Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 3(36), 2006

УДК 512.542

Критические неоднопорожденные тотально Ω-канонические формации конечных групп

В. А. Ведерников, В. Е. Егорова

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс алгебр. При исследовании свойств $\mathfrak{X}$-алгебр существенную роль играют критические $\mathfrak{X}$-алгебры, то есть $\mathfrak{X}$-алгебры, не обладающие некоторым свойством θ, все собственные $\mathfrak{X}$-подалгебры которых этим свойством обладают. В работе [1] исследованы неоднопорожденные тотально локальные формации конечных групп, все собственные тотально локальные подформации которых однопорождены. Установлено, что каждая такая формация совпадает с классом всех конечных π-групп, где $\pi = \{p, q\}$ для некоторых различных простых чисел p и q. В тезисах [2] и [3] подобный результат был анонсирован для критических тотально локальных классов Фиттинга конечных групп. В классе конечных разрешимых групп понятия локальной и канонической формаций совпадают [4], однако в неразрешимом случае - это различные понятия.

Цель настоящей работы — дать полное описание строения критических неоднопорожденных тотально канонических формаций конечных групп.

В работе рассматриваются лишь конечные группы, применяемые обозначения и определения стандартны, их можно найти в книгах [5] — [8] и статьях [4], [9]. Отметим лишь некоторые из них. Обозначим через $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{I}$ — класс всех конечных групп и класс всех конечных простых групп соответственно. Пусть Ω — непустой подкласс из $\mathfrak{I}$. Обозначим через $\delta(\Omega)$ — мощность множества всех попарно неизоморфных групп из Ω. Полагаем $\delta(\varnothing) = 0$. Пусть $G \in \mathfrak{E}$. Обозначим через $K(G)$ — класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G. Если $K(G) \subseteq \Omega$, то G называется Ω-группой. Обозначим через $\mathfrak{E}_\Omega$ — класс всех Ω-групп, полагаем, что $1 \in \mathfrak{E}_\Omega$. Пусть A — простая группа. Обозначим через $\mathfrak{N}_A$ — класс Фиттинга, порожденный группой A. Если $A \simeq Z_p$, то $\mathfrak{N}_A = \mathfrak{N}_p$ — класс всех конечных p-групп. Если A — простая неабелева группа, то $\mathfrak{N}_A$ состоит лишь из единичных групп и конечных прямых произведений групп, изоморфных группе A. Отметим, что $\mathfrak{N}_A$ является формацией Фиттинга. Обозначим через $\mathfrak{N}_\Omega = \times_{A\in\Omega}\mathfrak{N}_A = (\mathrm{B}_1 \times \mathrm{B}_2 \times \cdots \times \mathrm{B}_n : B_i \in \mathfrak{N}_A$ для некоторого $\mathrm{A} \in \Omega, i \in \{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N})$. Пусть $\mathfrak{E}_A = \mathfrak{E}_{(A)}$ — класс всех групп у которых каждый композиционный фактор изоморфен группе A и $\mathfrak{D}_\Omega = \times_{A\in\Omega}\mathfrak{E}_A$. Все рассматриваемые функции принимают одинаковые значения на изоморфных группах из их области определения. Функция $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{$формации групп$\}$ называется ΩF-функцией; функция $g : \mathfrak{I} \to \{$формации групп$\}$ называется F-функцией. Формация $\Omega F(f, \varphi) = (G : G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $\mathrm{A} \in \Omega \cap K(G))$ называется Ω-расслоенной формацией с Ω-спутником f и с направлением φ. Формация $F(g, \varphi) = (G : G/G_{\varphi(A)} \in g(A)$ для всех $\mathrm{A} \in K(G))$ называется расслоенной формацией со спутником g и с направлением φ. Отметим, что Ω-расслоенная формация с направлением φ_0 называется Ω-свободной формацией, где $\varphi_0(A) = \mathfrak{E}_{A'}$ для любого $\mathrm{A} \in \mathfrak{I}$. Формация $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ называется Ω-канонической или, коротко, ΩK-формацией, если $\varphi(A) = \mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{E}_A$ для любого $\mathrm{A} \in \mathfrak{I}$, и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega KF(f) = (G : G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/O_{A',A}(G) \in f(A)$ для всех $\mathrm{A} \in \Omega \cap K(G))$, а f называется ΩK-спутником формации $\mathfrak{F}$. Пусть f — F-функция. Формация $\mathfrak{F} = KF(f) = (G : G/O_{A',A}(G) \in f(A)$ для всех $\mathrm{A} \in K(G))$ называется канонической формацией с K-спутником f [4].

Лемма 1. *a)* $\mathfrak{E}_A = \cup_{n\in\mathbf{N}}(\mathfrak{N}_A)^n$;

b) $\mathfrak{E}_\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}}(\mathfrak{N}_\Omega)^n = \cup_{n\in\mathbf{N}}(\mathfrak{D}_\Omega)^n$.

Доказательство. a) Пусть $\mathfrak{F} = \cup_{n\in\mathbf{N}}(\mathfrak{N}_A)^n$. Так как $(\mathfrak{N}_A)^n \subseteq \mathfrak{E}_A$ для любого $n \in \mathbf{N}$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}_A$. Допустим, что $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{E}_A$. Тогда существует $G \in \mathfrak{E}_A \backslash \mathfrak{F}$. Пусть G — группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда G — монолитическая группа с монолитом M. Пусть M — элементарная A-группа и значит, $\mathrm{M} \in \mathfrak{N}_A$. Так как $G/M \in \mathfrak{F}$, то $G/M \in (\mathfrak{N}_A)^n$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$. Тогда $G \in (\mathfrak{N}_A)(\mathfrak{N}_A)^n = (\mathfrak{N}_A)^{n+1} \subseteq \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_A$.

b) Пусть $\mathfrak{Y} = \cup_{n\in\mathbf{N}}(\mathfrak{N}_\Omega)^n$. Так как $(\mathfrak{N}_\Omega)^n \subseteq \mathfrak{E}_\Omega$ для любого $n \in \mathbf{N}$, то $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{E}_\Omega$. Допустим, что $\mathfrak{Y} \neq \mathfrak{E}_\Omega$. Тогда существует $G \in \mathfrak{E}_\Omega \backslash \mathfrak{Y}$. Пусть G — группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда G — монолитическая группа с монолитом M, причем M — элементарная A-группа для некоторого $\mathrm{A} \in \Omega$. Так как $G/M \in \mathfrak{Y}$, то $G/M \in (\mathfrak{N}_\Omega)^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $G \in (\mathfrak{N}_\Omega)(\mathfrak{N}_\Omega)^n = (\mathfrak{N}_\Omega)^{n+1} \subseteq \mathfrak{Y}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{E}_\Omega = \mathfrak{Y}$. Аналогично доказывается, что $\mathfrak{E}_\Omega = \cup_{n\in\mathbf{N}}(\mathfrak{D}_\Omega)^n$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп и $\varphi_0 \leq \varphi$. Тогда тотально Ω-расслоенная формация $\mathfrak{F} = \Omega F_\infty(\mathfrak{X}, \varphi)$ обладает единственным минимальным тотально Ω-расслоенным спутником f таким, что $f(\Omega') = \Omega F_\infty((G/O_\Omega(G) : G \in \mathfrak{X}), \varphi)$, $f(A) = \Omega F_\infty((G/G_{\varphi(A)} : G \in \mathfrak{X}), \varphi)$ для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \backslash K(\mathfrak{X})$.*

Доказательство. Так как множество $\mathfrak{E}$ является тотально Ω-расслоенной формацией с направлением φ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}$, то формация $\mathfrak{F} = \Omega F_\infty(\mathfrak{X}, \varphi)$ существует, и значит, множество L всех тотально Ω-расслоенных спутников формации $\mathfrak{F}$ непусто. Пусть f_1 — пересечение всех элементов из L. По лемме 5 [4] $\mathfrak{F} = \Omega F(f_1, \varphi)$. Применяя лемму 5 [4] и индукцию по n, нетрудно доказать, что пересечение тотально Ω-расслоенных формаций является тотально Ω-расслоенной формацией. Следовательно, f_1 — тотально Ω-расслоенный спутник формации $\mathfrak{F}$, причем f_1 является единственным минимальным тотально Ω-расслоенным спутником формации $\mathfrak{F}$ в силу своего строения и $\mathfrak{F} = \Omega F_\infty(f_1, \varphi)$.

Пусть f — ΩF-функция из заключения теоремы. Покажем, что $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$. Пусть $M \in \mathfrak{X}$. Тогда $M/O_\Omega(M) \in f(\Omega')$ и $M/O_{\varphi(A)}(M) \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(M)$. Таким образом, $M \in \Omega F(f, \varphi)$ и $\mathfrak{X} \subseteq \Omega F(f, \varphi)$. Поскольку спутник f является тотально Ω-расслоенным, то формация $\Omega F(f, \varphi)$ — тотально Ω-расслоенная формация с направлением φ и $\mathfrak{F} = \Omega F_\infty(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \Omega F(f, \varphi)$.

Покажем, что $\Omega F(f, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$. Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то $K(\mathfrak{X}) \subseteq K(\mathfrak{F})$. Тогда найдется такая группа $H \in \mathfrak{F}$, что $A \in \Omega \cap K(H)$. Поэтому $H/O_{\varphi(A)}(H) \in f_1(A)$ и $f_1(A) \neq \varnothing$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F} = \Omega F_\infty(f_1, \varphi)$ следует, что $G/O_\Omega(G) \in f_1(\Omega')$ и значит, $f(\Omega') \subseteq f_1(\Omega')$. Если $A \in \Omega \cap K(G)$, то $G/O_{\varphi(A)}(G) \in f_1(A)$. Пусть $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{X})) \backslash K(G)$. Тогда $G \in \mathfrak{E}_{A'} = \varphi_0(A) \subseteq \varphi(A)$ и $G/O_{\varphi(A)}(G) = 1 \in f_1(A)$. Таким образом, $f(A) = \Omega F_\infty((G/O_{\varphi(A)}(G) : G \in \mathfrak{X}), \varphi) \subseteq f_1(A)$. Если $A \in \Omega \backslash K(\mathfrak{X})$, то $f(A) = \varnothing \subseteq f_1(A)$. Следовательно, $f \leq f_1$ и $\Omega F(f, \varphi) \subseteq \Omega F(f_1, \varphi) = \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$, и значит, $f \in L$. Поскольку f_1 — единственный минимальный тотально Ω-расслоенный спутник формации $\mathfrak{F}$, то из $f \leq f_1$ следует, что $f = f_1$. Лемма доказана.

Следствие 2.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда тотально Ω-каноническая формация $\mathfrak{F} = \Omega KF_\infty(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным тотально Ω-каноническим спутником f таким, что $f(\Omega') = \Omega KF_\infty(G/O_\Omega(G) : G \in \mathfrak{X})$, $f(A) = \Omega KF_\infty(G/O_{A',A}(G) : G \in \mathfrak{X})$ для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \backslash K(\mathfrak{X})$.*

Следствие 2.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп и $\mathfrak{F} = \Omega F_\infty(\mathfrak{X}, \varphi)$ — тотально Ω-расслоенная формация с направлением φ, где $\varphi_0 \le \varphi$. Тогда $K(\mathfrak{F}) = K(\mathfrak{X})$.*

Лемма 3 [9, Теорема 2]. *Пусть f — внутренний Ω-спутник ΩK-формации $\mathfrak{F}$. Тогда ΩK-формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний Ω-спутник h, причем $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $h(A) = \mathfrak{E}_A h(A) = \mathfrak{E}_A f(A)$ для любого $\mathrm{A} \in \Omega$.*

Лемма 4 [9, Следствие 4]. *Пусть m и h — внутренние Ω-спутники $\Omega\mathrm{K}_n$-формаций (ΩK_∞-формаций) $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Тогда формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ является $\Omega\mathrm{K}_n$-формацией (ΩK_∞-формацией) с внутренним Ω-спутником f таким, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(A) = m(A) \circ \mathfrak{H}$ для всех $\mathrm{A} \in K(\mathfrak{M}) \cap \Omega$ и $f(A) = h(A)$ для всех $\mathrm{A} \in \Omega \backslash K(\mathfrak{M})$.*

Лемма 5. *Тогда и только тогда тотально каноническая формация $\mathfrak{F}$ однопорождена, когда $\delta(\mathrm{K}(\mathfrak{F})) \in \mathbf{N_0} = \mathbf{N} \cup \{0\}$ и $\mathfrak{F}$ имеет такой внутренний тотально канонический спутник f, что $f(\mathrm{A})$ — однопорождённая тотально каноническая формация для любого $\mathrm{A} \in K(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F} = KF_\infty(G)$ — однопорожденная тотально каноническая формация и f — минимальный тотально канонический спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда по лемме 2 $f(A) = KF_\infty(G/O_{A',A}(G))$ для любого $\mathrm{A} \in K(\mathfrak{F})$ и $f(A) = \varnothing$ для любого $\mathrm{A} \in \mathfrak{I} \backslash K(\mathfrak{F})$. По следствию 2.2 $K(\mathfrak{F}) = K(G)$ и значит, $\delta(\mathrm{K}(\mathfrak{F})) \in \mathbf{N}_0$, и $f(\mathrm{A})$ — однопорожденная тотально каноническая формация для любого $\mathrm{A} \in \mathrm{K}(\mathfrak{F})$.

Достаточность. Путь $\delta(\mathrm{K}(\mathfrak{F})) \in \mathbf{N_0}$ и $\mathfrak{F}$ имеет внутренний тотально канонический спутник f такой, что $f(A)$ — однопорожденная тотально каноническая формация для любого $\mathrm{A} \in K(\mathfrak{F})$. Пусть $K(\mathfrak{F}) = (\mathrm{A}_1) \cup (\mathrm{A}_2) \cup \cdots \cup (\mathrm{A}_r)$ и $f(\mathrm{A}_i) = KF_\infty(B_i), i \in \{1, \ldots, r\}$.

Пусть $C_i = A_i \wr (B_i/O_{A_i}(B_i)), i \in \{1, \ldots, r\}, H = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_r$ и $\mathfrak{H} = KF_\infty(H)$. Покажем, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Пусть h — максимальный внутренний тотально канонический спутник формации $\mathfrak{H}$. Тогда $C_i \in \mathfrak{H}$ для любого $i \in \{1, \ldots, r\}$. Так как $C_i = [\mathrm{K}_i](B_i/O_{A_i}(B_i))$, где K_i — база сплетения и является элементарной A_i — группой, то по лемме 3 $\mathrm{C}_i \in \mathfrak{E}_{A_i} f(A_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть h_0 — минимальный тотально канонический спутник формации $\mathfrak{H}$. Тогда по лемме 2 $C_i/O_{(A_i)',A_i}(G) \simeq B_i/O_{A_i}(B_i) \in h_0(A_i)$. Значит, по лемме 3 $B_i \in \mathfrak{E}_{A_i} h_0(A_i) = h(A_i)$. Таким образом, $f(A_i) = KF_\infty(B_i) \subseteq h(A_i)$ для любого $i \in \{1, \ldots, r\}$. Так как $f \le h$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Из $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ и значит, $\mathfrak{F}$ — однопорожденная тотально каноническая формация. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть Ω — непустой класс простых групп и $\delta(\Omega) \in \mathbf{N}$. Тогда для любого натурального n всякая тотально каноническая подформация формации $(\mathfrak{D}_\Omega)^n$ является однопорожденной.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = (\mathfrak{D}_\Omega)^n$, $\mathfrak{H}$ — тотально каноническая подформация формации $\mathfrak{F}$, f и h являются минимальными тотально каноническими спутниками $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Доказательство проведем индукцией по n.

Пусть $n = 1$ и $\Omega_1 = K(\mathfrak{H})$. Тогда по следствию 2.1 $f(\mathrm{A}) = (1)$ для любого $\mathrm{A} \in \Omega$ и $f(\mathrm{A}) = \varnothing$ для любого $A \in \mathfrak{I} \backslash \Omega$, $\mathfrak{F} = KF(G)$, где $G = \times_{A \in \Omega} A \in \mathfrak{E}$. Аналогично $h(A) = (1)$ для любого $\mathrm{A} \in \Omega_1$ и $h(A) = \varnothing$ для любого $A \in \mathfrak{I} \backslash \Omega_1$, причем $\mathfrak{H} = KF(H)$, где $H = \times_{A \in \Omega_1} A \in \mathfrak{E}$. Пусть утверждение верно для $(\mathfrak{D}_\Omega)^{n-1}$. Так как $\mathfrak{F} = (\mathfrak{D}_\Omega)^n = \mathfrak{D}_\Omega (\mathfrak{D}_\Omega)^{n-1}$, то по лемме 4 $\mathfrak{F}$ имеет такой спутник f_1, что $f_1(A) = (1)(\mathfrak{D}_\Omega)^{n-1}$ для любого $A \in \Omega$ и $f_1(A) = \varnothing$ для любого $\mathrm{A} \in I \backslash \Omega$. Отметим, что f_1 является тотально каноническим спутником $\mathfrak{F}$. Тогда $h(A) \subseteq f(A) \subseteq f_1(A) = (\mathfrak{D}_\Omega)^{n-1}$, $\mathrm{A} \in \Omega$. По предположению индукции $h(A)$ и $f(A)$ являются однопорожденными тотально каноническими формациями для любого $\mathrm{A} \in \Omega$. Тогда по лемме 5 $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ являются однопорожденными тотально каноническими формациями. Лемма доказана.

Применяя лемму 5[4] и следствие 5.1[4], индукцией по n нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 7. *Пусть* $\{\mathfrak{F}_i : i \in I\}$ *— произвольная цепь* n*-кратно* Ω*-расслоенных формаций с направлением* $\varphi \geq \varphi_0$. *Тогда формация* $\mathfrak{F} = \cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ *является* n*-кратно* Ω*-расслоенной формацией с направлением* φ.

Следствие 7.1. *Пусть* $\{\mathfrak{F}_i : i \in I\}$ *— произвольная цепь тотально* Ω*-расслоенных формаций с направлением* $\varphi \geq \varphi_0$. *Тогда* $\mathfrak{F} = \cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ *является тотально* Ω*-расслоенной формацией с направлением* φ.

Лемма 8. *Класс* $\mathfrak{E}_\Omega$ *при* $1 < \delta(\Omega) < \infty$ *является тотально канонической формацией, но не является однопорожденной тотально канонической формацией.*

Доказательство. По лемме 1 $\mathfrak{E}_\Omega = \cup_{n\in N}(\mathfrak{D}_\Omega)^n$. Так как $(\mathfrak{D}_\Omega)^n$ является тотально канонической формацией для любого $n \in \mathbf{N}$, то по следствию 7.1 $\mathfrak{E}_\Omega$, как объединение цепи $(1) \subset \mathfrak{D}_\Omega \subset (\mathfrak{D}_\Omega)^2 \subset \ldots \subset (\mathfrak{D}_\Omega)^n \subset \ldots$, является тотально канонической формацией.

Допустим, что $\mathfrak{E}_\Omega$ — однопорожденная тотально каноническая формация. Тогда найдется такая $G \in \mathfrak{E}_\Omega$, что $\mathfrak{E}_\Omega = KF_\infty(G)$. Так как $\mathfrak{E}_\Omega = \cup_{n\in\mathbf{N}}(\mathfrak{D}_\Omega)^n$, то $G \in (\mathfrak{D}_\Omega)^r$ для некоторого $r \in \mathbf{N}$. Следовательно, $\mathfrak{E}_\Omega = KF_\infty(G) \subseteq (\mathfrak{D}_\Omega)^r$, что невозможно. Поэтому $\mathfrak{E}_\Omega$ не является однопорожденной тотально канонической формацией. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если* $\mathfrak{F}$ *— тотально каноническая формация, все собственные тотально канонические подформации которой однопорождены, то* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}_\Omega$ *и* $\delta(\Omega) \in \mathbf{N_0} = \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Доказательство. Пусть $\Omega = \mathrm{K}(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}_\Omega$. Допустим, что $\delta(\Omega) \notin \mathbf{N_0}$. Пусть $\mathrm{A} \in \Omega$ и $\Omega_1 = \Omega\backslash(\mathrm{A})$. Тогда $\delta(\Omega_1) \notin \mathbf{N_0}$, причем $\mathfrak{D}_{\Omega_1} \subset \mathfrak{D}_\Omega \subseteq \mathfrak{F}$. По условию $\mathfrak{D}_{\Omega_1}$ является однопорожденной тотально канонической подформацией форамции $\mathfrak{F}$, что противоречит лемме 5. Следовательно, $\delta(\Omega) \in \mathbf{N_0}$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть* f *— внутренний* Ω*-спутник* ΩK_∞*-формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда* ΩK_∞*-формация* $\mathfrak{F}$ *имеет единственный максимальный внутренний тотально* Ω*-канонический спутник* h*, причем* $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ *и* $h(A) = \mathfrak{E}_A h(A) = \mathfrak{E}_A f(A)$ *для любого* $A \in \Omega$.

Доказательство. Пусть m и f являются соответственно минимальным и произвольным внутренним ΩK_∞-спутниками ΩK_∞-формации $\mathfrak{F}$. По лемме 7 из [9] имеем $\mathfrak{E}_A f(A) = \mathfrak{E}_A m(A)$ для любого $A \in \Omega$ и $\mathfrak{F}$ обладает внутренним Ω-спутником g таким, что $g(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $g(A) = \mathfrak{E}_A m(A)$ для любого $A \in \Omega$. Так как f — внутренний ΩK_∞-спутник ΩK_∞-формации $\mathfrak{F}$, то $f(\Omega') \subseteq \mathfrak{F} = g(\Omega')$. Далее $f(A) \subseteq \mathfrak{E}_A f(A) = \mathfrak{E}_A m(A) = g(A)$ для любого $A \subseteq \Omega$. Отсюда следует, что $f \leq g$. Следовательно, g является максимальным внутренним ΩK_∞-спутником ΩK_∞-формации $\mathfrak{F}$. Кроме того, $\mathfrak{E}_A g(A) = \mathfrak{E}_A(\mathfrak{E}_A m(A)) = \mathfrak{E}_A m(A) = g(A)$. Пусть h — максимальный внутренний ΩK_∞-спутник ΩK_∞-формации $\mathfrak{F}$. Как и для f получим, что $h \leq g$. Из максимальности h следует, что $h = g$ и значит, ΩK_∞-формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним ΩK_∞-спутником. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— тотально каноническая формация и* h *— максимальный внутренний тотально канонический спутник* $\mathfrak{F}$. *Если* $\Omega = \mathrm{K}(\mathfrak{F})$ *и* $h(A) = \mathfrak{F}$ *для любого* $\mathrm{A} \in \Omega$*, то* $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\Omega$.

Доказательство. По лемме 10 $\mathfrak{F}$ обладает максимальным внутренним тотально каноническим спутником h, причем $h(A) = \mathfrak{E}_A h(A)$ для любого $\mathrm{A} \in \Omega$. По условию $\mathfrak{F} = h(A) = \mathfrak{E}_A\mathfrak{F}$ для для любого $\mathrm{A} \in \Omega$. Пусть $G \in \mathfrak{E}_\Omega\backslash\mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка с таким свойством. Тогда G — монолитическая группа с монолитом M. Пусть $\mathrm{K(M)} = (\mathrm{A})$. Тогда $\mathrm{A} \in \Omega$ и $G/M \in \mathfrak{F}$ влечет $G \in \mathfrak{E}_A\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

тально канонической подформацией. Теперь по лемме 12 $\mathfrak{F}$ является однопорожденной тотально канонической формацией, что противоречит условию. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\Omega$ и $\delta(\Omega) = 2$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\Omega$, $\delta(\Omega) = 2$, $\Omega = (A) \cup (B)$ и $\mathfrak{H}$ — собственная тотально каноническая подформация формации $\mathfrak{F}$. По лемме 8 $\mathfrak{F}$ — неоднопорожденная тотально каноническая формация. Допустим, что $\mathfrak{H}$ не является однопорожденной тотально канонической формацией. Пусть m — минимальный тотально канонический спутник формации $\mathfrak{H}$. Тогда по лемме 3 $\mathfrak{E}_A m(A) \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{E}_B m(B) \subseteq \mathfrak{H}$. По лемме 12 $m(A)$ и m(B) не является однопорожденными тотально каноническими формациями и значит, $K(m(A)) = K(m(B)) = \Omega$. Пусть m_A — минимальный тотально канонический спутник формации $m(A)$. Тогда по лемме 12 $m_A(B)$ — неоднопорожденная тотально каноническая формация с минимальным тотально каноническим спутником m_{AB}, причем $\mathfrak{E}_B m_A(B) \subseteq m(A)$ и $\mathfrak{E}_A \mathfrak{E}_B m_A(B) \subseteq \mathfrak{E}_A m(A) \subseteq \mathfrak{H}$, то есть после второго шага получили $\mathfrak{E}_A \mathfrak{E}_B m_A(B) \subseteq \mathfrak{H}$. Продолжая этот процес, через $2n$ шагов получим $\mathfrak{E}_A \mathfrak{E}_B \cdots \mathfrak{E}_A \mathfrak{E}_B m_{ABAB \dots A}(B) \subseteq \mathfrak{H}$, где произведение $(\mathfrak{E}_A \mathfrak{E}_B)$ в левой части встречается множителем n раз. Отсюда следует, что $(\mathfrak{E}_A \mathfrak{E}_B)^n \subseteq \mathfrak{H}$ для любого $n \in \mathbf{N}$. По лемме 1 $\mathfrak{E}_\Omega = \cup_{n \in \mathbf{N}} (\mathfrak{D}_\Omega)^n \subseteq \cup_{n \in \mathbf{N}} (\mathfrak{E}_A \mathfrak{E}_B)^n \subseteq \mathfrak{H}$, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{H}$ — однопорожденная тотально каноническая формация. Теорема доказана.

Abstract. The structure of critical non-one-generated totally canonical formations of finite groups is studied in this paper.

Литература

1. В. Г. Сафонов, Об одном вопросе теории тотально локальных формаций конечных групп, Алгебра и логика, **42**, № 6 (2003), 727–736.

2. В. Г. Сафонов, К теории тотально локальных классов Фиттинга, Гашюцева теория классов групп и других алгебраических систем, Тезисы докладов. Межд. науч. конф., посвященной 80-летию проф. Вольфганга Гашюца. Гомель, 2000, 46–47.

3. О. В. Камозина, О неоднопорожденных тотально веерных классах Фиттинга конечных групп, Межд. алг. конф. "Классы групп и алгебр", посвященная 100-летию со дня рождения С. А. Чунихина, Тезисы докладов, Гомель, 2005, 65.

4. В. А.Ведерников, М. М.Сорокина, Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп, Дискретная математика, **13**, Вып. 3 (2001), 125–144.

5. Л. А. Шеметков, Формации конечных групп, Москва, Наука, 1978.

6. Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, Формации алгебраических систем, Москва, Наука, 1989.

7. А. Н. Скиба, Алгебра формаций, Минск, Беларуская навука, 1997.

8. K. Doerk, T. Hawkes, Finite soluble groups, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1992.

9. V. A. Vedernikov, Maximal satellites of Ω-foliated formations and Fitting classes, Proceed. of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl. **2** (2001), 217–233.

Московский городской
педагогический университет

Московский педагогический
государственный университет

Поступило 14.03.06