регрессии по отношению к оси абсцисс определяется величиной коэффициента  $a_1$  и тангенсом угла, геометрическим смыслом которого является коэффициент корреляции. При отсутствии регрессии  $r=0$ , и тогда линия регрессии  $y$  по  $x$  располагается горизон-

тально по отношению к оси абсцисс, а линия регрессии  $x$  по  $y$  - вертикально. Место их пересечения соответствует средним значениям обоих признаков.

Второй коэффициент определяет величину отрезка, отсекаемого на оси  $y$  линией регрессии. Величина его определяет границы колеблемости регрессии по ординате, которая расширяется в обе стороны от средней точки  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

Поскольку опытные данные всегда имеют определенную величину изменчивости, то и все показатели в том числе и уравнения регрессии определяются с некоторой степенью достоверности.

Определение величины ошибки найденных уравнений и оценка достоверности полученных коэффициентов уравнения прямой проводится по формулам:

$$m_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\sum (y - y')^2}{N - n}}, \text{ или } \sigma_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - y'_i)^2}{n - 2}} \text{ где } \sigma_{y \cdot x}, m_{y \cdot x} -$$

ошибка уравнения;  $y$  - эмпирические значения функции;  $y'$  - теоретические значения функции;  $N$  - число точек эмпирической линии регрессии, по которым вычислялось уравнение регрессии;  $n$  - число коэффициентов уравнения, включая свободный член.

Здесь величина  $\sigma_{y \cdot x}$  имеет такое же значение как и  $\sigma$  в вариационном ряду. В пределах одной  $\sigma_{y \cdot x}$  отклонения распределяются вверх и вниз от линии регрессии в 68% случаев. В 95% они лежат в пределах  $2 \sigma_{y \cdot x}$ , а в 99,7% случаев отклонения от теоретической линии регрессии составляют величину  $3 \sigma_{y \cdot x}$ . Ошибку уравнения регрессии можно определить и по формуле:  $m_{y \cdot x} = \sigma_y \sqrt{1 - r^2}$ , где  $m_{y \cdot x}$  - ошибка теоретических значений функции;  $\sigma_y$  - среднее квадратическое отклонение ряда  $y$ ;  $r$  - коэффициент корреляции между  $x$  и  $y$  (можно использовать и корреляционное отношение при наличии криволинейности связи между признаками). Эта формула представляет упрощенный вариант вычислений и применяется для больших выборок.

В таблицах по вычислению коэффициентов уравнений в последней колонке рассчитываются теоретические значения функции. Получаем попарно разности  $(y - y')$ , возводим все разности в квадрат и получаем их сумму:  $\sum (y - y')^2$ . Применив формулу:

$m_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\sum (y - y')^2}{N - n}}$ , к уравнению прямой, параболы определим их ошибку.

**Достоверность** найденного коэффициента  $a_1$  определяется по формуле:  $t = a_1 \cdot \sigma_x \cdot \sqrt{N-1} / m_{yx}$ , где  $t$  – величина критерия Стьюдента, сравниваемая с критической при числе степеней свободы  $\nu = N-2$ ;  $\sigma_x$  – среднее квадратическое отклонение ряда аргументов;  $m_{yx}$  – ошибка уравнения;  $N$  – объем выборки.

Если вычисленная величина меньше табличной, то связь между  $x$ ,  $y$  и значение  $a_1$  достоверны, а если вычисленная будет больше табличной величины, то связь данных признаков и значение первого коэффициента недостоверны.

Достоверность отличия от нуля коэффициента  $a_0$  можно оценить по формуле:

$$t = \frac{a_0}{m_{y \cdot x} \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} \cdot \left( \frac{\bar{X}}{\sigma_x} \right)^2}}, \text{ где } t \text{ – величина критерия Стьюдента,}$$

сравниваемая с критической при числе степеней свободы  $\nu = N-2$ ;  $\sigma_x$  – среднее квадратическое отклонение ряда аргументов;  $m_{yx}$  – ошибка уравнения;  $N$  – объем выборки.

### Вопросы для самоконтроля

- 1 Что такое метод МНК?
- 2 В чем состоит геометрический смысл коэффициентов уравнения прямой и как они определяются?
- 3 Что лежит в основе статистической оценки регрессионных уравнений и как ее определить?

### Лабораторная работа

**Материалы и оборудование:** данные замеров статистических величин и расчетов по лабораторной работе темы 2; калькуляторы.

**Цель.** Определение величины коэффициентов уравнений регрессии методом наименьших квадратов и их статистической оценки.

### Ход работы

- 1 На основе основных положений темы и расчетов по лабораторной работе темы 2 определить взаимообусловленность диаметров и высот деревьев аналитическими уравнениями.

- 2 Определить ошибки регрессионных уравнений и достоверность коэффициентов линейных уравнений.

## **ТЕМА 8 ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ**

- 1 Схема расчетов при дисперсионном анализе.
- 2 Подготовка статистических массивов для дисперсионного анализа.

### ***Основные понятия по теме***

***Схема расчетов при дисперсионном анализе.*** Дисперсионный или вариа́нсный анализ (analysis of variance) предполагает установление роли отдельных факторов в изменчивости того или иного признака, при котором общая дисперсия как количественных, так и качественных признаков раскладывается на отдельные составляющие.

У изучаемых признаков в эксперименте имеется не одно, а несколько значений, которые называют *градациями или уровнями фактора A*.

Число наблюдений (вариант) в каждой группе обозначается как «n», но равное число наблюдений в группах не обязательно. При неравном числе можно исходить из среднего числа  $n_i$ .  $N = k \cdot n$  ( $=k \cdot n_i$ )

Обычно разные уровни принято обозначать буквой  $i$ , а отдельные варианты (наблюдения) — буквой  $j$ . Поэтому каждую варианту, независимо от того, где она находится, обозначают в общем виде как  $x_{ij}$ . В пределах каждого уровня (группы) отдельные варианты принимают случайные значения:

$x_{.1}, x_{.2}, x_{.3}, \dots, x_{.j}, \dots, x_{.n}$

Средние по группам:  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_a$ . В общем виде групповые средние обозначают через  $\bar{x}_i$ . Общую же среднюю для всех вариантов всех групп — как  $\bar{x}$ .

Схема обозначения членов вариационного ряда при однофакторном дисперсионном анализе

| Группы фактора | Отдельные варианты (наблюдения) $x_{ij}$ |          |          |    |          |    |          | Суммы по группам | Средние по группам $\bar{x}_i$ |
|----------------|------------------------------------------|----------|----------|----|----------|----|----------|------------------|--------------------------------|
|                | 1                                        | 2        | 3        | .. | j        | .. | n        |                  |                                |
| 1              | $x_{11}$                                 | $x_{12}$ | $x_{13}$ |    | $x_{1j}$ |    | $x_{1n}$ | $\sum x_1$       | $\bar{x}_1$                    |
| 2              | $x_{21}$                                 | $x_{22}$ | $x_{23}$ |    | $x_{2j}$ |    | $x_{2n}$ | $\sum x_2$       | $\bar{x}_2$                    |
| i              | $x_{i1}$                                 | $x_{i2}$ | $x_{i3}$ |    | $x_{ij}$ |    | $x_{in}$ | $\sum x_i$       | $\bar{x}_i$                    |
| k              | $x_{a1}$                                 | $x_{a2}$ | $x_{a3}$ |    | $x_{aj}$ |    | $x_{an}$ | $\sum x_a$       | $\bar{x}_a$                    |
|                |                                          |          |          |    |          |    |          | $\sum x_{ij}$    | $\bar{x}$                      |

Различают 3 типа варьирования:

а)  $S_0^2$  - общее варьирование вариантов ( $x_{ij}$ ), независимо от того, в какой группе они находятся, вокруг общей средней  $\bar{x}$  ;

б)  $S_M^2$  - варьирование групповых средних  $\bar{x}_i$  , или, иначе, средних каждого уровня данного изучаемого фактора, вокруг общей средней  $\bar{x}$  ;

в)  $S_b^2$  - варьирование вариантов  $x_{ij}$  внутри каждой группы вокруг каждой групповой средней  $\bar{x}_i$  (так называемая остаточная).

Между ними существует соотношение:

$$S_0^2 = S_M^2 + S_b^2$$

Для каждого типа варьирования вычисляются суммы квадратов отклонений по следующим формулам:

Схема дисперсионного анализа (анализа варiances)  
при влиянии одного фактора

| Источник<br>варьирования                                     | Сумма<br>квадратов<br>ss                                      | Число<br>степеней<br>свободы<br>df | Средний квадрат<br>ms                                               |
|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| Общее (все<br>варианты)                                      | $S_0^2 = \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x})^2$                      | N-1                                | $\frac{1}{N-1} \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x})^2$                      |
| Групповые<br>средние<br>(фактор A)                           | $S_M^2 = \sum_i n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$                  | k-1                                | $\frac{1}{k-1} \sum_i n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$                  |
| Варианты<br>внутри<br>групп (слу-<br>чайные от-<br>клонения) | $S_b^2 = \sum_i \left[ \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \right]$ | N-k                                | $\frac{1}{N-k} \sum_i \left[ \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \right]$ |

Где  $\sum x_i$  для каждой группы (уровня фактора A);

$n_i$  - число наблюдений в каждой группе;

N - общее число вариантов.

k - число уровней (градаций) фактора.

При делении сумм квадратов, обозначаемых ss, на число степеней свободы получаются **средние квадраты (варiances)** — ms, непосредственно измеряющие суммарную вариацию.

Оценка дисперсии каждой из групп связана с  $n_i - 1$  степенью свободы, общее число степеней свободы равно  $k \cdot \sum (n_i - 1) = n - k$ , где n — число наблюдений.

Далее проводится проверка гипотезы  $H_0 : \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_k$ , т.е. утверждения, что все групповые средние не зависят от влияния

фактора A по величине соотношения:  $F(k, n-k) = \frac{s_M^2 / (k - 1)}{s_b^2 / (n - k)}$  при

условии, что  $x_{ij}$  - независимые наблюдения над случайной величиной  $\bar{x}$ , распределенной нормально со средним  $\bar{x}$  и дисперсией  $\sigma^2$ .

Если верна  $H_0$ , то межгрупповая дисперсия (в генеральной совокупности) должна быть равна внутригрупповой, т. е.  $H_0 : \sigma_M^2 = \sigma_b^2$ . При этом вычисленное значение  $F$  меньше табличного при уровне значимости  $\alpha$ . Следовательно гипотезу об отсутствии влияния фактора  $A$  не отклоняют.

**Подготовка статистических массивов для дисперсионного анализа.** Для дисперсионного анализа используем данные частичной совокупности, модифицированные при выполнении лабораторной работы по теме 6. Затем, используя схему однофакторного дисперсионного анализа, образуем

Схема однофакторного анализа



A1, A2 - градации диаметров или  
высот

вторую градацию фактора высоты. Для этого следует значения высоты первой градации изменить на величину плюс минус сигма или средней ошибки. Затем проводим расчеты по приведенному примеру. На основе сравнения фактического критерия и табличного (приложение Е) делаем вывод о принятии или отклонении нулевой гипотезы.

| Высота У                                                 | Высота                                                                            | Высота Z                                                 | Высота                                                                            |
|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|                                                          | A1                                                                                |                                                          | A2                                                                                |
| Выписываются значения с номерами: 2, 4, 6, и т. д. до 50 | К значениям высот с номерами 2,4,6,8.. прибавляется или отнимается средняя ошибка | Выписываются значения с номерами: 1, 3, 5, и т. д. до 49 | К значениям высот с номерами 1, 3, 5.. прибавляется или отнимается средняя ошибка |

**Пример** выходных данных в **Excel** после просчета однофакторного дисперсионного анализа.

|                          |             |              |                |                  |                   |                      |
|--------------------------|-------------|--------------|----------------|------------------|-------------------|----------------------|
| ИТОГИ                    |             |              |                |                  |                   |                      |
| <i>Группы</i>            | <i>Счет</i> | <i>Сумма</i> | <i>Среднее</i> | <i>Дисперсия</i> |                   |                      |
| в26 50                   | 22          | 97,99        | 4,454091       | 1,719778         |                   |                      |
| д26 50                   | 22          | 108,248      | 4,920364       | 1,045343         |                   |                      |
|                          |             |              |                |                  |                   |                      |
| Дисперсионный анализ     |             |              |                |                  |                   |                      |
| <i>Источник вариации</i> | <i>SS</i>   | <i>df</i>    | <i>MS</i>      | <i>F</i>         | <i>P-Значение</i> | <i>F критическое</i> |
| Между группами           | 2,391513    | 1            | 2,391513       | 1,729771         | 0,19557565        | 4,072660431          |
| Внутри групп             | 58,06754    | 42           | 1,382561       |                  |                   |                      |
| Итого                    | 60,45906    | 43           |                |                  |                   |                      |

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИСПЕРСИЙ ПО ФОРМУЛАМ в Excel

Вычисление суммы квадратов отклонений

|                                                                          | X <sub>i1</sub> | X <sub>i2</sub> | $(x_{i1} - X)^2$   | $(x_{i2} - X)^2$ | $(x_{i1} - X_1)^2$ | $(x_{i2} - X_2)^2$ |
|--------------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------------|--------------------|------------------|--------------------|--------------------|
|                                                                          |                 |                 | общей              |                  | внутригрупповых    |                    |
|                                                                          | 0,4             | 0,5             | 0,2061             | 0,1384           | 0,1901             | 0,1384             |
|                                                                          | 0,5             | 0,6             | 0,1253             | 0,0740           | 0,1129             | 0,0740             |
|                                                                          | 0,6             | 0,6             | 0,0645             | 0,0740           | 0,0557             | 0,0740             |
|                                                                          | 0,6             | 0,7             | 0,0645             | 0,0296           | 0,0557             | 0,0296             |
|                                                                          | 0,6             | 0,7             | 0,0645             | 0,0296           | 0,0557             | 0,0296             |
|                                                                          | 0,6             | 0,7             | 0,0645             | 0,0296           | 0,0557             | 0,0296             |
|                                                                          | 0,6             | 0,7             | 0,0645             | 0,0296           | 0,0557             | 0,0296             |
|                                                                          | 0,6             | 0,7             | 0,0645             | 0,0296           | 0,0557             | 0,0296             |
|                                                                          | 0,7             | 0,7             | 0,0237             | 0,0296           | 0,0185             | 0,0296             |
|                                                                          | 0,7             | 0,7             | 0,0237             | 0,0296           | 0,0185             | 0,0296             |
|                                                                          | 0,7             | 0,8             | 0,0237             | 0,0052           | 0,0185             | 0,0052             |
|                                                                          | 0,8             | 0,8             | 0,0029             | 0,0052           | 0,0013             | 0,0052             |
|                                                                          | 0,9             | 0,8             | 0,0021             | 0,0052           | 0,0041             | 0,0052             |
|                                                                          | 0,9             | 0,8             | 0,0021             | 0,0052           | 0,0041             | 0,0052             |
|                                                                          | 0,9             | 0,8             | 0,0021             | 0,0052           | 0,0041             | 0,0052             |
|                                                                          | 0,9             | 0,9             | 0,0021             | 0,0008           | 0,0041             | 0,0008             |
|                                                                          | 0,9             | 0,9             | 0,0021             | 0,0008           | 0,0041             | 0,0008             |
|                                                                          | 0,9             | 0,9             | 0,0021             | 0,0008           | 0,0041             | 0,0008             |
|                                                                          | 1,1             | 1               | 0,0605             | 0,0164           | 0,0697             | 0,0164             |
|                                                                          | 1,1             | 1               | 0,0605             | 0,0164           | 0,0697             | 0,0164             |
|                                                                          | 1,1             | 1,1             | 0,0605             | 0,0520           | 0,0697             | 0,0520             |
|                                                                          | 1,1             | 1,3             | 0,0605             | 0,1832           | 0,0697             | 0,1832             |
|                                                                          | 1,2             | 1,3             | 0,1197             | 0,1832           | 0,1325             | 0,1832             |
|                                                                          | 1,2             | 1,3             | 0,1197             | 0,1832           | 0,1325             | 0,1832             |
|                                                                          | 1,3             | 1,5             | 0,1989             | 0,3944           | 0,2153             | 0,3944             |
| Дисперсии                                                                |                 |                 |                    |                  |                    |                    |
| Средние по градациям фактора<br>Средняя общая                            |                 |                 | Общая              |                  | Факториальная      |                    |
|                                                                          | X <sub>1</sub>  | X <sub>2</sub>  |                    |                  |                    |                    |
|                                                                          | 0,836           | 0,872           |                    |                  |                    |                    |
|                                                                          | X               | 0,854           | (S <sub>0</sub> )Σ | 3,0361           | (S <sub>M</sub> )Σ | 3,0280             |
| в том числе обусловленная градацией фактора (от общей средней)           |                 |                 |                    |                  |                    |                    |
| S=(x <sub>1</sub> - X) <sup>2</sup> +(x <sub>2</sub> - X) <sup>2</sup> n |                 |                 |                    |                  |                    | 0,0162             |
| Неучтенная S                                                             |                 |                 |                    |                  |                    | 0,0081             |
| Сводная таблица                                                          |                 |                 |                    |                  |                    |                    |
|                                                                          | Сумма           | Число           |                    | Оценка           | Стандарт           |                    |
|                                                                          | квадрат         | свободы         | Дисперс            |                  |                    |                    |
| Общее                                                                    | 3,0361          | 49              | 0,062457           | 1,010026         | 1,6                |                    |
| внутригрупповое                                                          | 3,0280          | 48              | 0,063083           | 3,894033         | 4,03               |                    |
| По градациям опыта                                                       | 0,0162          | 1               | 0,0162             | 96               | 251,8              |                    |
| Неучтенное(остаточное)                                                   | 0,0081          | 48              | 0,000169           |                  |                    |                    |

## Вопросы для самоконтроля

- 1 В чем состоит сущность метода дисперсионного анализа?
- 2 Как проводится оценка варьирования при дисперсионном анализе?

## Лабораторная работа

**Материалы и оборудование:** данные замеров малой статистической совокупности, калькуляторы, ПЭВМ.

**Цель.** Определение значимости различия высот деревьев методом однофакторного дисперсионного анализа.

## Ход работы

- 1 На основе основных положений темы подготовить к анализу градации замеров высот деревьев.
- 2 На основе основных положений темы провести расчеты соответствующие однофакторному дисперсионному комплексу.
- 3 На основе основных положений темы и при помощи «Анализ данных» провести расчеты по дисперсионному анализу, сохранить в Excel и распечатать.

## ТЕМА 9 СТАТИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ АНАЛИЗА ДАННЫХ НА ПЭВМ

- 1 Расчет основных статистических показателей для диапазона данных в приложении Excel.

### *Основные понятия по теме*

**Расчет основных статистических показателей для диапазона данных в приложении Excel.** Ввести данные диаметров и соответствующих им высот из образованной частичной совокупности (см лаб. темы 1) в ячейки Excel. При помощи пакета «Анализ данных» в Excel (см табл.), «Описательная статистика» провести оценку среднего, его дисперсии, величины корреляции между частями совокупности.

## Функции позволяющие выполнить расчет основных статистических показателей для диапазона данных

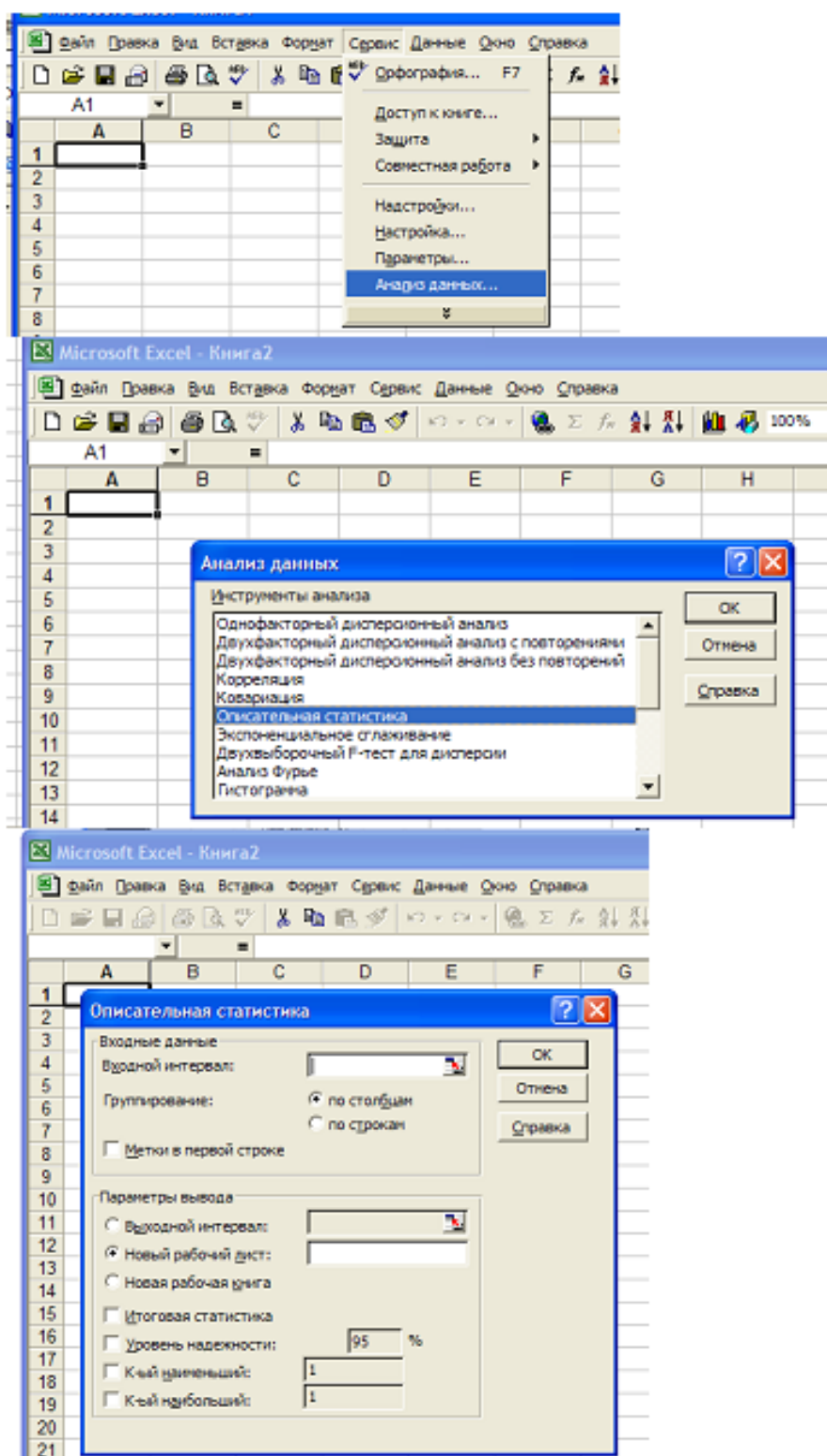
|             |              |               |
|-------------|--------------|---------------|
| БЕТАОБР     | ФРАСП        | ПУАССОН       |
| БЕТАРАСП    | ФРАСПОБР     | РАНГ          |
| БИНОМРАСП   | ZТЕСТ        | РОСТ          |
| ВЕЙБУЛЛ     | ХИ2ОБР       | СКОС          |
| ВЕРОЯТНОСТЬ | ХИ2РАСП      | СРГАРМ        |
| ГАММАНЛОГ   | ХИ2ТЕСТ      | СРГЕОМ        |
| ГАММАОБР    | ЧАСТОТА      | СРЗНАЧ        |
| ГАММАРАСП   | ЭКСПРАСП     | СРЗНАЧА       |
| ГИПЕРГЕОМЕТ | ЭКСЦЕСС      | СРОТКЛ        |
| ДИСП        | ТЕНДЕНЦИЯ    | СТАНДОТКЛОН   |
| ДИСПА       | ТТЕСТ        | СТАНДОТКЛОНА  |
| ДИСПР       | УРЕЗСРЕДНЕЕ  | СТАНДОТКЛОНП  |
| ДИСПРА      | ФИШЕР        | СТАНДОТКЛОНПА |
| ДОВЕРИТ     | ФИШЕРОБР     | СТОПУХ        |
| КВАДРОТКЛ   | ФТЕСТ        | СТЮДРАСП      |
| КВАРТИЛЬ    | ПЕРСЕНТИЛЬ   | СТЮДРАСПОБР   |
| КВПИРСОН    | ПИРСОН       | СЧЁТ          |
| КОВАР       | ПРЕДСКАЗ     | СЧЁТЗ         |
| КОРРЕЛ      | ПРОЦЕНТРАНГ  | ОТРЕЗОК       |
| КРИТБИНОМ   | НОМРАСП      | ПЕРЕСТ        |
| ЛГРФПРИБЛ   | НОРМСТОБР    | НАИМЕНЬШИЙ    |
| ЛИНЕЙН      | НОРМСТРАСП   | НАКЛОН        |
| ЛОГНОРМОБР  | ОТРБИНОМРАСП | НОРМАЛИЗАЦИЯ  |
| ЛОГНОМРАСП  | МИНА         | НОРМОБР       |
| МАКС        | МОДА         | МЕДИАНА       |
| МАКСА       | НАИБОЛЬШИЙ   | МИН           |

Для расширенного статистического анализа данных необходимо использовать пакет программ STATISTICA, которая представляет интегрированную систему анализа и обработки данных под Windows. пакета фирма Stat Soft. Inc.

Для анализа и обработки данных в пакете используются статистические модули, в которых объединены группы логически связанных статистических процедур.

Перечень основных модулей пакета и их вид на экране монитора представлен в приложении Ж.

## Окна приложения Excel для настройки анализа данных



| Вариант 1              |          |
|------------------------|----------|
| Среднее                | 4,920364 |
| Стандартная ошибка     | 0,217981 |
| Медиана                | 4,95     |
| Мода                   | 3,66     |
| Стандартное отклонение | 1,02242  |
| Дисперсия выборки      | 1,045343 |
| Экспесс                | -0,22556 |
| Асимметричность        | 0,438238 |
| Интервал               | 3,846    |
| Минимум                | 3,48     |
| Максимум               | 7,326    |
| Сумма                  | 108,248  |
| Счет                   | 22       |

### Функции для выполнения статистического анализа

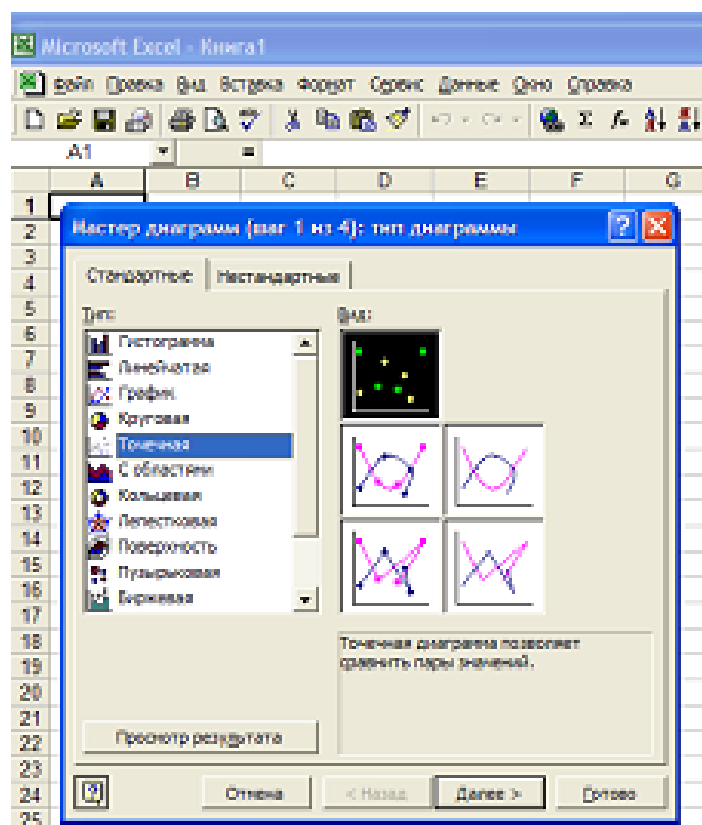
|             |              |               |
|-------------|--------------|---------------|
| БЕТАОБР     | ФРАСП        | ПУАССОН       |
| БЕТАРАСП    | ФРАСПОБР     | РАНГ          |
| БИНОМРАСП   | ZТЕСТ        | РОСТ          |
| ВЕЙБУЛЛ     | ХИ2ОБР       | СКОС          |
| ВЕРОЯТНОСТЬ | ХИ2РАСП      | СРГАРМ        |
| ГАММАНЛОГ   | ХИ2ТЕСТ      | СРГЕОМ        |
| ГАММАОБР    | ЧАСТОТА      | СРЗНАЧ        |
| ГАММАРАСП   | ЭКСПРАСП     | СРЗНАЧА       |
| ГИПЕРГЕОМЕТ | ЭКСПЕСС      | СРОТКЛ        |
| ДИСП        | ТЕНДЕНЦИЯ    | СТАНДОТКЛОН   |
| ДИСПА       | ТТЕСТ        | СТАНДОТКЛОНА  |
| ДИСПР       | УРЕЗСРЕДНЕЕ  | СТАНДОТКЛОНП  |
| ДИСПРА      | ФИШЕР        | СТАНДОТКЛОНПА |
| ДОВЕРИТ     | ФИШЕРОБР     | СТОШУХ        |
| КВАДРОТКЛ   | ФТЕСТ        | СТЮДРАСП      |
| КВАРТИЛЬ    | ПЕРСЕНТИЛЬ   | СТЮДРАСПОБР   |
| КВПИРСОН    | ПИРСОН       | СЧЁТ          |
| КОВАР       | ПРЕДСКАЗ     | СЧЁТЗ         |
| КОРРЕЛ      | ПРОЦЕНТРАНГ  | ОТРЕЗОК       |
| КРИТБИНОМ   | НОМРАСП      | ПЕРЕСТ        |
| ЛГРФПРИБЛ   | НОРМСТОБР    | НАИМЕНЬШИЙ    |
| ЛИНЕЙН      | НОРМСТРАСП   | НАКЛОН        |
| ЛОГНОРМОБР  | ОТРБИНОМРАСП | НОРМАЛИЗАЦИЯ  |
| ЛОГНОМРАСП  | МИНА         | НОРМОБР       |
| МАКС        | МОДА         | МЕДИАНА       |
| МАКСА       | НАИБОЛЬШИЙ   | МИН           |

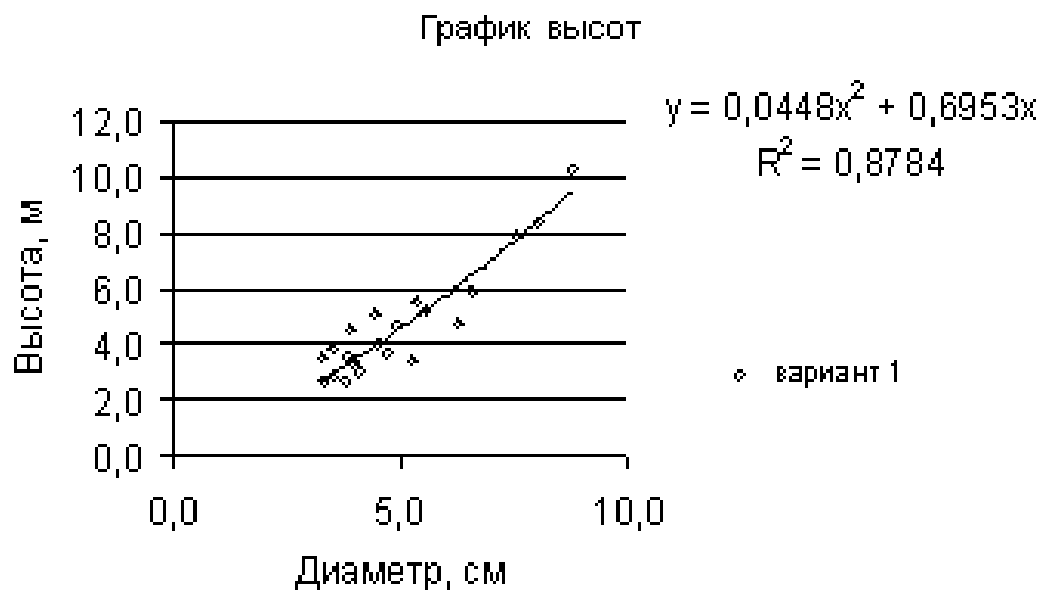
**Пример** выходных данных в **Excel** после просчета коэффициента корреляции

|          | <i>Д</i> | <i>Н</i> |
|----------|----------|----------|
| <i>Д</i> | 1        |          |
| <i>Н</i> | 0,504430 | 1        |

При помощи «**Мастера диаграмм**» в **Excel**. выбрать вид диаграммы «**точечная**», ввести данные полученные в лабораторной работе темы 7 построить графики, отобразить на нем вид функции и коэффициент детерминации.

**Пример** вывода окна приложения **Excel** для построения графиков и выходных данных после просчета уравнения .





### Вопросы для самоконтроля

- 1 Какие существуют встроенные статистические функции в приложении Excel?
- 2 Какова последовательность действий при обработке количественной и качественной информации на ПЭВМ?

### Лабораторная работа

**Материалы и оборудование:** данные замеров малой статистической совокупности, калькуляторы, ПЭВМ.

**Цель.** Освоение методов обработки экспериментальных данных при помощи статистических программ и модулей на ПЭВМ.

### Ход работы

- 1 На основе основных положений темы **получить** статистические показатели выборочной совокупности в приложении **Excel**.
- 2 На основе основных положений темы **получить** коэффициенты корреляции в приложении **Excel**.
- 3 На основе основных положений темы получить графики функций прямой, параболы и других уравнений в приложении **Excel**

## Литература

- 1 Андронов, А. М. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / А. М. Андронов, Е. А. Копытов, Л. Я. Гринглаз. – СПб.: Питер, 2004. – 461 с.
- 2 Лакин, Г.Ф. Биометрия / Г.Ф., Лакин. — М., 1990. — 352 с.
- 3 Зайцев, Г. Н. Математическая статистика в экспериментальной ботанике / Г. Н., Зайцев. – М.: Наука, 1984.- 424 с.

# Приложение А

## Таблица случайных чисел

|    | 00 04 | 05 09 | 10 14 | 15 19 | 20 24 | 25 29 | 30 34 | 35 39 | 40 44 | 45 49 |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0  | 54463 | 22662 | 65905 | 70639 | 79365 | 67382 | 29085 | 69831 | 47058 | 08186 |
| 1  | 15389 | 85205 | 18850 | 39226 | 42249 | 90669 | 96325 | 23248 | 60933 | 26927 |
| 2  | 85941 | 40756 | 82414 | 20150 | 13858 | 78030 | 16269 | 65978 | 01385 | 15345 |
| 3  | 61149 | 69440 | 11286 | 88218 | 58925 | 03638 | 52862 | 62733 | 33451 | 77455 |
| 4  | 05219 | 81619 | 10651 | 67079 | 92511 | 59888 | 84502 | 72095 | 83463 | 75577 |
| 5  | 41417 | 98326 | 87719 | 92294 | 46614 | 50948 | 64886 | 20002 | 97365 | 30976 |
| 6  | 28357 | 94070 | 20652 | 35774 | 16249 | 75019 | 21145 | 05217 | 47286 | 76305 |
| 7  | 17783 | 00015 | 10806 | 83091 | 91530 | 36466 | 39981 | 62481 | 49177 | 75779 |
| 8  | 40950 | 84820 | 29881 | 85966 | 62800 | 70326 | 84740 | 62660 | 77379 | 90279 |
| 9  | 82995 | 64157 | 66164 | 41180 | 10089 | 41757 | 78258 | 96488 | 88629 | 37231 |
| 10 | 96754 | 17676 | 55659 | 44105 | 47361 | 34833 | 86679 | 23930 | 53249 | 27083 |
| 11 | 34357 | 88040 | 53364 | 71726 | 45690 | 66334 | 60332 | 22554 | 90600 | 71113 |
| 12 | 06318 | 37403 | 49927 | 57715 | 50423 | 67372 | 63116 | 48888 | 21505 | 80182 |
| 13 | 62111 | 52820 | 07243 | 79931 | 89292 | 84767 | 85693 | 73947 | 22278 | 11551 |
| 14 | 47534 | 09243 | 67879 | 00544 | 23410 | 12740 | 02540 | 54440 | 32949 | 13491 |
| 15 | 98614 | 75993 | 84460 | 62846 | 59844 | 14922 | 48730 | 72443 | 48167 | 34770 |
| 16 | 24856 | 03648 | 44898 | 09351 | 98795 | 18644 | 39765 | 71058 | 90368 | 44104 |
| 17 | 96887 | 12479 | 80621 | 66223 | 86085 | 78285 | 02432 | 53342 | 42846 | 94771 |
| 18 | 90801 | 21472 | 42815 | 77408 | 37390 | 76766 | 52615 | 32141 | 30268 | 18106 |
| 19 | 55165 | 77312 | 83666 | 36028 | 28420 | 70219 | 81369 | 41943 | 47366 | 41067 |
| 20 | 75884 | 12952 | 84318 | 95108 | 72305 | 64620 | 91318 | 89872 | 45375 | 85436 |
| 21 | 16777 | 37116 | 58550 | 42958 | 21460 | 43910 | 01175 | 87894 | 81378 | 10620 |
| 22 | 46230 | 43877 | 80207 | 88877 | 89380 | 32992 | 91380 | 03164 | 98656 | 59337 |
| 23 | 42902 | 66892 | 46134 | 01432 | 94710 | 23474 | 20423 | 60137 | 60609 | 13119 |
| 24 | 81007 | 00333 | 39693 | 28039 | 10154 | 95425 | 39220 | 19774 | 31782 | 49037 |
| 25 | 68089 | 01121 | 51111 | 72373 | 06902 | 74373 | 96199 | 97017 | 41273 | 21546 |
| 26 | 20411 | 67081 | 89950 | 16944 | 93054 | 87687 | 96693 | 87236 | 77054 | 33848 |
| 27 | 58212 | 13160 | 06468 | 15718 | 82627 | 76999 | 05999 | 58680 | 96739 | 63700 |
| 28 | 70577 | 42866 | 24969 | 61210 | 76046 | 67699 | 42054 | 12696 | 93758 | 03283 |
| 29 | 94522 | 74358 | 71659 | 62038 | 79643 | 79169 | 44741 | 05437 | 39038 | 13162 |
| 30 | 42626 | 86819 | 85651 | 88678 | 17401 | 03252 | 99547 | 32404 | 17918 | 62880 |
| 31 | 16051 | 33763 | 57194 | 16752 | 54450 | 19031 | 58580 | 47629 | 54132 | 60631 |
| 32 | 08244 | 27647 | 33851 | 44705 | 94211 | 46716 | 11738 | 55784 | 95374 | 72655 |
| 33 | 59497 | 04392 | 09419 | 89964 | 51211 | 04894 | 72882 | 17805 | 21896 | 83864 |
| 34 | 97155 | 13428 | 40293 | 09985 | 58434 | 01412 | 69124 | 82171 | 59058 | 82859 |
| 35 | 98409 | 66162 | 95763 | 47420 | 20792 | 61527 | 20441 | 39435 | 11859 | 41567 |
| 36 | 45476 | 84882 | 65109 | 96597 | 25930 | 66790 | 65706 | 61203 | 53634 | 22557 |
| 37 | 89300 | 69700 | 50741 | 30329 | 11658 | 23166 | 05400 | 66669 | 48708 | 03887 |
| 38 | 50051 | 95137 | 91631 | 66315 | 91428 | 12275 | 24816 | 68091 | 71710 | 33258 |
| 39 | 31753 | 85178 | 31310 | 89642 | 98364 | 02306 | 24617 | 09609 | 83942 | 22716 |
| 40 | 79152 | 53829 | 77250 | 20190 | 56535 | 18760 | 69942 | 77448 | 33278 | 48805 |
| 41 | 44560 | 38750 | 83635 | 56540 | 64900 | 42912 | 13953 | 79149 | 18710 | 68618 |
| 42 | 68328 | 83378 | 63369 | 71381 | 39564 | 05615 | 42451 | 64559 | 97501 | 65747 |
| 43 | 46939 | 38689 | 58625 | 08342 | 30459 | 85863 | 20781 | 09284 | 26333 | 91777 |
| 44 | 83544 | 86141 | 15707 | 86256 | 23068 | 13782 | 08467 | 89469 | 93842 | 55349 |
| 45 | 91621 | 00881 | 04900 | 54224 | 46177 | 55309 | 17852 | 27491 | 89415 | 23466 |
| 46 | 91896 | 67126 | 04151 | 03795 | 59077 | 11848 | 12630 | 98375 | 52068 | 60142 |
| 47 | 55751 | 62515 | 21108 | 80830 | 02263 | 29303 | 37204 | 96926 | 30506 | 09808 |
| 48 | 85156 | 87689 | 95493 | 88842 | 00664 | 55017 | 55539 | 17771 | 69448 | 87530 |
| 49 | 07521 | 56898 | 12236 | 60277 | 39102 | 62315 | 12239 | 07105 | 11844 | 01117 |

# Приложение Б Схема вычисления смешанных моментов

| Высо-<br>та, м       | Диаметр, см |      |      |      |      |         |      | Итого<br>$n_y$ | $y_k$ | $n_y y_k$ | $n_y y_k^2$ | $n_{xy} x_k y_k$                                                 |              | $n_{xy} x_k^2 y_k$ |     |
|----------------------|-------------|------|------|------|------|---------|------|----------------|-------|-----------|-------------|------------------------------------------------------------------|--------------|--------------------|-----|
|                      | 16          | 20   | 24   | 28   | 32   | $M_x^1$ |      |                |       |           |             |                                                                  |              |                    |     |
| 30                   |             |      |      |      |      | 2       | 6    | 2              | 10    | +3        | 30          | 90                                                               | 0+ 6+4       | 10                 | 30  |
| 29                   |             |      |      | 3    |      | 6       | 5    | 4              | 18    | +2        | 36          | 72                                                               | -3+ 0+5+8    | 10                 | 20  |
| 28                   |             | 1    |      | 10   |      | 7       | 5    | 2              | 25    | +1        | 25          | 25                                                               | -3-10+0+5+4  | 4                  | 4   |
| $M_y^1=27$           |             | 1    | 2    | 5    |      | 3       | 2    | 1              | 14    | 0         | 0           | 0                                                                | -3-4-5+0+2+2 | -8                 | 0   |
| 26                   |             |      | 4    | 7    |      | 2       |      |                | 13    | -1        | -13         | 13                                                               | -8-7+0       | -15                | 15  |
| 25                   |             |      | 1    | 1    |      |         |      |                | 2     | -2        | -4          | 8                                                                | -2-1         | -3                 | 6   |
| 24                   | 1           | 2    |      | 1    |      |         |      |                | 4     | -3        | -12         | 36                                                               | -4-6-1       | -11                | 33  |
| 23                   | 1           | 1    | 1    |      |      |         |      |                | 3     | -4        | -12         | 48                                                               | -4-3-2       | -9                 | 36  |
| 22                   | 1           |      |      | 1    |      |         |      |                | 2     | -5        | -10         | 50                                                               | -4-1         | -5                 | 25  |
| 21                   |             | 2    |      |      |      |         |      |                | 2     | -6        | -12         | 72                                                               | -6           | -6                 | 36  |
| 20                   | 1           |      |      |      |      |         |      |                | 1     | -7        | -7          | 49                                                               | -4           | 4                  | 28  |
| Итого $n_x$          | 4           | 7    | 8    | 28   | 20   | 18      | 9    | 94             |       | 21        | 463         |                                                                  |              |                    | 225 |
| $x_k$                | -4          | -3   | -2   | -1   | 0    | +1      | +2   |                |       |           |             | Моменты                                                          |              |                    |     |
| $n_x x_k$            | -16         | -21  | -16  | -28  | 0    | +18     | +18  | -45            |       |           |             | $m_{1x}=(\sum n_x x_k) / N=45 / 94 = -0,479;$                    |              |                    |     |
| $n_x x_k^2$          | 64          | 63   | 32   | 28   | 0    | 18      | 36   | 241            |       |           |             | $m_{2x}=\sum n_x x_k^2 / N=21 / 94 = 0,223;$                     |              |                    |     |
|                      | -3          | +1   | 0    | +6   | +6   | +18     | +6   |                |       |           |             | $m_{3x}=\sum n_x x_k^3 / N=241 / 94 = 2,564;$                    |              |                    |     |
|                      | -4          | 0    | -4   | +10  | +12  | +10     | +8   |                |       |           |             | $m_{4x}=\sum n_x x_k^4 / N=463 / 94 = 4,926;$                    |              |                    |     |
|                      | -5          | -6   | -2   | 0    | +7   | +5      | +2   |                |       |           |             | $\sigma_x=\sqrt{m_{2x}-m_{1x}^2}=\sqrt{2,564-(-0,479)^2}=1,528;$ |              |                    |     |
| $n_{xy} x_k y_k$     | -7          | -4   | -4   | -7   | 0    | 0       | 0    |                |       |           |             | $\sigma_y=\sqrt{m_{2y}-m_{1y}^2}=\sqrt{4,926-0,223^2}=2,202;$    |              |                    |     |
|                      |             | -12  |      | -2   | -2   |         |      |                |       |           |             | $m_{1y}=\sum n_y y_k / N=225 / 94 = 2,394;$                      |              |                    |     |
|                      |             |      |      | -3   |      |         |      |                |       |           |             | $m_{2y}=\sum n_y y_k^2 / N=225 / 94 = 2,394;$                    |              |                    |     |
|                      |             |      |      | -5   |      |         |      |                |       |           |             | $m_{3y}=(1/N)\sum [(n_y y_k)^2/n_x]=1/94 \cdot 281,0 = 2,989;$   |              |                    |     |
| $n_{yx} y_k x_k$     | -19         | -21  | -10  | -1   | 23   | 33      | 16   |                |       |           |             |                                                                  |              |                    |     |
| $n_{yx} y_k^2$       | 76          | 63   | 20   | 1    | 0    | 33      | 32   | 225            |       |           |             |                                                                  |              |                    |     |
| $(n_{yx} y_k)^2/n_x$ | 90,2        | 63,0 | 12,5 | 0    | 26,4 | 60,5    | 28,4 | 281,0          |       |           |             |                                                                  |              |                    |     |
| $\bar{y}_i$          | 22,2        | 24,0 | 25,8 | 27,0 | 28,2 | 28,8    | 28,8 |                |       |           |             |                                                                  |              |                    |     |

# Приложение В

Значение функции  $\Psi(t) = 0,39894 / e^{0.5 \cdot t^2}$   
(перед числами в таблице необходимо ставить 0,)

| t   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,0 | 39894 | 39892 | 39886 | 39876 | 39862 | 39844 | 39822 | 39797 | 39767 | 39733 |
| 0,1 | 39695 | 39654 | 39608 | 39559 | 39505 | 39448 | 39387 | 39322 | 39253 | 39181 |
| 0,2 | 39104 | 39024 | 38940 | 38853 | 38762 | 38667 | 38568 | 38466 | 38361 | 38251 |
| 0,3 | 38139 | 38023 | 37903 | 37780 | 37654 | 37524 | 37391 | 37255 | 37115 | 36973 |
| 0,4 | 36827 | 36678 | 36526 | 36371 | 36213 | 36053 | 35889 | 35723 | 35553 | 35381 |
| 0,5 | 35207 | 35029 | 34849 | 34667 | 34482 | 34294 | 34105 | 33912 | 33718 | 33521 |
| 0,6 | 33322 | 33121 | 32918 | 32713 | 32506 | 32297 | 32086 | 31874 | 31659 | 31443 |
| 0,7 | 31225 | 31006 | 30785 | 30563 | 30339 | 30114 | 29887 | 29659 | 29430 | 29200 |
| 0,8 | 28969 | 28737 | 28504 | 28269 | 28034 | 27798 | 27562 | 27324 | 27086 | 26848 |
| 0,9 | 26609 | 26369 | 26129 | 25888 | 25647 | 25406 | 25164 | 24923 | 24681 | 24439 |
| 1,0 | 24197 | 23955 | 23713 | 23471 | 23230 | 22988 | 22747 | 22506 | 22265 | 22025 |
| 1,1 | 21785 | 21546 | 21307 | 21069 | 20831 | 20594 | 20357 | 20121 | 19886 | 19652 |
| 1,2 | 19419 | 19186 | 18954 | 18724 | 18494 | 18265 | 18037 | 17810 | 17585 | 17360 |
| 1,3 | 17137 | 16915 | 16694 | 16474 | 16256 | 16038 | 15822 | 15608 | 15395 | 15183 |
| 1,4 | 14973 | 14764 | 14556 | 14350 | 14146 | 13943 | 13742 | 13542 | 13344 | 13147 |
| 1,5 | 12952 | 12758 | 12566 | 12376 | 12188 | 12001 | 11816 | 11632 | 11450 | 11270 |
| 1,6 | 11092 | 10915 | 10741 | 10567 | 10396 | 10226 | 10059 | 09893 | 09728 | 09566 |
| 1,7 | 09405 | 09246 | 09089 | 08938 | 08780 | 08628 | 08478 | 08329 | 08183 | 08038 |
| 1,8 | 07895 | 07754 | 07614 | 07477 | 07341 | 07206 | 07074 | 06943 | 06814 | 06687 |
| 1,9 | 06562 | 06438 | 06316 | 06195 | 06077 | 05959 | 05844 | 05730 | 05618 | 05508 |
| 2,0 | 05399 | 05292 | 05186 | 05082 | 04980 | 04879 | 04780 | 04682 | 04586 | 04491 |
| 2,1 | 04398 | 04307 | 04217 | 04128 | 04041 | 03955 | 03871 | 03788 | 03706 | 03626 |
| 2,2 | 03547 | 03470 | 03394 | 03319 | 03246 | 03174 | 03103 | 03034 | 02965 | 02898 |
| 2,3 | 02833 | 02768 | 02705 | 02643 | 02582 | 02522 | 02463 | 02406 | 02349 | 02294 |
| 2,4 | 02239 | 02186 | 02134 | 02083 | 02033 | 01984 | 01936 | 01888 | 01842 | 01797 |
| 2,5 | 01753 | 01709 | 01667 | 01625 | 01585 | 01545 | 01506 | 01468 | 01431 | 01394 |
| 2,6 | 01358 | 01323 | 01289 | 01256 | 01223 | 01191 | 01160 | 01130 | 01100 | 01071 |
| 2,7 | 01042 | 01014 | 00987 | 00961 | 00935 | 00909 | 00885 | 00861 | 00837 | 00814 |
| 2,8 | 00792 | 00770 | 00748 | 00727 | 00707 | 00687 | 00668 | 00649 | 00631 | 00613 |
| 2,9 | 00595 | 00578 | 00562 | 00545 | 00530 | 00514 | 00499 | 00485 | 00470 | 00457 |
| 3,0 | 00443 | 00430 | 00417 | 00405 | 00393 | 00381 | 00370 | 00358 | 00348 | 00337 |
| 3,1 | 00327 | 00317 | 00307 | 00298 | 00288 | 00279 | 00271 | 00262 | 00254 | 00246 |
| 3,2 | 00238 | 00231 | 00224 | 00216 | 00210 | 00203 | 00196 | 00190 | 00184 | 00178 |
| 3,3 | 00172 | 00167 | 00161 | 00156 | 00151 | 00146 | 00141 | 00136 | 00132 | 00127 |
| 3,4 | 00123 | 00119 | 00115 | 00111 | 00107 | 00104 | 00100 | 00097 | 00094 | 00090 |
| 3,5 | 00087 | 00084 | 00081 | 00079 | 00076 | 00073 | 00071 | 00068 | 00066 | 00063 |
| 3,6 | 00061 | 00059 | 00057 | 00055 | 00053 | 00051 | 00049 | 00047 | 00046 | 00044 |
| 3,7 | 00042 | 00041 | 00039 | 00038 | 00037 | 00035 | 00034 | 00033 | 00031 | 00030 |
| 3,8 | 00029 | 00028 | 00027 | 00026 | 00025 | 00024 | 00023 | 00022 | 00021 | 00021 |
| 3,9 | 00020 | 00019 | 00018 | 00018 | 00017 | 00016 | 00016 | 00015 | 00014 | 00014 |
| 4,0 | 00013 | 00009 | 00006 | 00004 | 00002 | 00002 | 00001 | 00001 | 00000 | 00000 |

# Приложение Г

Значения функции  $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-(x_i - \bar{X})^2 / 2}$

| x"  | 0       | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,0 | 1,00000 | 99995 | 99980 | 99955 | 99920 | 99875 | 99820 | 99755 | 99680 | 99596 |
| 0,1 | 99501   | 99397 | 99283 | 99159 | 99025 | 98881 | 98728 | 98565 | 98393 | 98211 |
| 0,2 | 98020   | 97819 | 97609 | 97390 | 97161 | 96923 | 96676 | 96421 | 96156 | 95882 |
| 0,3 | 95600   | 95309 | 95009 | 94701 | 94384 | 94059 | 93725 | 93384 | 93034 | 92677 |
| 0,4 | 92312   | 91939 | 91558 | 91169 | 90774 | 90371 | 89960 | 89543 | 89119 | 88688 |
| 0,5 | 88250   | 87805 | 87354 | 86897 | 86433 | 85963 | 85487 | 85006 | 84518 | 84025 |
| 0,6 | 83527   | 83023 | 82514 | 82000 | 81481 | 80957 | 80429 | 79896 | 79358 | 78816 |
| 0,7 | 78270   | 77721 | 77167 | 76609 | 76048 | 75484 | 74916 | 74345 | 73771 | 73194 |
| 0,8 | 72615   | 72033 | 71448 | 70861 | 70272 | 69680 | 69087 | 68492 | 67896 | 67297 |
| 0,9 | 66698   | 66097 | 65495 | 64892 | 64288 | 63683 | 63078 | 62472 | 61866 | 61260 |
| 1,0 | 60653   | 60047 | 59440 | 58834 | 58228 | 57623 | 57018 | 56414 | 55811 | 55209 |
| 1,1 | 54607   | 54007 | 53408 | 52811 | 52215 | 51621 | 51028 | 50437 | 49848 | 49260 |
| 1,2 | 48675   | 48092 | 47511 | 46933 | 46357 | 45783 | 45212 | 44644 | 44078 | 43516 |
| 1,3 | 42956   | 42399 | 41845 | 41294 | 40748 | 40202 | 39661 | 39123 | 38589 | 38058 |
| 1,4 | 37531   | 37007 | 36488 | 35971 | 35459 | 34950 | 34445 | 33944 | 33447 | 32954 |
| 1,5 | 32465   | 31980 | 31499 | 31023 | 30550 | 30082 | 29618 | 29158 | 28702 | 28251 |
| 1,6 | 27804   | 27361 | 26923 | 26489 | 26059 | 25634 | 25213 | 24797 | 24385 | 23978 |
| 1,7 | 23575   | 23176 | 22782 | 22392 | 22007 | 21627 | 21250 | 20879 | 20511 | 20148 |
| 1,8 | 19790   | 19436 | 19086 | 18741 | 18400 | 18064 | 17732 | 17404 | 17081 | 16762 |
| 1,9 | 16447   | 16137 | 15831 | 15529 | 15232 | 14938 | 14649 | 14364 | 14083 | 13806 |
| 2,0 | 13534   | 13265 | 13000 | 12740 | 12483 | 12230 | 11982 | 11737 | 11496 | 11258 |
| 2,1 | 11025   | 10795 | 10569 | 10347 | 10129 | 09914 | 09702 | 09495 | 09290 | 09090 |
| 2,2 | 08892   | 08698 | 08508 | 08320 | 08137 | 07956 | 07779 | 07604 | 07433 | 07265 |
| 2,3 | 07101   | 06939 | 06780 | 06624 | 06471 | 06321 | 06174 | 06030 | 05888 | 05750 |
| 2,4 | 05613   | 05480 | 05349 | 05221 | 05096 | 04972 | 04852 | 04734 | 04618 | 04505 |

| x"  | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2,5 | 04394 | 04285 | 04179 | 04079 | 03972 | 03873 | 03775 | 03679 | 03586 | 03494 |
| 2,6 | 03405 | 03317 | 03232 | 03148 | 03066 | 02986 | 02908 | 02831 | 02757 | 02683 |
| 2,7 | 02612 | 02542 | 02474 | 02408 | 02343 | 02279 | 02217 | 02157 | 02098 | 02040 |
| 2,8 | 01984 | 01929 | 01876 | 01823 | 01772 | 01723 | 01674 | 01627 | 01581 | 01536 |
| 2,9 | 01492 | 01449 | 01408 | 01367 | 01328 | 01289 | 01252 | 01215 | 01179 | 01145 |
|     |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 3,0 | 01111 | 01078 | 01046 | 01015 | 00985 | 00955 | 00926 | 00898 | 00871 | 00845 |
| 3,1 | 00819 | 00794 | 00769 | 00746 | 00723 | 00700 | 00679 | 00658 | 00637 | 00617 |
| 3,2 | 00598 | 00579 | 00560 | 00543 | 00525 | 00509 | 00492 | 00477 | 00461 | 00446 |
| 3,3 | 00432 | 00418 | 00404 | 00391 | 00378 | 00366 | 00354 | 00342 | 00331 | 00320 |
| 3,4 | 00309 | 00299 | 00289 | 00279 | 00269 | 00260 | 00251 | 00243 | 00235 | 00227 |
|     |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 3,5 | 00219 | 00211 | 00204 | 00197 | 00190 | 00183 | 00177 | 00171 | 00165 | 00159 |
| 3,6 | 00153 | 00148 | 00143 | 00138 | 00133 | 00128 | 00123 | 00119 | 00115 | 00110 |
| 3,7 | 00106 | 00103 | 00099 | 00095 | 00092 | 00088 | 00085 | 00082 | 00079 | 00076 |
| 3,8 | 00073 | 00070 | 00068 | 00065 | 00063 | 00060 | 00058 | 00056 | 00054 | 00052 |
| 3,9 | 00050 | 00048 | 00046 | 00044 | 00043 | 00041 | 00039 | 00038 | 00036 | 00035 |
|     |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 4,0 | 00034 | 00022 | 00015 | 00010 | 00006 | 00004 | 00003 | 00002 | 00001 | 00001 |

Значения нормальной функции распределения и ее производных

| $x$  | $f(x)$ | $f'(x)$  | $f''(x)$ | $f'''(x)$ | $f^{IV}(x)$ | $x$      | $f(x)$   | $f'(x)$ | $f''(x)$ | $f'''(x)$ | $f^{IV}(x)$ | $x$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ | $f'''(x)$ | $f^{IV}(x)$ |
|------|--------|----------|----------|-----------|-------------|----------|----------|---------|----------|-----------|-------------|-----|--------|---------|----------|-----------|-------------|
| 0,00 | 39894  | +0,00000 | +1,19883 | 34        | 37654       | 36927    | 87348    | 68      | 31659    | 54630     | 13912       | 02  | 23713  | 47398   | $f'(x)$  | $f''(x)$  | $f^{IV}(x)$ |
| 01   | 39892  | 01197    | 19653    | 35        | 37524       | 37791    | 85555    | 69      | 31443    | 54758     | 11636       | 03  | 23471  | 46879   | 52573    |           |             |
| 02   | 39886  | 02393    | 19563    | 36        | 37391       | 38638    | 83726    | 70      | 31225    | 54863     | 09371       | 04  | 23230  | 46346   | 53887    |           |             |
| 03   | 39876  | 03588    | 19414    | 37        | 37255       | 39466    | 81862    | 71      | 31006    | 54945     | 07116       | 05  | 22988  | 45801   | 55160    |           |             |
| 04   | 39862  | 04781    | 19204    | 38        | 37115       | 40275    | 79963    | 72      | 30785    | 55005     | 04874       | 06  | 22747  | 45243   | 56393    |           |             |
| 05   | 39844  | 05972    | 18936    | 39        | 36973       | 41065    | 78032    | 73      | 30563    | 55043     | 02646       | 07  | 22506  | 44673   | 57584    |           |             |
| 06   | 39822  | 07159    | 18608    | 40        | 36827       | 41835    | 76070    | 74      | 30339    | 55068     | +0,00433    | 08  | 22265  | 44092   | 58734    |           |             |
| 07   | 39797  | 08344    | 18221    | 41        | 36678       | 42586    | 74077    | 75      | 30114    | 55062     | -0,01764    | 09  | 22025  | 43499   | 59843    |           |             |
| 08   | 39767  | 09524    | 17775    | 42        | 36526       | 43317    | 72066    | 76      | 29887    | 55023     | 03944       | 10  | 21785  | 42895   | 60909    |           |             |
| 09   | 39733  | 10699    | 17271    | 43        | 36371       | 44027    | 70007    | 77      | 29659    | 54973     | 06106       | 11  | 21546  | 42281   | 61934    |           |             |
| 10   | 39695  | 11869    | 16708    | 44        | 36213       | 44717    | 67932    | 78      | 29430    | 54901     | 08248       | 12  | 21307  | 41657   | 62917    |           |             |
| 11   | 39654  | 13033    | 16088    | 45        | 36053       | 45386    | 65832    | 79      | 29200    | 54808     | 10369       | 13  | 21069  | 41023   | 63857    |           |             |
| 12   | 39608  | 14190    | 15410    | 46        | 35889       | 46034    | 63709    | 80      | 28969    | 54694     | 12468       | 14  | 20831  | 40380   | 64755    |           |             |
| 13   | 39559  | 15341    | 14676    | 47        | 35723       | 46660    | 61564    | 81      | 28737    | 54559     | 14545       | 15  | 20594  | 39728   | 65611    |           |             |
| 14   | 39505  | 16484    | 13885    | 48        | 35553       | 47265    | 59398    | 82      | 28504    | 54403     | 16597       | 16  | 20357  | 39067   | 66425    |           |             |
| 15   | 39448  | 17618    | 13038    | 49        | 35381       | 47848    | 57213    | 83      | 28269    | 54227     | 18624       | 17  | 20121  | 38399   | 67196    |           |             |
| 16   | 39387  | 18744    | 12137    | 0,50      | 0,35207     | +0,48409 | +0,55010 | 84      | 28034    | 54031     | 20626       | 18  | 19886  | 37724   | 67924    |           |             |
| 17   | 39322  | 19861    | 11180    | 51        | 35029       | 48948    | 52791    | 85      | 27798    | 53814     | 22600       | 19  | 19652  | 37041   | 68610    |           |             |
| 18   | 39253  | 20968    | 10170    | 52        | 34849       | 49465    | 50556    | 86      | 27562    | 53579     | 24546       | 20  | 19419  | 36352   | 69255    |           |             |
| 19   | 39181  | 22064    | 09106    | 53        | 34667       | 49959    | 48308    | 87      | 27324    | 53324     | 26464       | 21  | 19186  | 35656   | 69857    |           |             |
| 20   | 39104  | 23150    | 07990    | 54        | 34482       | 50431    | 46048    | 88      | 27086    | 53049     | 28361       | 22  | 18954  | 34955   | 70417    |           |             |
| 21   | 39024  | 24224    | 06823    | 55        | 34294       | 50880    | 43777    | 89      | 26848    | 52757     | 30208       | 23  | 18724  | 34248   | 70936    |           |             |
| 22   | 38940  | 25286    | 05604    | 56        | 34105       | 51306    | 41497    | 90      | 26609    | 52445     | 32034       | 24  | 18494  | 33536   | 71411    |           |             |
| 23   | 38853  | 26336    | 04335    | 57        | 33912       | 51710    | 39208    | 91      | 26369    | 52116     | 33827       | 25  | 18265  | 32820   | 71847    |           |             |
| 24   | 38762  | 27373    | 03018    | 58        | 33718       | 52091    | 36913    | 92      | 26129    | 51769     | 35587       | 26  | 18037  | 32099   | 72241    |           |             |
| 25   | 38667  | 28396    | 01651    | 59        | 33521       | 52448    | 34613    | 93      | 25888    | 51404     | 37314       | 27  | 17810  | 31375   | 72594    |           |             |
| 26   | 38568  | 29405    | 1,00238  | 60        | 33322       | 52783    | 32309    | 94      | 25647    | 51023     | 39005       | 28  | 17585  | 30648   | 72907    |           |             |
| 27   | 38466  | 30401    | 0,98778  | 61        | 33121       | 53094    | 30003    | 95      | 25406    | 50624     | 40668       | 29  | 17360  | 29917   | 73180    |           |             |
| 28   | 38361  | 31381    | 97273    | 62        | 32918       | 53383    | 27696    | 96      | 25164    | 50210     | 42283       | 30  | 17137  | 29184   | 73413    |           |             |
| 29   | 38251  | 32346    | 95723    | 63        | 32713       | 53648    | 25390    | 97      | 24923    | 49779     | 43867       | 31  | 16915  | 28449   | 73606    |           |             |
| 30   | 38139  | 33295    | 94130    | 64        | 32506       | 53891    | 23085    | 98      | 24681    | 49332     | 45414       | 32  | 16694  | 27712   | 73760    |           |             |
| 31   | 38023  | 34228    | 92495    | 65        | 32297       | 54110    | 20783    | 99      | 24439    | 48871     | 46923       | 33  | 16474  | 26974   | 73876    |           |             |
| 32   | 37903  | 35145    | 90819    | 66        | 32086       | 54306    | 18486    | 1,00    | 0,24197  | +0,48394  | -0,48394    | 34  | 16256  | 26235   | 73953    |           |             |
| 33   | 37780  | 36045    | 89103    | 67        | 31874       | 54480    | 16195    | 01      | 23955    | 47903     | 49827       | 35  | 16038  | 25495   | 73993    |           |             |

ГБ

| $X''$ | $f_{(x)}$ | $f_{(x)}^{III}$ | $f_{(x)}^{IV}$ | $X''$ | $f_{(x)}$ | $f_{(x)}^{III}$ | $f_{(x)}^{IV}$ | $X''$ | $f_{(x)}$ | $f_{(x)}^{III}$ | $f_{(x)}^{IV}$ | $X''$ | $f_{(x)}$ | $f_{(x)}^{III}$ | $f_{(x)}^{IV}$ |
|-------|-----------|-----------------|----------------|-------|-----------|-----------------|----------------|-------|-----------|-----------------|----------------|-------|-----------|-----------------|----------------|
| 36    | 15822     | 24755           | 73995          | 69    | 09566     | 02326           | 57202          | 02    | 05186     | 11319           | 25064          | 35    | 02522     | 14949           | $f_{(x)}^{IV}$ |
| 37    | 15608     | 24015           | 73961          | 70    | 09405     | 01759           | 56316          | 03    | 05082     | 11565           | 24109          | 36    | 02463     | 14937           | 00915          |
| 38    | 15395     | 23276           | 73890          | 71    | 09246     | 01200           | 55422          | 04    | 04980     | 11801           | 23160          | 37    | 02406     | 14919           | 01485          |
| 39    | 15183     | 22537           | 73784          | 72    | 09089     | 00650           | 54516          | 05    | 04879     | 12028           | 22220          | 38    | 02349     | 14896           | 02040          |
| 40    | 14973     | 21800           | 73642          | 73    | 08933     | +0,00110        | 53599          | 06    | 04780     | 12245           | 21287          | 39    | 02294     | 14868           | 02582          |
| 41    | 14764     | 21065           | 73466          | 74    | 08780     | -0,00422        | 52671          | 07    | 04682     | 12454           | 20363          | 40    | 02239     | 14834           | 03109          |
| 42    | 14556     | 20331           | 73256          | 75    | 08628     | 00944           | 51733          | 08    | 04586     | 12653           | 19448          | 41    | 02186     | 14795           | 03623          |
| 43    | 14350     | 19600           | 73012          | 76    | 08478     | 01456           | 50785          | 09    | 04491     | 12844           | 18542          | 42    | 02134     | 14752           | 04123          |
| 44    | 14146     | 18871           | 72736          | 77    | 08329     | 01959           | 49829          | 10    | 04398     | 13024           | 17646          | 43    | 02083     | 14703           | 04608          |
| 45    | 13943     | 18145           | 72427          | 78    | 08183     | 02453           | 48865          | 11    | 04307     | 13196           | 16759          | 44    | 02033     | 14650           | 05079          |
| 46    | 13742     | 17423           | 72087          | 79    | 08038     | 02937           | 47893          | 12    | 04217     | 13359           | 15883          | 45    | 01984     | 14593           | 05537          |
| 47    | 13542     | 16704           | 71716          | 80    | 07895     | 03411           | 46915          | 13    | 04128     | 13513           | 15017          | 46    | 01936     | 14531           | 05981          |
| 48    | 13344     | 15988           | 71315          | 81    | 07754     | 03875           | 45932          | 14    | 04041     | 13659           | 14162          | 47    | 01888     | 14464           | 06411          |
| 49    | 13147     | 15277           | 70885          | 82    | 07614     | 04329           | 44943          | 15    | 03955     | 13797           | 13318          | 48    | 01842     | 14394           | 06828          |
| 50    | 12952     | +0,14571        | -0,70425       | 83    | 07477     | 04774           | 43950          | 16    | 03871     | 13926           | 12486          | 49    | 01797     | 14320           | 07231          |
| 51    | 12758     | 13869           | 69937          | 84    | 07341     | 05208           | 42953          | 17    | 03788     | 14046           | 11665          | 2,50  | 0,01753   | -0,14242        | 07621          |
| 52    | 12566     | 13172           | 69423          | 85    | 07206     | 05633           | 41953          | 18    | 03706     | 14159           | 10858          | 51    | 01709     | 14160           | +0,07997       |
| 53    | 12376     | 12481           | 68881          | 86    | 07074     | 06047           | 40950          | 19    | 03626     | 14263           | 10059          | 52    | 01667     | 14075           | 08360          |
| 54    | 12188     | 11795           | 68314          | 87    | 06943     | 06452           | 39946          | 20    | 03547     | 14360           | 09274          | 53    | 01625     | 13986           | 08710          |
| 55    | 12001     | 11114           | 67721          | 88    | 06814     | 06846           | 38940          | 21    | 03470     | 14449           | 08502          | 54    | 01585     | 13894           | 09047          |
| 56    | 11816     | 10440           | 67104          | 89    | 06687     | 07231           | 37934          | 22    | 03394     | 14530           | 07743          | 55    | 01545     | 13798           | 09372          |
| 57    | 11632     | 09772           | 66463          | 90    | 06562     | 07605           | 36928          | 23    | 03319     | 14604           | 06996          | 56    | 01506     | 13700           | 09683          |
| 58    | 11450     | 09111           | 65799          | 91    | 06438     | 07969           | 35923          | 24    | 03246     | 14670           | 06263          | 57    | 01468     | 13599           | 09982          |
| 59    | 11270     | 08456           | 65113          | 92    | 06316     | 08323           | 34918          | 25    | 03174     | 14729           | 05542          | 58    | 01431     | 13495           | 10268          |
| 60    | 11092     | 07809           | 64405          | 93    | 06195     | 08667           | 33916          | 26    | 03103     | 14781           | 04835          | 59    | 01394     | 13388           | 10542          |
| 61    | 10915     | 07168           | 63677          | 94    | 06077     | 09002           | 32916          | 27    | 03034     | 14826           | 04141          | 60    | 01358     | 13279           | 10804          |
| 62    | 10741     | 06535           | 62928          | 95    | 05959     | 09326           | 31919          | 28    | 02965     | 14864           | 03461          | 61    | 01323     | 13167           | 11053          |
| 63    | 10567     | 05910           | 62161          | 96    | 05844     | 09640           | 30925          | 29    | 02898     | 14895           | 02794          | 62    | 01289     | 13053           | 11291          |
| 64    | 10396     | 05292           | 61375          | 97    | 05730     | 09944           | 29936          | 30    | 02833     | 14920           | 02141          | 63    | 01256     | 12937           | 11517          |
| 65    | 10226     | 04682           | 60571          | 98    | 05618     | 10239           | 28950          | 31    | 02768     | 14938           | 01502          | 64    | 01223     | 12818           | 11732          |
| 66    | 10059     | 04081           | 59751          | 99    | 05508     | 10523           | 27970          | 32    | 02705     | 14950           | 00877          | 65    | 01191     | 12698           | 11935          |
| 67    | 09893     | 03487           | 58914          | 2,00  | 0,05399   | -0,10798        | -0,26996       | 33    | 02643     | 14956           | -0,00265       | 66    | 01160     | 12576           | 12127          |
| 68    | 09728     | 02903           | 58063          | 01    | 05292     | 11063           | 26027          | 34    | 02582     | 14955           | +0,00332       | 67    | 01130     | 12452           | 12308          |
|       |           |                 |                |       |           |                 |                |       |           |                 |                |       |           |                 | 12479          |



| $x''$ | $f_{(x)}$ | $f_{(x)}^{III}$ | $f_{(x)}^{IV}$ | $x''$ | $f_{(x)}$ | $f_{(x)}^{III}$ | $f_{(x)}^{IV}$ | $x''$ | $f_{(x)}$ | $f_{(x)}^{III}$ | $f_{(x)}^{IV}$ | $x''$ | $f_{(x)}$ | $f_{(x)}^{III}$ | $f_{(x)}^{IV}$ |
|-------|-----------|-----------------|----------------|-------|-----------|-----------------|----------------|-------|-----------|-----------------|----------------|-------|-----------|-----------------|----------------|
| 68    | 01100     | 12326           | 12638          | 01    | 00430     | 07845           | 13214          | 34    | 00151     | 04109           | 09128          | 67    | 00047     | 01823           | 04915          |
| 69    | 01071     | 12199           | 12787          | 02    | 00417     | 07713           | 13128          | 35    | 00146     | 04018           | 08987          | 68    | 00046     | 01774           | 04808          |
| 70    | 01042     | 12071           | 12926          | 03    | 00405     | 07582           | 13038          | 36    | 00141     | 03929           | 08847          | 69    | 00044     | 01727           | 04703          |
| 71    | 01014     | 11941           | 13055          | 04    | 00393     | 07452           | 12944          | 37    | 00136     | 03841           | 08707          | 70    | 00042     | 01680           | 04599          |
| 72    | 00987     | 11810           | 13174          | 05    | 00381     | 07323           | 12847          | 38    | 00132     | 03755           | 08567          | 71    | 00041     | 01635           | 04497          |
| 73    | 00961     | 11677           | 13283          | 06    | 00370     | 07195           | 12747          | 39    | 00127     | 03670           | 08428          | 72    | 00039     | 01590           | 04396          |
| 74    | 00935     | 11544           | 13383          | 07    | 00358     | 07068           | 12643          | 40    | 00123     | 03586           | 08290          | 73    | 00038     | 01547           | 04297          |
| 75    | 00909     | 11410           | 13473          | 08    | 00346     | 06943           | 12536          | 41    | 00119     | 03504           | 08151          | 74    | 00037     | 01504           | 04200          |
| 76    | 00885     | 11274           | 13555          | 09    | 00337     | 06818           | 12426          | 42    | 00115     | 03423           | 08014          | 75    | 00035     | 01463           | 04103          |
| 77    | 00861     | 11139           | 13627          | 10    | 00327     | 06694           | 12313          | 43    | 00111     | 03344           | 07877          | 76    | 00034     | 01422           | 04009          |
| 78    | 00837     | 11002           | 13691          | 11    | 00317     | 06571           | 12198          | 44    | 00107     | 03266           | 07741          | 77    | 000333    | 01383           | 03916          |
| 79    | 00814     | 10865           | 13746          | 12    | 00307     | 06450           | 12080          | 45    | 00104     | 03189           | 07606          | 78    | 00031     | 01344           | 03824          |
| 80    | 00792     | 10727           | 13793          | 13    | 00298     | 06330           | 11960          | 46    | 00100     | 03114           | 07471          | 79    | 00030     | 01306           | 03734          |
| 81    | 00770     | 10589           | 13832          | 14    | 00288     | 06211           | 11838          | 47    | 00097     | 03040           | 07338          | 80    | 00029     | 01269           | 03646          |
| 82    | 00748     | 10450           | 13863          | 15    | 00279     | 06093           | 11714          | 48    | 00094     | 02967           | 07205          | 81    | 00028     | 01233           | 03559          |
| 83    | 00727     | 10312           | 13886          | 16    | 00271     | 05977           | 11588          | 49    | 00090     | 02895           | 07074          | 82    | 00027     | 01198           | 03473          |
| 84    | 00707     | 10173           | 13902          | 17    | 00262     | 05861           | 11460          | 3,50  | 0,00087   | -0,02825        | +0,06943       | 83    | 00026     | 01164           | 03389          |
| 85    | 00687     | 10034           | 13910          | 18    | 00254     | 05747           | 11330          | 51    | 00084     | 02757           | 06814          | 84    | 00025     | 01130           | 03307          |
| 86    | 00668     | 09895           | 13912          | 19    | 00246     | 05635           | 11199          | 52    | 00081     | 02689           | 06685          | 85    | 00024     | 01098           | 03226          |
| 87    | 00649     | 09755           | 13906          | 20    | 00238     | 05523           | 11066          | 53    | 00079     | 02623           | 06558          | 86    | 00023     | 01066           | 03146          |
| 88    | 00631     | 09616           | 13894          | 21    | 00231     | 05413           | 10933          | 54    | 00076     | 02558           | 06432          | 87    | 00022     | 01035           | 03068          |
| 89    | 00613     | 09478           | 13875          | 22    | 00224     | 05305           | 10798          | 55    | 00073     | 02494           | 06308          | 88    | 00021     | 01004           | 02991          |
| 90    | 00595     | 09339           | 13850          | 23    | 00216     | 05198           | 10662          | 56    | 00071     | 02432           | 06184          | 89    | 00021     | 00975           | 02916          |
| 91    | 00578     | 09201           | 13819          | 24    | 00210     | 05092           | 10525          | 57    | 00068     | 02370           | 06062          | 90    | 00020     | 00946           | 02842          |
| 92    | 00562     | 09063           | 13782          | 25    | 00203     | 04987           | 10387          | 58    | 00066     | 02310           | 05941          | 91    | 00019     | 00918           | 02770          |
| 93    | 00545     | 08925           | 13739          | 26    | 00196     | 04884           | 10249          | 59    | 00063     | 02252           | 05821          | 92    | 00018     | 00891           | 02699          |
| 94    | 00530     | 08788           | 13691          | 27    | 00190     | 04782           | 10110          | 60    | 00061     | 02194           | 05703          | 93    | 00018     | 00864           | 02630          |
| 95    | 00514     | 08651           | 13638          | 28    | 00184     | 04682           | 09970          | 61    | 00059     | 02138           | 05586          | 94    | 00017     | 00838           | 02562          |
| 96    | 00499     | 08515           | 13579          | 29    | 00178     | 04583           | 09830          | 62    | 00057     | 02082           | 05471          | 95    | 00016     | 00813           | 02495          |
| 97    | 00485     | 08380           | 13515          | 30    | 00172     | 04485           | 09690          | 63    | 00055     | 02028           | 05357          | 96    | 00016     | 00788           | 02430          |
| 98    | 00470     | 08245           | 13446          | 31    | 00167     | 04389           | 09549          | 64    | 00053     | 01975           | 05244          | 97    | 00015     | 00764           | 02366          |
| 99    | 00457     | 08111           | 13373          | 32    | 00161     | 04294           | 09409          | 65    | 00051     | 01923           | 05133          | 98    | 00014     | 00741           | 02303          |
| 3,00  | 0,00443   | -0,07977        | +0,13296       | 33    | 00156     | 04201           | 09268          | 66    | 00049     | 01873           | 05023          | 99    | 00014     | 00718           | 02242          |
|       |           |                 |                |       |           |                 |                |       |           |                 |                | 4,00  | 0,00013   | -0,00696        | +0,02181       |



# Приложение Е

## Стандартные значения критерия Фишера

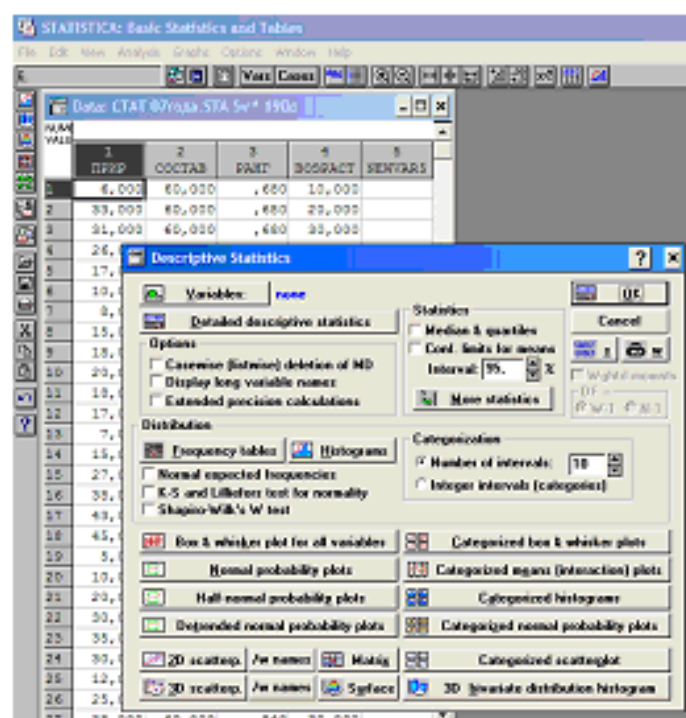
| мел-<br>шая<br>диспер- | доверительный уровень 95%         |       |       |       |       |     |       |       |       |       |       |       |
|------------------------|-----------------------------------|-------|-------|-------|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                        | степени свободы большей дисперсии |       |       |       |       |     |       |       |       |       |       |       |
|                        | 1                                 | 2     | 3     | 4     | 5     | 6   | 8     | 12    | 16    | 24    | 50    | ∞     |
| 1                      | 161,4                             | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234 | 238,9 | 243,9 | 246,5 | 249   | 251,8 | 254,3 |
| 2                      | 18,51                             | 19    | 19,16 | 19,25 | 19,3  | 19  | 19,37 | 19,41 | 19,43 | 19,45 | 19,47 | 19,5  |
| 3                      | 10,13                             | 9,55  | 9,28  | 9,12  | 9,01  | 9   | 8,84  | 8,74  | 8,69  | 8,64  | 8,58  | 8,53  |
| 4                      | 7,71                              | 6,94  | 6,59  | 6,39  | 6,26  | 6   | 6,04  | 5,91  | 5,84  | 5,77  | 5,7   | 5,63  |
| 5                      | 6,61                              | 5,79  | 5,41  | 5,19  | 5,05  | 5   | 4,82  | 4,68  | 4,6   | 4,53  | 4,44  | 4,36  |
| 6                      | 5,99                              | 5,14  | 4,76  | 4,53  | 4,39  | 4   | 4,15  | 4     | 3,92  | 3,84  | 3,75  | 3,67  |
| 7                      | 5,59                              | 4,74  | 4,35  | 4,12  | 3,97  | 4   | 3,73  | 3,57  | 3,49  | 3,41  | 3,32  | 3,23  |
| 8                      | 5,32                              | 4,46  | 4,07  | 3,84  | 3,69  | 4   | 3,44  | 3,28  | 3,2   | 3,12  | 3,03  | 2,93  |
| 9                      | 5,12                              | 4,26  | 3,86  | 3,63  | 3,48  | 3   | 3,23  | 3,07  | 2,98  | 2,9   | 2,8   | 2,71  |
| 10                     | 4,96                              | 4,1   | 3,71  | 3,48  | 3,33  | 3   | 3,07  | 2,91  | 2,82  | 2,74  | 2,64  | 2,54  |
| 11                     | 4,84                              | 3,98  | 3,59  | 3,36  | 3,2   | 3   | 2,95  | 2,79  | 2,7   | 2,61  | 2,5   | 2,4   |
| 12                     | 4,75                              | 3,88  | 3,49  | 3,26  | 3,11  | 3   | 2,85  | 2,69  | 2,6   | 2,5   | 2,4   | 2,3   |
| 13                     | 4,67                              | 3,8   | 3,41  | 3,18  | 3,02  | 3   | 2,77  | 2,6   | 2,51  | 2,42  | 2,32  | 2,21  |
| 14                     | 4,6                               | 3,74  | 3,34  | 3,11  | 2,96  | 3   | 2,7   | 2,53  | 2,44  | 2,35  | 2,24  | 2,13  |
| 15                     | 4,54                              | 3,68  | 3,29  | 3,06  | 2,9   | 3   | 2,64  | 2,48  | 2,39  | 2,29  | 2,18  | 2,07  |
| 16                     | 4,49                              | 3,63  | 3,24  | 3,01  | 2,85  | 3   | 2,59  | 2,42  | 2,33  | 2,24  | 2,13  | 2,01  |
| 17                     | 4,45                              | 3,59  | 3,2   | 2,96  | 2,81  | 3   | 2,55  | 2,38  | 2,29  | 2,19  | 2,08  | 1,96  |
| 18                     | 4,41                              | 3,55  | 3,16  | 2,93  | 2,77  | 3   | 2,51  | 2,34  | 2,25  | 2,15  | 2,04  | 1,92  |
| 19                     | 4,38                              | 3,52  | 3,13  | 2,9   | 2,74  | 3   | 2,48  | 2,31  | 2,21  | 2,11  | 2     | 1,88  |
| 20                     | 4,35                              | 3,49  | 3,1   | 2,87  | 2,71  | 3   | 2,45  | 2,28  | 2,18  | 2,08  | 1,96  | 1,84  |
| 21                     | 4,32                              | 3,47  | 3,07  | 2,84  | 2,68  | 3   | 2,42  | 2,25  | 2,15  | 2,05  | 1,93  | 1,81  |
| 22                     | 4,3                               | 3,44  | 3,05  | 2,82  | 2,66  | 3   | 2,4   | 2,23  | 2,13  | 2,03  | 1,91  | 1,78  |
| 23                     | 4,28                              | 3,42  | 3,03  | 2,8   | 2,64  | 3   | 2,38  | 2,2   | 2,11  | 2     | 1,88  | 1,76  |
| 24                     | 4,26                              | 3,4   | 3,01  | 2,78  | 2,62  | 3   | 2,36  | 2,18  | 2,09  | 1,98  | 1,86  | 1,73  |
| 25                     | 4,24                              | 3,38  | 2,99  | 2,76  | 2,6   | 2   | 2,34  | 2,16  | 2,07  | 1,96  | 1,84  | 1,71  |
| 30                     | 4,17                              | 3,32  | 2,92  | 2,69  | 2,53  | 2   | 2,27  | 2,09  | 1,99  | 1,89  | 1,76  | 1,62  |
| 40                     | 4,08                              | 3,23  | 2,84  | 2,61  | 2,45  | 2   | 2,18  | 2     | 1,9   | 1,79  | 1,66  | 1,51  |
| 50                     | 4,03                              | 3,18  | 2,79  | 2,56  | 2,4   | 2   | 2,13  | 1,95  | 1,85  | 1,74  | 1,6   | 1,44  |
| 60                     | 4                                 | 3,15  | 2,76  | 2,52  | 2,37  | 2   | 2,1   | 1,92  | 1,81  | 1,7   | 1,56  | 1,39  |
| 70                     | 3,98                              | 3,13  | 2,74  | 2,5   | 2,35  | 2   | 2,07  | 1,89  | 1,79  | 1,67  | 1,53  | 1,35  |
| 80                     | 3,96                              | 3,11  | 2,72  | 2,49  | 2,33  | 2   | 2,06  | 1,88  | 1,77  | 1,65  | 1,51  | 1,32  |
| 90                     | 3,95                              | 3,1   | 2,71  | 2,47  | 2,32  | 2   | 2,04  | 1,86  | 1,76  | 1,64  | 1,49  | 1,3   |
| 100                    | 3,94                              | 3,09  | 2,7   | 2,46  | 2,3   | 2   | 2,03  | 1,85  | 1,75  | 1,63  | 1,48  | 1,28  |
| 150                    | 3,9                               | 3,06  | 2,66  | 2,43  | 2,27  | 2   | 2     | 1,82  | 1,71  | 1,59  | 1,44  | 1,22  |
| 200                    | 3,89                              | 3,04  | 2,65  | 2,42  | 2,26  | 2   | 1,98  | 1,8   | 1,69  | 1,57  | 1,42  | 1,19  |
| 300                    | 3,87                              | 3,03  | 2,64  | 2,41  | 2,25  | 2   | 1,97  | 1,79  | 1,68  | 1,55  | 1,39  | 1,15  |
| 400                    | 3,86                              | 3,02  | 2,63  | 2,4   | 2,24  | 2   | 1,96  | 1,78  | 1,67  | 1,54  | 1,38  | 1,13  |
| 500                    | 3,86                              | 3,01  | 2,62  | 2,39  | 2,23  | 2   | 1,96  | 1,77  | 1,66  | 1,54  | 1,38  | 1,11  |
| 1000                   | 3,85                              | 3     | 2,61  | 2,38  | 2,22  | 2   | 1,95  | 1,76  | 1,65  | 1,53  | 1,36  | 1,08  |
| ∞                      | 3,84                              | 2,99  | 2,6   | 2,37  | 2,21  | 2   | 1,94  | 1,75  | 1,64  | 1,52  | 1,35  | 1     |

Основные статистические модули пакета STATISTICA

| Наименование модуля        | Назначение                                                                |
|----------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| ANOVA/MANOVA               | Одномерный и многомерный, дисперсионный и ковариационный анализ           |
| Basic Statistic and Tables | Описательные статистики, группировка, вычисление корреляции, t - критерий |
| Cluster Analysis           | Кластерный анализ                                                         |
| Factor Analysis            | Факторный анализ                                                          |
| Multiple Regression        | Линейный регрессионный анализ                                             |
| Nonparametric distribution | Непараметрическая статистика                                              |
| Times Series / Forecasting | Анализ и прогнозирование временных рядов                                  |



## PETIC



РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф.СКОРИНЫ

**Учебное издание**

**Ефименко Владимир Макарович**

**ЛЕСНАЯ БИОМЕТРИЯ**

**ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ  
по выполнению лабораторных работ  
для студентов специальности  
1-75 01 01 «Лесное хозяйство»**

*В авторской редакции*

Подписано в печать 10.06.2007г. (43) Формат 60х84 1/16  
Бумага писчая № 1. Гарнитура «Таймс». Усл. п. л. 4,0  
Уч.-изд. л. 3,2. Тираж 25 экз.

Отпечатано с оригинал-макета на ризографе  
в учреждении образования  
«Гомельский государственный университет  
Имени Франциска Скорины»  
Лицензия № 02330/0056611 от 16.02.04.  
246019, г.Гомель, ул. Советская, 104.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф.СКОРИНЫ