Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №4(31), 2005

Математика

УДК 512.542

О приводимых тотально насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3

В. Г. Сафонов

Рассматриваются только конечные группы. Используется терминология принятая в [1–3].

Изучению различных свойств решетки тотально насыщенных формаций посвящены работы [4–10]. В настоящей работе дается описание приводимых тотально насыщенных формаций, имеющих нильпотентный дефект 3.

Напомним некоторые из используемых определений и обозначений [2, 3].

Всякую формацию конечных групп называют 0-кратно насыщенной. При $n \geqslant 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n-кратно насыщенной, если она имеет такой локальный экран, все непустые значения которого — $(n-1)$-кратно насыщенные формации. Формацию n-кратно насыщенную для любого целого неотрицательного n называют тотально насыщенной.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторая совокупность групп. Тогда через $l_\infty \mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначают тотально насыщенную формацию, порожденную классом групп $\mathfrak{X}$, т.е. пересечение всех тотально насыщенных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. При этом, если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то формацию $l_\infty \mathrm{form} G$ называют однопорожденной тотально насыщенной формацией.

Совокупность всех тотально насыщенных формаций l_∞ с операциями $\vee_\infty$ и $\cap$ образует полную решетку. Для любых формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ из l_∞ полагают $\mathfrak{M} \vee_\infty \mathfrak{H} = l_\infty \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Формации из l_∞ называют l_∞-формациями. Экран, все непустые значения которого l_∞-формации, называют l_∞-значным. Если $\mathfrak{F}$ — тотально насыщенная формация, то через $\mathfrak{F}_\infty$ обозначают её минимальный l_∞-значный локальный экран. Для всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ полагают $\mathfrak{X}_\infty(p) = l_\infty \mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, если $p \in \pi(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{X}_\infty(p) = \varnothing$, если $p \notin \pi(\mathfrak{X})$.

Тотально насыщенную формацию $\mathfrak{F}$ называют $\mathfrak{H}_\infty$-критической (или, иначе, минимальной тотально насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные тотально насыщенные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Для любых двух l_∞-формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ через $|\mathfrak{F} : \mathfrak{M}|_\infty$ обозначают длину решетки $\mathfrak{F}/_\infty \mathfrak{M}$ l_∞-формаций, заключенных между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — произвольные l_∞-формации. Тогда $\mathfrak{H}_\infty$-дефектом формации $\mathfrak{F}$ называют длину решетки $\mathfrak{F}/_\infty \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ (конечную или бесконечную) и обозначают $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\infty$. В случае когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}_\infty$-дефект l_∞-формации называют её нильпотентным l_∞-дефектом.

Тотально насыщенная формация $\mathfrak{F}$ называется неприводимой (или l_∞-неприводимой формацией), если $\mathfrak{F} \neq l_\infty \mathrm{form}(\cup_{i \in I} \mathfrak{X}_i) = \vee_\infty(\mathfrak{X}_i \mid i \in I)$, где $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ — набор всех собственных тотально насыщенных подформаций из $\mathfrak{F}$. Если же найдутся такие собственные тотально насыщенные подформации $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee {}_\infty\mathfrak{H}$, то формация $\mathfrak{F}$ называется приводимой тотально насыщенной формацией (или l_∞-приводимой формацией).

Следующая лемма является частным случаем леммы 4.1.2 [3, с. 152].

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}_i$ — тотально насыщенная формация, $i \in I$. Тогда $\vee_\infty((\mathfrak{F}_i)_\infty | i \in I)$ — минимальный l_∞-значный локальный экран формации $\vee_\infty(\mathfrak{F}_i | i \in I)$.*

Лемма 2 [10]. *Пусть G — монолитическая группа, $R = \mathrm{Soc}(G)$ — неабелева группа. Тогда $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form} G$ имеет единственную максимальную l_∞-подформацию $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(R)} l_\infty \mathrm{form}(G/R)$.*

Лемма 3 [10]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная тотально насыщенная неразрешимая формация, когда $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form} G$, где G — такая монолитическая группа с неабелевой минимальной нормальной подгруппой R, что группа G/R разрешима.*

Лемма 4 [10]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неразрешимая тотально насыщенная формация. Тогда в $\mathfrak{F}$ найдется по меньшей мере одна $\mathfrak{S}_\infty$-критическая подформация.*

Лемма 5 [9]. *Решетка всех тотально насыщенных формаций дистрибутивна.*

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — тотально насыщенные формации, причем $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{X}_\infty$-критическая формация, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$, где $p \notin \pi(\mathfrak{X})$;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ для некоторых различных простых чисел p и q из $\pi(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{X}_\infty$-критическая формация. Допустим найдётся такое $p \in \pi(\mathfrak{F})$, что $p \notin \pi(\mathfrak{X})$. Тогда поскольку $\mathfrak{N}_p$ — тотально насыщенная формация, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{X}$ и (1) — единственная тотально насыщенная подформация формации $\mathfrak{N}_p$, $(1) \subseteq \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$. Следовательно, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1) леммы.

Пусть теперь $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi(\mathfrak{X})$. Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ разрешима. Допустим $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}$. Тогда по лемме 4 $\mathfrak{F}$ содержит по меньшей мере одну $\mathfrak{S}_\infty$-критическую подформацию $\mathfrak{L}$. Ввиду леммы 3 $\mathfrak{L} = l_\infty \mathrm{form} A$, где A — такая монолитическая группа с неабелевой минимальной нормальной подгруппой R, что группа A/R разрешима. Согласно лемме 2 формация $\mathfrak{L}$ имеет единственную максимальную l_∞-подформацию $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(R)} l_\infty \mathrm{form}(A/R)$. Ввиду того, что R — неабелева минимальная нормальная подгруппа группы A, то $|\pi(R)| \geqslant 3$. Поскольку $\mathfrak{S}_{\pi(R)}$ — наследственная формация, то $\mathfrak{S}_{\pi(R)} \subset \mathfrak{L}$. Так как по условию $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{X}_\infty$-критическая формация, то $\mathfrak{S}_{\pi(R)} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Противоречие. Поэтому формация $\mathfrak{F}$ разрешима.

Согласно теореме 2.5.2 [3, с. 94] $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form} G$, где G — такая группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{X}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{X}}$, что для $p \in \pi(P)$ формация $\mathfrak{F}_\infty(p)$ является $(h(p))_\infty$-критической, где h — канонический экран формации $\mathfrak{X}$. Поскольку $h(p) = \mathfrak{N}_p$, то $\mathfrak{F}_\infty(p) = l_\infty \mathrm{form}(G/F_p(G))$ — $(\mathfrak{N}_p)_\infty$-критическая формация. Значит, $|\pi(\mathfrak{F}_\infty(p))| = 1$ и $\mathfrak{F}_\infty(p) = \mathfrak{N}_q$ для некоторого простого числа $q \neq p$. Так как при этом $F_p(G) = P$, то $\pi(G) = \{p, q\}$ и, очевидно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2) леммы.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1). Ясно, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{X}$. Поскольку (1) — единственная l_∞-подформация из $\mathfrak{F}$ и $(1) \subseteq \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{X}_\infty$-критическая формация.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2). Тогда в силу следствия 2.5.4 [3, с. 94] $\mathfrak{F}$ — разрешимая $\mathfrak{N}_\infty$-критическая формация. Поскольку $\mathfrak{N}_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{X}_\infty$-критична. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{X}$ — тотально насыщенные формации, причем $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Тогда в $\mathfrak{F}$ найдется по меньшей мере одна $\mathfrak{X}_\infty$-критическая подформация.*

Доказательство. Допустим, что $\pi(\mathfrak{F}) \not\subseteq \pi(\mathfrak{X})$ и $p \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi(\mathfrak{X})$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{N}_p$ — искомая $\mathfrak{X}_\infty$-критическая формация. Пусть теперь $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi(\mathfrak{X})$ и A — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{X}$. Тогда A — монолитическая группа с минимальной нормальной подгруппой $R = A^{\mathfrak{X}}$. Пусть $p \in \pi(R)$ и $\mathfrak{L} = l_\infty \mathrm{form} A$.

Допустим R — неабелева группа. Тогда в силу леммы 2 $\mathfrak{S}_{\pi(R)} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi(R)} l_\infty \mathrm{form}(A/R) \subset \mathfrak{L}$. Так как $|\pi(R)| \geqslant 3$, то найдется такое простое число q из $\pi(R) \setminus \{p\}$, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \subset \mathfrak{S}_{\pi(R)} \subset \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{N}_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{X}$, то ввиду леммы 6 $\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$ — искомая $\mathfrak{X}_\infty$-критическая формация.

Пусть теперь R — абелева p-группа. Поскольку $R \not\subseteq \Phi(A)$, то $R = O_p(A) = F_p(A)$ и $A = [R]B$, для некоторой максимальной в A подгруппы B. По теореме 1.3.14 [3, с. 33]

$$\mathfrak{L}_\infty(p) = l_\infty \mathrm{form}(A/F_p(A)) = l_\infty \mathrm{form} B.$$

Пусть $q \in \pi(B) \setminus \{p\}$ и Q — группа порядка q. Поскольку $\mathfrak{L}_\infty(p)$ — тотально насыщенная формация, то $Q \in \mathfrak{L}_\infty(p)$. Обозначим через V точный неприводимый $F_p[Q]$-модуль и пусть $F = [V]Q$. Тогда $F/O_p(F) \simeq Q \in \mathfrak{L}_\infty(p)$. Поэтому по лемме 8.2 [2, с. 78] $F \in \mathfrak{L}$. Но, как нетрудно убедиться, $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form} F = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$. Значит, $\mathfrak{F}$ — искомая $\mathfrak{X}_\infty$-критическая формация. Лемма доказана.

Следующие две леммы непосредственно вытекают из лемм 5.2.7 и 5.2.8 монографии [3].

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — l_∞-формации, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда*

$$|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\infty \leqslant |\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\infty.$$

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ — l_∞-формации, причем $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\infty \mathfrak{X}$. Тогда если m, r и t — соответственно $\mathfrak{H}_\infty$-дефекты формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$, причем m, $r < \infty$, то $t \leqslant m + r$.*

Лемма 10. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — l_∞-формации, $\mathfrak{X} = \mathfrak{M} \vee_\infty \mathfrak{F}$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$. Тогда если $\mathfrak{H}_\infty$-дефект формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ конечен, то*

$$|\mathfrak{X} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}|_\infty = |\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\infty + |\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\infty - |\mathfrak{L} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}|_\infty.$$

Доказательство. Пусть $t = |\mathfrak{X} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}|_\infty$, $m = |\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\infty$, $k = |\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\infty$, $l = |\mathfrak{L} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}|_\infty$. По лемме 9 имеем $t \leqslant m + k$.

Рассмотрим l_∞-формации $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X} \vee_\infty \mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \vee_\infty \mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F} \vee_\infty \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L} \vee_\infty \mathfrak{H}$. Ввиду лемм 8 и 9 $|\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}_1|_\infty = t$, $|\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}_1|_\infty = m$, $|\mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_1|_\infty = k$ и $|\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}_1|_\infty = l$. Поэтому длина решетки $\mathfrak{X}_1/_\infty(\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{X} \vee_\infty \mathfrak{H}/_\infty \mathfrak{H}$ равна t. Так как формации $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{F}_1$ — элементы решетки $\mathfrak{X} \vee_\infty \mathfrak{H}/_\infty \mathfrak{H} \simeq \mathfrak{X}/_\infty \mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_\infty$-дефект является функцией высоты данной решетки, то по теореме 16 [11, с. 61] имеем

$$|\mathfrak{M}_1 \vee_\infty \mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M}_1 \vee_\infty \mathfrak{F}_1)|_\infty = |\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}_1|_\infty + $$
$$+ |\mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_1|_\infty - |\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1)|_\infty. \quad (1)$$

Но

$$\mathfrak{M}_1 \vee_\infty \mathfrak{F}_1 = (\mathfrak{M} \vee_\infty \mathfrak{H}) \vee_\infty (\mathfrak{F} \vee_\infty \mathfrak{H}) = \mathfrak{X} \vee_\infty \mathfrak{H}.$$

Поэтому $|\mathfrak{M}_1 \vee_\infty \mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M}_1 \vee_\infty \mathfrak{F}_1)|_\infty = t$. Кроме того, в силу леммы 5 имеем

$$\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1 = (\mathfrak{M} \vee_\infty \mathfrak{H}) \cap (\mathfrak{F} \vee_\infty \mathfrak{H}) = (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) \vee_\infty \mathfrak{H} = \mathfrak{L} \vee_\infty \mathfrak{H} = \mathfrak{L}_1.$$

Поскольку $|\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}_1|_\infty = |\mathfrak{L} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}| = l$, то из (1) получаем $t = m + k - l$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально насыщенная формация. Тогда и только тогда $|\mathfrak{F} : \mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}|_\infty = 1$, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee {}_\infty \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — нильпотентная тотально насыщенная формация, $\mathfrak{H}$ — $\mathfrak{N}_\infty$-критическая формация, при этом: 1) всякая нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee {}_\infty(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})$; 2) всякая ненильпотентная l_∞-формация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee {}_\infty(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N})$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — l_∞-формация с нильпотентным дефектом 1. Покажем, что $\mathfrak{F}$ разрешима. Предположим противное и пусть A — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{S}$. Тогда A — монолитическая группа с неабелевым монолитом $R = \mathrm{Soc}(A)$. Понятно, что $|\pi(R)| \geqslant 3$. Ввиду леммы 2 формация $\mathfrak{L} = l_\infty \mathrm{form} A$ имеет единственную максимальную тотально насыщенную подформацию $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(R)} l_\infty \mathrm{form}(A/R)$. Поскольку $\mathfrak{S}_{\pi(R)}$ — наследственная формация, то $\mathfrak{S}_{\pi(R)} \subset \mathfrak{L}$. Поэтому $\mathfrak{S}_{\pi(R)} \subset \mathfrak{F}$. Пусть p, q — различные простые числа из $\pi(R)$. Тогда, очевидно, что

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \vee {}_\infty \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p \subset \mathfrak{S}_{\pi(R)} \subset \mathfrak{F}.$$

Поскольку по лемме 6 $\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$ и $\mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p$ — минимальные тотально насыщенные ненильпотентные формации, то в силу леммы 10 $|\mathfrak{L} : \mathfrak{N} \cap \mathfrak{L}| = 2$. Последнее противоречит лемме 8. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$.

Теперь доказательство необходимости непосредственно следует из следствия 5.2.14 [3, с. 199].

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию леммы. Поскольку по лемме 6 любая $\mathfrak{N}_\infty$-критическая формация разрешима, то разрешимой является и формация $\mathfrak{F}$. Следовательно, достаточность вытекает из следствия 5.2.14 [3]. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально насыщенная формация. Тогда и только тогда $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}|_\infty = 2$, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee {}_\infty \mathfrak{H}_2 \vee {}_\infty \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные $\mathfrak{N}_\infty$-критические формации, а $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Покажем прежде, что любая l_∞-формация $\mathfrak{F}$ с нильпотентным дефектом 2 разрешима. Действительно, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}$, то по лемме 4 формация $\mathfrak{F}$ содержит по крайней мере одну $\mathfrak{S}_\infty$-критическую подформацию $\mathfrak{H}$. Применяя теперь леммы 3 и 2 получим, что $\mathfrak{F}$ содержит формацию вида $\mathfrak{S}_\pi$, где $|\pi| \geqslant 3$. Пусть p, q и r — различные простые числа из π. Тогда

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \vee {}_\infty \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p \vee {}_\infty \mathfrak{N}_r \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}.$$

Ввиду леммы 10 нильпотентный дефект формации $\mathfrak{L}$ равен 3. Последнее невозможно в силу леммы 8.

Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ разрешима. Теперь утверждение леммы непосредственно вытекает из следствия 5.2.22 [3, с. 212]. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — приводимая тотально насыщенная формация. Тогда и только тогда нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 3, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee {}_\infty \mathfrak{H}_2 \vee {}_\infty \mathfrak{H}_3 \vee {}_\infty \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}_i$ — $\mathfrak{N}_\infty$-критическая формация, $i = 1, 2, 3$, $\mathfrak{H}_i \neq \mathfrak{H}_j$ $(i \neq j)$, а $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee {}_\infty \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, а $\mathfrak{H}$ — такая неприводимая тотально насыщенная формация нильпотентного дефекта 3, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — приводимая тотально насыщенная формация нильпотентного дефекта 3, $\mathfrak{F}_1$ — ее максимальная тотально насыщенная подформация нильпотентного дефекта 2.

В силу леммы 12 имеем $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{H}_1 \vee_\infty \mathfrak{H}_2 \vee_\infty \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные тотально насыщенные ненильпотентные формации, а $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.

Предположим, что в $\mathfrak{F}$ найдется такая минимальная тотально насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{H}_3$, что $\mathfrak{H}_3 \not\subseteq \mathfrak{F}_1$. Тогда

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee_\infty \mathfrak{H}_3 = \mathfrak{H}_1 \vee_\infty \mathfrak{H}_2 \vee_\infty \mathfrak{M} \vee_\infty \mathfrak{H}_3 = \mathfrak{H}_1 \vee_\infty \mathfrak{H}_2 \vee_\infty \mathfrak{H}_3 \vee_\infty \mathfrak{M}.$$

Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1) теоремы.

Допустим теперь, что любая минимальная тотально насыщенная ненильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{F}_1$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — приводимая тотально насыщенная формация, то в $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_1$ найдется такая группа A, что $\mathfrak{F} \neq l_\infty \mathrm{form} A$. Пусть $\mathfrak{L} = l_\infty \mathrm{form} A$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\infty \mathfrak{F}_1$ и, с учетом леммы 12, $|\mathfrak{L} : \mathfrak{N} \cap \mathfrak{L}|_\infty = 3$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная минимальная тотально насыщенная ненильпотентная подформация из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{L}$. Тогда $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{L} \vee_\infty \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ и по лемме 8 имеем $|\mathfrak{F}_2 : \mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}_2|_\infty \leqslant 3$. С другой стороны, по лемме 10 получаем $|\mathfrak{F}_2 : \mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}_2|_\infty = 3 + 1 - 0 = 4$. Пришли к противоречию. Поэтому любая минимальная тотально насыщенная ненильпотентная подформация из $\mathfrak{F}_1$ содержится в $\mathfrak{L}$.

Допустим теперь, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{L}$. Значит, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{H}_1 \vee_\infty \mathfrak{H}_2 \vee_\infty \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{L}$. Последнее противоречит максимальности формации $\mathfrak{F}_1$. Следовательно, $\pi(\mathfrak{L}) \neq \pi(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F}_1)$ и $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N} \not\subseteq \mathfrak{L}$.

Поэтому если $\mathfrak{L}$ — неприводимая тотально насыщенная формация, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\infty \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{L} \vee_\infty (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N})$ и теорема верна. Пусть $\mathfrak{L}$ — приводимая тотально насыщенная формация. Индукцией по $|\pi(\mathfrak{L})|$ покажем, что $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2) теоремы. Рассуждая также, как и выше, нетрудно показать, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{X} \vee_\infty \mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{X} = l_\infty \mathrm{form} B \neq \mathfrak{L}$, нильпотентный дефект формации $\mathfrak{X}$ равен 3 и всякая минимальная тотально насыщенная ненильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{L}_1$ — максимальная тотально насыщенная подформация формации $\mathfrak{L}$ нильпотентного дефекта 2, а группа $B \notin \mathfrak{L}_1$. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\infty \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{X} \vee_\infty \mathfrak{L}_1 \vee_\infty \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{X} \vee_\infty (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N})$. Если теперь $\mathfrak{X}$ — неприводимая тотально насыщенная формация, то теорема верна. Пусть $\mathfrak{X}$ приводима. Тогда если $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{N}$, то учитывая лемму 12 получаем, что $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{L} = \mathfrak{X}$, что невозможно. Поэтому $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N} \neq \mathfrak{L} \cap \mathfrak{N}$, т.е. $|\pi(\mathfrak{X})| < |\pi(\mathfrak{L})|$. Следовательно, в силу предположения индукции, можно считать, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{R} \vee_\infty \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{R}$ — неприводимая тотально насыщенная формация нильпотентного дефекта 3, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{B} \not\subseteq \mathfrak{R}$. Ясно, что $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N} \not\subseteq \mathfrak{R}$. Используя теперь лемму 12 получаем $\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_\infty (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{R} \vee_\infty \mathfrak{B} \vee_\infty (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{R} \vee_\infty (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N})$. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2) теоремы.

Достаточность вытекает из леммы 10. Теорема доказана.

Abstract The description of reducible totally saturated formations of finite groups with the nilpotent defect 3 is obtained.

Литература

1. Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Москва, Наука, 1978.

2. Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, *Формации алгебраических систем*, Москва, Наука, 1989.

3. А. Н. Скиба, *Алгебра формаций*, Минск, Беларуская навука, 1997.

4. С. Ф. Каморников, *О некоторых свойствах тотально локальных формаций*, Матем. заметки, **60**, № 1 (1996), 24–29.

5. Н. Н. Воробъёв, *Об одном вопросе теории локальных классов конечных групп*, Вопросы алгебры, Гомель: Изд-во Гом. ун-та, Вып. 14 (1999), 132–140.

6. W. Guo, K. P. Shum, *On totally local formations of groups*, Comm. Algebra, **30**, № 5 (2002), 2117–2131.

7. В. Г. Сафонов, *Об одном вопросе теории тотально локальных формаций конечных групп*, Алгебра и логика, **42**, № 6 (2003), 727–736.

8. В. Г. Сафонов, *О свойствах решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций*, Препринт / Гомель, Гомельский государственный университет, № 3 (2004).

9. В. Г. Сафонов, *О дистрибутивности решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций конечных групп*, Препринт / Гомель, Гомельский госуниверситет, № 5 (2004).

10. В. Г. Сафонов, *О тотально насыщенных формациях конечной длины*, Известия Гомельского госуниверситета, № 6 (2004), 150–155.

11. Г. Биркгоф, *Теория решеток*, Москва, Наука, 1984.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 15.05.05