УДК 535.317

АБЕРРАЦИОННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Д. Ю. Гальперн

Показано, каким образом, пользуясь понятием об аберрационных потенциалах, можно установить дифференциальные законы оптики и в частности условия изопланазии для систем различного вида: объективов, телескопических систем, луп и окуляров

Введение

Понятие об аберрационных потенциалах введено К. Шварцшильдом в 1905 г. [1]. Ниже будет показано, каким образом с его помощью могут быть установлены дифференциальные законы оптики, и в частности условия изопланазии для систем различного вида: объективов, телескопических систем, луп и окуляров.

Основные определения

Определим аберрации объектива δy и δz соотношениями

$$\left.\begin{aligned}\delta y\,(y,\ z,\ \mu',\ \nu') &= y' - \beta y,\\ \delta z\,(y,\ z,\ \mu',\ \nu') &= z' - \beta z,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где y и z — координаты точки пересечения луча с предметной плоскостью; y' и z' — координаты точки пересечения луча с плоскостью установки, а β — масштабный множитель, который, в частности, при совмещении плоскости установки с гауссовой плоскостью может быть принят равным линейному увеличению β; μ', ν' — направляющие косинусы луча с осями $o'y'$ и $o'z'$ в пространстве изображений.

Для телескопической системы аберрации $\delta\mu'$ и $\delta\nu'$ определяем равенствами

$$\left.\begin{aligned}\delta\mu'\,(\mu,\ \nu,\ m',\ M') &= \mu' - \Gamma\mu,\\ \delta\nu\,(\mu,\ \nu,\ m',\ M') &= \nu' - \Gamma\nu,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где μ и ν — направляющие косинусы луча в пространстве предметов; μ' и ν' — те же величины, но в пространстве изображений; Γ — увеличение телескопической системы, а m' и M' — координаты точек пересечения луча с плоскостью выходного зрачка.

Для лупы или окуляра в прямом ходе лучей аналогично примем для аберраций следующее определение:

$$\left.\begin{aligned}\delta\mu'\,(y,\ z,\ m',\ M') &= \mu' + \frac{y}{f'},\\ \delta\nu'\,(y,\ z,\ m',\ M') &= \nu' + \frac{z}{f'}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Здесь y и z — координаты точки пересечения луча с первой фокальной плоскостью; μ' и ν' — направляющие косинусы луча в пространстве изображений, а f' — второе фокусное расстояние системы; m', M' — координаты точек пересечения луча с плоскостью выходного зрачка.

Определяя аберрации телескопической системы и окуляра, мы несколько отступим от традиции, заменив тангенсы углов их направляющими косинусами, но в дальнейшем при выводе дифференциальных законов это окажется удобным. Величины, стоящие в скобках при символах аберраций δy, δz и $\delta\mu'$, $\delta\nu'$, являются аргументами, от которых зависят аберрации.

Основные эйконалы

Напомним определения основных эйконалов. Точечный эйконал E_1 является функцией координат точек пересечения луча с координатными плоскостями (yoz) и $(y'o'z')$ в пространстве предметов и изображений $(y, z, y'$ и $z')$ и равен длине оптического пути луча между этими точками A и A' (рис. 1).

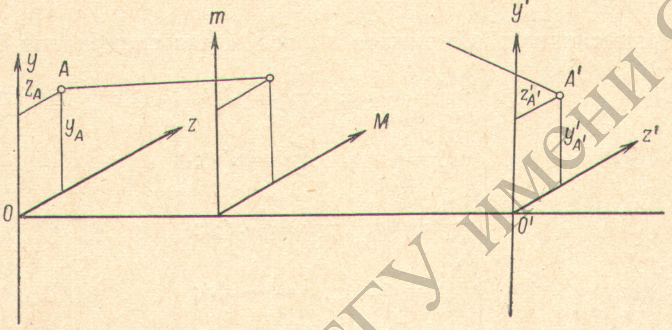

Рис. 1.

Угловой эйконал E_2 является функцией направляющих косинусов μ, ν, μ' и ν' и равен длине оптического пути вдоль луча между основаниями перпендикуляров OA и OA', опущенных из осевых точек координатных плоскостей в пространствах предметов и изображений на луч (рис. 2).

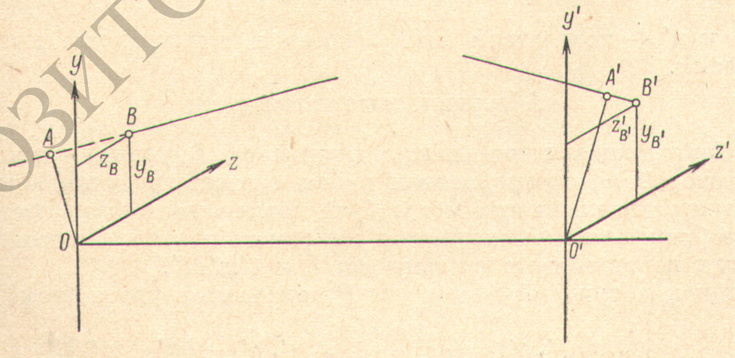

Рис. 2.

Смешанный эйконал E_3 является функцией координат y, z и μ', ν' и равен длине оптического пути между точкой B с координатами y, z и основанием перпендикуляра A', опущенного из осевой точки координатной плоскости на луч (рис. 3).

Наконец, смешанный эйконал E_4 является функцией величин μ, ν и y', z' и равен длине оптического пути вдоль луча между основанием перпендикуляра, опущенного из осевой точки координатной плоскости yoz на луч и точкой с координатами y' и z'.

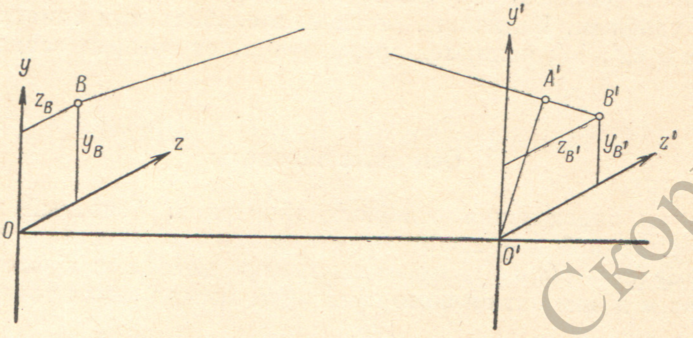

Рис. 3.

Для перечисленных эйконалов имеют место следующие формулы [2]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial y} = -n\mu, \quad \frac{\partial E_1}{\partial y'} = n'\mu'; \\ \frac{\partial E_1}{\partial z} = -n\nu, \quad \frac{\partial E_1}{\partial z'} = n'\nu'; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_2}{\partial \mu} = ny, \quad \frac{\partial E_2}{\partial \mu'} = -n'y'; \\ \frac{\partial E_2}{\partial \nu} = nz, \quad \frac{\partial E_2}{\partial \nu'} = -n'z'; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_3}{\partial y} = -n\mu, \quad \frac{\partial E_3}{\partial \mu'} = -n'y'; \\ \frac{\partial E_3}{\partial z} = -n\nu, \quad \frac{\partial E_3}{\partial \nu'} = -n'z'; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_4}{\partial \mu} = ny, \quad \frac{\partial E_4}{\partial y'} = n'\mu'; \\ \frac{\partial E_4}{\partial \nu} = nz, \quad \frac{\partial E_4}{\partial z'} = n'\nu'. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Здесь n и n' — показатели преломления в пространстве предметов изображений.

Аберрационные потенциалы

Под аберрационным потенциалом понимается функция, частные производные которой по ее аргументам равны соответствующим аберрациям.

Координатные плоскости могут быть совмещены с плоскостями предмета и изображения или входного и выходного зрачка. В последних располагаются координатные системы omM и $o'm'M'$.

Потенциал аберраций объектива P_1 определим равенством

$$P_1(y,\ z,\ \mu',\ \nu') = -\frac{1}{n'}E_3(y,\ z,\ \mu',\ \nu') - (y\mu' + z\nu')\,\bar{\beta}. \tag{8}$$

Частные производные от P_1 по аргументам равны

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial \mu'} = y' - \bar{\beta}y = \delta y', \quad \frac{\partial P_1}{\partial \nu'} = z' - \bar{\beta}z = \delta z, \\ \frac{\partial P_1}{\partial y'} = \frac{n}{n'}\mu - \bar{\beta}\mu', \quad \frac{\partial P_1}{\partial z} = \frac{n}{n'}\nu - \bar{\beta}\nu'. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Если $\bar{\beta}$ совпадает с β — линейным увеличением, то, приняв во внимание известное соотношение между угловым увеличением α и β

$$\beta = \frac{1}{\alpha}\frac{n}{n'},$$

найдем из последних двух равенств (9)

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial P_1}{\partial y} = \alpha\mu - \mu', \quad \frac{1}{\beta}\frac{\partial P_1}{\partial z} = \alpha\nu - \nu'. \tag{10}$$

Для потенциала аберраций телескопической системы установим равенство

$$P_2(\mu, \nu, m', M') = \frac{1}{n'}E_4(\mu, \nu, m', M') - (m'\mu + M'\nu)\,\Gamma. \tag{11}$$

Мы заменили y' и z' соответственно m' и M', совместив координатную плоскость с плоскостью выходного зрачка.

Частные производные от P_2 равны

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial P_2}{\partial\mu} = \frac{n}{n'}m - m'\Gamma, \quad \frac{\partial P_2}{\partial\nu} = \frac{n}{n'}M - M'\Gamma, \\ &\frac{\partial P_2}{\partial m'} = \mu' - \Gamma\mu = \delta\mu', \quad \frac{\partial P_2}{\partial M'} = \nu' - \Gamma\nu = \delta\nu'. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Наконец, потенциал аберраций окуляра определим формулой

$$P_3(y, z, m', M') = \frac{1}{n'}E_1(y, z, m', M') + \frac{ym' + zM'}{f'}. \tag{13}$$

В (13) y' и z' заменены на m' и M' в знак того, что координатная плоскость в пространстве изображений совмещена с выходным зрачком.

Частные производные от P_3 равны

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial P_3}{\partial m'} = \mu' + \frac{y}{f'} = \delta\mu', \quad \frac{\delta P_3}{\partial M'} = \nu' + \frac{y}{f'} = \delta\nu', \\ &\frac{\partial P_3}{\partial y} = -\frac{n}{n'}\mu + \frac{m'}{f'}, \quad \frac{\partial P_3}{\partial z} = -\frac{n}{n'}\nu + \frac{M'}{f'}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Формулы (9), (12), (14), подтверждают, что P_1, P_2 и P_3 являются аберрационными потенциалами в соответствии с принятыми определениями.

Дифференциальные законы геометрической оптики

Из известного положения о том, что для широкого класса функций величина смешанной производной не зависит от порядка дифференцирования, получаем ряд формул. Из (9) следует, что

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\delta y'}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{n}{n'}\mu - \beta\mu'\right)}{\partial\mu'} = \frac{\partial\varkappa_1}{\partial\mu'}, \\ &\frac{\partial\delta y'}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{n}{n'}\nu - \beta\nu'\right)}{\partial\nu'} = \frac{\partial\varkappa_2}{\partial\nu'}, \\ &\frac{\partial\delta z'}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{n}{n'}\mu - \beta\mu'\right)}{\partial\nu'} = \frac{\partial\varkappa_3}{\partial\nu'}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Практический смысл формулы (15) заключается в том, что на основании расчета хода лучей из точки предмета с координатами y и z можно вычислить производные от аберраций $\delta y'$ и $\delta z'$ по этим координатам. Действительно, рассчитав пучок лучей при фиксированных y, z и ν, мы можем найти χ_1 для ряда значений μ' и затем численно или графически вычислить значения

$$\frac{\partial\left(\frac{n}{n'}\mu-\beta\mu'\right)}{\partial\mu'}=\frac{\partial\varkappa_1}{\partial\mu'}=\frac{\partial\delta y'}{\partial y}$$

для нужных значений μ'. Соотношения (15) вполне аналогичны условию изопланазии с той разницей, что последнее определяет $\frac{\partial\delta y'}{\partial y}$ для лучей, пересекающих выходной зрачок в точке с заданной координатой, а по формуле (15), вычисляется та же величина, но для фиксированного значения μ'.

Из (12) следует для телескопической системы

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial m\partial\mu}=\frac{\partial\delta\mu'}{\partial\mu}=\frac{\partial\left(\frac{n}{n'}m-m'\Gamma\right)}{\partial m'} \tag{16}$$

или

$$d\delta\mu'=\frac{\partial\left(\frac{n}{n'}m-m'\Gamma\right)}{\partial m'}d\mu_1. \tag{17}$$

Смысл (16) заключается в том, что, рассчитав через телескопическую систему пучок параллельных лучей, направляющий косинус которых равен μ, а координаты точек пересечения лучей с плоскостью входного зрачка m, мы можем определить и вычислить величину $\frac{n}{n'}m-m'\Gamma$, после чего графически найти значения $\frac{\partial\left(\frac{n}{n'}m-m'\Gamma\right)}{\partial m'}$ и величину $d\delta\mu'$, т. е. изменение аберраций при изменении угла поля зрения и при фиксированном значении m', M' и ν. Подобным же образом можно вычислить приращение.

Из формул (14) тем же приемом находим

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial P_3}{\partial m'\partial y}=\frac{\partial\delta\mu'}{\partial y}=-\frac{\partial\left(\frac{n}{n'}\mu-\frac{m'}{f'}\right)}{\partial m'}\\&\text{или}\\&d\delta\mu'=\frac{-\partial\left(\frac{n}{n'}\mu-\frac{m'}{f'}\right)}{\partial m'}dy.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Таким образом, рассчитав из точки фокальной плоскости окуляра или лупы пучок лучей с направляющими косинусами $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$, мы можем найти сооответствующие им значения m' и вычислить величину $\frac{n}{n'}\mu-$ $-\frac{m'}{f'}=\varkappa_5$, графически определить $\frac{\partial\varkappa_5}{\partial m'}$, а следовательно, приращение аберрации $\delta\mu'$ при изменении координаты y вершины пучка лучей, лежащей в первой фокальной плоскости.

Постоянство величины $\frac{n}{n'}m-m'\Gamma=\varkappa_4$ и $\frac{n}{n'}\mu-\frac{m'}{f'}=\varkappa_5$ при изменении m' обеспечивает равенство нулю соответственно производных $\frac{\partial\delta\mu'}{\partial\nu}$ и $\frac{\partial\delta\mu'}{\partial y}$, т. е. неизменность аберраций при переходе к близкой точке в поле зрения. Если исходной точкой является точка на оси оптической системы, то для постоянства аберраций в пределах малой окрестности осевой точки величина $\chi_1=\chi_2=\chi_3=\chi_4=\chi_5=0$.

Найденные условия $\chi_1=\mathrm{const}$; $\chi_2=\mathrm{const}$; $\chi_3=\mathrm{const}$ и т. д. являются условиями изопланазии (постоянства аберраций для окрестности точки поля зрения) соответственно для объектива, телескопической системы, лупы или окуляра. Вывод этих условий для телескопической системы и окуляра является практической целью работы.

Литература

[1] K. Schwarzschild. Untersuchungen zur geometrischen Optik. Göttingen, 1905.
[2] А. И. Тудоровский. Теория оптических приборов. Изд. АН СССР, 1948.

Поступило в редакцию 14 июля 1969 г.