Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 3(36), 2006

УДК 512.542

Классы конечных групп, замкнутые относительно произведения обобщенно субнормальных подгрупп взаимно простых индексов

В. Н. Семенчук, О. А. Мокеева

Задача конструирования и классификации насыщенных формаций занимает одно из центральных мест в исследованиях по теории классов конечных групп. В настоящее время реализация этой задачи идет в основном по пути выделения и описания различных типов насыщенных формаций, важных для приложений.

Классический результат Фиттинга говорит о том, что класс нильпотентных групп $\mathfrak{N}$ замкнут относительно взятия субнормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп. С развитием теории формаций стали рассматривать формации Фиттинга, т. е. формации $\mathfrak{F}$, которые замкнуты относительно взятия субнормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. В работе [1] Хоуксом была поставлена проблема об описании разрешимых наследственных формаций Фиттинга. Полное решение данной проблемы было получено В. Н. Семенчуком в работах [2, 3].

В теории формаций понятие субнормальности обобщается следующим образом.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппу K группы G называют $\mathfrak{F}$-*субнормальной*, если либо $K = G$, либо существует максимальная цепь

$$G = K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_n = K$$

такая, что $(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq K_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Развивая подход Хоукса, Л. А. Шеметков предложил изучать формации $\mathfrak{F}$, замкнутые относительно произведений $\mathfrak{F}$-субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. В Коуровской тетради [4] Л. А. Шеметков поставил проблему о классификации насыщенных наследственных формаций $\mathfrak{F}$ с тем свойством, что любая группа $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы, принадлежит $\mathfrak{F}$. В настоящее время такие формации называют *сверхрадикальными* формациями. Изучению таких формаций было посвящено много работ как у нас в стране, так и за рубежом. Полное решение проблемы Л. А. Шеметкова в классе разрешимых групп было получено В. Н. Семенчуком в работе [5].

Хорошо известно, что формация всех сверхразрешимых групп не замкнута относительно произведения нормальных сверхразрешимых подгрупп, но замкнута относительно произведения нормальных сверхразрешимых подгрупп взаимно простых индексов. В связи с этим проблему Л. А. Шеметкова можно сформулировать следующим образом.

Проблема. Классифицировать насыщенные наследственные формации $\mathfrak{F}$ с тем свойством, что любая группа $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы взаимно простых индексов,принадлежит $\mathfrak{F}$.

Именно изучению таких формаций посвящена настоящая работа. В работе, в классе конечных разрешимых групп, получено решение отмеченной выше проблемы, а также доказано, что любая разрешимая наследственная 2-кратно локальная формация $\mathfrak{F}$, удовлетворяющая сформулированной проблеме является сверхрадикальной.

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется *2-кратно локальной*, если она имеет локальный экран f такой, что $f(p)$ — насыщенная формация для любого простого числа p из $\pi(\mathfrak{F})$.

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы. Все необходимые определения и обозначения можно найти в монографии [6].

В следующей лемме приводятся известные свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H — подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G;

2) если H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, K — подгруппа группы G, то $H \cap K$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в K;

3) если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в K, а K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;

4) если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, а N — нормальная подгруппа из G, то HN — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа из G;

5) если $H \supseteq N$, где N — нормальная подгруппа группы G, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G тогда и только тогда, когда H/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N.

Напомним, что через $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$ обозначают *множество всех минимальных не $\mathfrak{F}$-групп*, т. е. групп, не принадлежащих некоторому классу групп $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{F}$.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, G принадлежит $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$ и имеет нормальную силовскую p-подгруппу $G_p \neq 1$ для некоторого простого числа p. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $G_p = G^{\mathfrak{F}}$;

2) $G_{p'} \cap C_G(G_p/\Phi(G_{p'})) = \Phi(G) \cap \Phi(G_{p'}) = \Phi(G) \cap G_{p'}$, где $G_{p'}$ — любое дополнение к G_p в G.

Доказательство. Так как $G_{p'} \in \mathfrak{F}$, то $G/G_p \in \mathfrak{F}$, а значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_p$. Так как $\Phi(G_p) \subseteq \Phi(G)$ и формация $\mathfrak{F}$ насыщенная, то $G^{\mathfrak{F}}$ не содержится в $\Phi(G_p)$. Так как $G_p/\Phi(G_p)$ — элементарная группа, то по теореме 11.3 из [6] $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G_p)/\Phi(G_p)$ обладает G-допустимым дополнением $C/\Phi(G_p)$ в $G_p/\Phi(G_p)$. Тогда $G^{\mathfrak{F}}C = G_p$, $C \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G_p)$. Если $G^{\mathfrak{F}} \neq G_p$, то $G_{p'}G^{\mathfrak{F}}$ отлична от G и , значит, принадлежит $\mathfrak{F}$. Но тогда, ввиду равенства $G_{p'}G^{\mathfrak{F}}C = G$, имеем

$$G/C \cong G_{p'}G^{\mathfrak{F}}/C \cap G_{p'}G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F},$$

отсюда следует $G^{\mathfrak{F}} \subseteq C$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G_p)$. Тем самым доказано, что $G^{\mathfrak{F}} = G_p$.

Докажем 2). Очевидно, что $F(G)/\Phi(G)$ является $\mathfrak{F}$-корадикалом и единственной минимальной нормальной подгруппой группы $G/\Phi(G)$, причем $\Phi(G_p) = G_p \cap \Phi(G)$. Поэтому, ввиду теоремы 7.11 из [6]

$$C_G(G_p\Phi(G)/\Phi(G)) = C_G(G_p/\Phi(G_p)) = G_p\Phi(G).$$

Очевидно,

$$G_{p'} \cap G_p\Phi(G) = G_{p'} \cap \Phi(G).$$

Если $G_{p'} = H(G_{p'} \cap \Phi(G))$, то

$$G = G_pG_{p'} = G_pH(G_{p'} \cap \Phi(G)) = G_pH,$$

отсюда $H = G_{p'}$. Значит,

$$G_{p'} \cap \Phi(G) = \Phi(G_{p'}) \cap \Phi(G).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, $\mathfrak{H}$ — наследственная насыщенная формация. Если $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}\mathfrak{F}$ и $G/K \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, где $K \subseteq \Phi(G)$, то $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}\mathfrak{F}$. Очевидно, что $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа. Очевидно, что $G^{\mathfrak{H}}K/K \subseteq G^{\mathfrak{F}}K/K$. По лемме 4.4 из [6] $G^{\mathfrak{H}} = P \times Q$, где P — p-группа, Q — q-группа и $Q \subseteq \Phi(G)$. Так как

$$PQ/P \subseteq \Phi(G/P) \text{ и } G/P/PQ/P \in \mathfrak{H},$$

то $G/P \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{H}}$ — p-группа. Пусть L/N — G-главный фактор K. Если L/N — p'-группа, то L/N — $\mathfrak{H}$-централен.

Пусть L/N — p-группа. Очевидно, что $F(G) = G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)$. Пусть $C = C_G(L/N)$ и M — произвольная $\mathfrak{H}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G. Тогда $G = MC$. Так как $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, то $\Phi(G) = Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$. Следовательно, $G/C \in f(p)$. Так как

$$G/C = MC/C \simeq M/M \cap G,$$

то $M/C_M(L/K) \in f(p)$. Учитывая, что

$$G/\Phi(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathcal{M}(\mathfrak{H})$$

то

$$M/\Phi(G) \in \mathcal{M}(f(p)) \cap \mathcal{M}(h(p)),$$

где f, h — максимальные внутренние локальные экраны, соответственно $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$. Если

$$\Phi(G) \not\subseteq \Phi(M), \text{ то } C_M(L/N) \subseteq \Phi(M).$$

Отсюда и из того, что

$$M/C_M(L/N) \in f(p), M/\Phi(G) \in \mathcal{M}(f(p)) \cap \mathcal{M}(h(p)),$$

следует $M/C_M(L/N) \in h(p)$. А это значит, что L/N — $\mathfrak{H}$-централен.

Пусть $\Phi(G) \subseteq \Phi(M)$. Так как $\mathfrak{H}$ насыщенная формация и $M/\Phi(G) \in \mathfrak{H}$, то $M \in \mathfrak{H}$. Следовательно, M — $\mathfrak{H}$-нормализатор группы G. Так как M покрывает L/N, то L/N — $\mathfrak{H}$-централен. Итак, $K \subseteq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$. Тогда $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) формация $\mathfrak{F}$ содержит любую группу $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы и индексы $|G : A|$, $|G : B|$ взаимно просты;

2) любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа G либо бипримарная p-замкнутая ($p \in \pi(G)$), либо группа простого порядка.

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2).

Пусть G — произвольная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Предположим, что $G \notin \mathfrak{S}_\pi$, где $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ — характеристика формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что G — группа простого порядка. Пусть $|\pi(G)| > 1$. Тогда существует простое число $q \in \pi(G)$, $q \notin \pi(\mathfrak{F})$. Так как $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, то $G_q \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Итак, G — примарная q-группа. Так как $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, то, очевидно, что $|G| = q$.

Пусть теперь $G \in \mathfrak{S}_\pi \cap \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Рассмотрим случай, когда $\Phi(G) = 1$.

Покажем, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N. Предположим противное. Тогда G содержит, по крайней мере, две минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2. Так как $\Phi(G) = 1$, то в группе G найдутся максимальные подгруппы M_1 и M_2 такие, что

$$G = N_1 \leftthreetimes M_1, G = N_2 \leftthreetimes M_2.$$

Так как M_1 и M_2 принадлежат $\mathfrak{F}$, $G/N_1 \simeq M_1$, $G/N_2 \simeq M_2$, то $G/N_1 \in \mathfrak{F}$, $G/N_2 \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то $G = G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $G = N \leftthreetimes M$, где N — единственная минимальная нормальная p-подгруппа группы G.

Покажем, что M — примарная q-группа, где $q \neq p$. Предположим, что существуют простые числа $q, r \in \pi(M)$, где $r \neq p$. Тогда в M найдутся максимальные подгруппы H и K такие, что $|M : H|$ — q-число, $|M : K|$ — r-число. Рассмотрим подгруппы NH и NK. Очевидно, что индексы $|G : NH|$ и $|G : NK|$ взаимно просты. Так как $G/N \in \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$, то $N = G^{\mathfrak{F}}$. Согласно лемме 1 подгруппы NH и NK $\mathfrak{F}$-субнормальны в G. Так как G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, NH и NK — собственные подгруппы группы G, то $NH \in \mathfrak{F}$ и $NK \in \mathfrak{F}$. Так как $G = NH \cdot NK$, то согласно условию $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Покажем, что M — q-группа, где $q \neq p$. Предположим, что $\pi(M) = \{p, q\}$. Так как $N = G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_p$, то согласно лемме 1 G_p — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Рассмотрим подгруппу NG_q. Так как NG_q — собственная подгруппа G и $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, то $NG_q \in \mathfrak{F}$. Согласно лемме 1 NG_q — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа G. Очевидно, что G_q — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа NG_q. По лемме 1 G_q — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Так как $(|G : G_q|, |G : G_p|) = 1$, то из $G = G_pG_q$ и условия теоремы следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, M — q-группа. Тогда G — бипримарная p-замкнутая группа, где $p \in \pi(G)$.

Пусть $\Phi(G) \neq 1$. Рассмотрим фактор-группы $G/\Phi(G)$. Так как $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$, то как показано выше $G/\Phi(G)$ — бипримарная p-замкнутая группа. Отсюда следует, что G — бипримарная p-замкнутая группа.

Покажем, что из 2) следует 1).

Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G взаимно простых индексов, то $G \notin \mathfrak{F}$. Так как G — разрешимая группа и $G = AB$, где $(|G : A|, |G : B|) = 1$, то согласно теореме Хоукса $G = TL$, где T, L — холловские подгруппы группы G, $T \cap L = 1$ и $T \subseteq A^x$, $L \subseteq B^y$, где x, y — некоторые элементы группы G.

Пусть H — собственная подгруппа группы G. Покажем, что $H \in \mathfrak{F}$. Так как H — разрешимая группа, то согласно теореме Хоукса $H = H_1H_2$, где $H_1 \subseteq T^z$, $H_2 \subseteq L^t$, где z, t — некоторые элементы из H. Согласно лемме 1 A^x, A^y — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G. Так как $A^x \in \mathfrak{F}$ и $A^y \in \mathfrak{F}$, а $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то T и L — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы A^x и A^y соответственно. Согласно лемме 1 нетрудно показать , что H_1 и H_2 — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G, а значит согласно лемме 1 и в H. Так как $|H| < |G|$, то, по индукции, получаем, что $H \in \mathfrak{F}$. А это значит, что G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа.

Если G — группа простого порядка, то ее нельзя представить в виде произведения собственных подгрупп взаимно простых индексов.

Пусть G — бипримарная группа. Тогда $G = G_p \leftthreetimes G_q$. Согласно лемме 2 $G_p = G^{\mathfrak{F}}$. А это значит, что все подгруппы группы G содержащие G_q $\mathfrak{F}$-абнормальны, т. е. группа G не представима в виде произведения собственных $\mathfrak{F}$-субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп взаимно простых индексов. Получили противоречие. Теорема доказана.

В работе [9] В. Н. Семенчуком было получено описание насыщенных наследственных формаций $\mathfrak{F}$, критические группы (минимальные не $\mathfrak{F}$-группы) которых бипримарны и p-замкнуты.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — 2-кратно локальная наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) формация $\mathfrak{F}$ содержит любую группу $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G взаимно простых индексов;

2) любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа — либо группа Шмидта, либо группа простого порядка;

3) формация $\mathfrak{F}$ содержит любую группу $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G ;

4) $\mathfrak{F} = \bigcap_{i,j \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}\mathfrak{S}_{\pi_j}$.

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2).

Пусть G — произвольная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Рассмотрим случай, когда $\Phi(G) = 1$. Как и в теореме 1, можно показать, что либо G — группа простого порядка q, где $q \notin \pi(\mathfrak{F})$, либо $G = G_p \leftthreetimes G_q$, где p и q из $\pi(\mathfrak{F})$. А также нетрудно показать, что $G_p = G^{\mathfrak{F}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. А это значит, что $C_G(G_p) = G_p$. Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Если $G/G_p \in f(p)$, то из полноты экрана f следует, что $G \in \mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$. Так как f — внутренний экран, то $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. А это значит, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Итак, $G/G_p \simeq G_q \notin f(p)$.

Покажем, что $|G_q| = q$. Предположим, что это не так. Тогда в G_q найдется неединичная собственная подгруппа K. Рассмотрим подгруппу G_pK. Так как G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа и G_pK — собственная подгруппа G, то $G_pK \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $F_p(G_pK) = G_p$. Если это не так, то в G_pK существует неединичная нормальная q-подгруппа T. Тогда $T \subseteq C_G(G_p)$. Так как $C_G(G_p) = G_p$, то $T \subseteq G_p$, что невозможно. Согласно лемме 4.5 из [6] $G_pK/F_p(G_pK) \in f(p)$. Отсюда $G_pK/G_p \in f(p)$. Так как $G_pK/G_p \simeq K/G_p \cap K = K$, то $K \in f(p)$. А это значит, что $q \in \pi(f(p))$. Так как $f(p)$ — локальная формация, то $\mathfrak{N}_q \in f(p)$. Следовательно, $G_q \in f(p)$, что невозможно. Итак, $|G_q| = q$. А это значит, что G — группа Шмидта. Итак, мы показали, что $G/\Phi(G)$ — группа Шмидта. По лемме 3 G — группа Шмидта.

Тот факт, что из 2) $\Rightarrow$ 3)$\Rightarrow$ 4)$\Rightarrow$ 1) следует из результатов работы [5]. Теорема доказана.

Abstract. The paper is devoted to studying hereditary saturated solvable formations $\mathfrak{F}$ such that any group $G = AB$, where A and B are $\mathfrak{F}$-subnormal $\mathfrak{F}$-subgroups and $(|G : A|, |G : B|) = 1$, belongs to $\mathfrak{F}$.

Литература

1. T. Hawkes. On Fitting formations, Math. Z., **117** (1970), 177–182.

2. В. Н. Семенчук. Разрешимые тотально локальные формации, Сибир. мат. журн., **36**, № 4 (1995), 861–872.

3. В. Н. Семенчук. О разрешимых тотально локальных формациях, Вопросы алгебры, Гомель, № 11 (1997), 109–115.

4. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь, Новосибирск, Институт математики СО АН СССР, 1992.

5. В. Н. Семенчук. Разрешимые $\mathfrak{F}$-радикальные формации, Математические заметки, **59**, № 2 (1996), 261–266.

6. Л. А. Шеметков. Формации конечных групп, Наука, Москва, 1978.

7. В. Н. Семенчук. Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы, Алгебра и логика, **18**, № 3 (1979), 348–382.

8. В. Н. Семенчук. Описание разрешимых минимальных не $\mathfrak{F}$-групп для произвольной тотально локальной формации, Математические заметки, **43**, № 4 (1988), 452–459.

9. В. Н. Семенчук. Классификация локальных наследственных формаций критические группы которых бипримарны, Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины, Вопросы алгебры, **1**, № 1 (15) (1999), 153–162.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 14.04.06