

К ВОПРОСУ О ВИНТОВОЙ ЯЧЕЙКЕ КЕРРА

В. К. Архипов, Е. И. Ершов, Б. П. Рысеев и Р. П. Тарасов

Рассмотрена винтовая ячейка Керра с использованием решений соответствующей ей системы дифференциальных уравнений. Из решений, полученных при двух определенных образом выбранных начальных условиях, составлена матрица, которая представляет оператор, связывающий значения электрического вектора входящей и выходящей световой волн. Анализ матрицы при угле закручивания $\theta = \pi$ выясняет приближение, при котором возможна ранее принятая интерпретация винтовой ячейки как устройства, поворачивающего плоскость поляризации световой волны. Вычисление характеристик ячейки при $\theta = \pi/2$ показывает, что она нетривиально отличается от обычной ячейки Керра.

В [1] рассматривалось прохождение света в оптической среде, для которой в некоторой декартовой системе координат (x_i) тензор диэлектрической проницаемости ϵ_{ij} , вещественный и симметричный, имеет вид

$$\epsilon_{ij}(x_3) = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Считалось, что свет распространяется в направлении оси x_3 . Винтовая ячейка Керра [2] осуществляет тот случай, когда возможно представление ϵ_{ij} в виде (1). Именно, если x_3 направлена по оси, относительно которой закручиваются электроды, и $\frac{\Delta\theta}{\Delta x_3} d \ll 1$, где $\Delta\theta$ — угол закручивания на длине Δx_3 , d — расстояние между электродами, то $\Delta\epsilon_{13} = \Delta\epsilon_{31} = \Delta\epsilon_{23} = \Delta\epsilon_{32} = 0$, где $\Delta\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} - \delta_{ij}\epsilon_0$ и ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость в отсутствие внешнего электрического поля, δ_{ij} — символ Кронекера. В этих предположениях винтовая ячейка допускает точное решение; при этом оказывается, что ей можно сопоставить некоторый оператор в виде матрицы, связывающей значения электрического вектора E световой волны на входе и выходе ячейки. Анализ характеристик ячейки при угле закручивания $\theta = \pi/2$ показывает, что она нетривиально отличается от обычной ячейки Керра [3].

В [2] винтовая ячейка с углом закручивания $\theta = \pi$ изучалась экспериментально. При анализе авторы исходили из дискретного аналога в предположении малой эллиптичности индикатрисы двулучепреломляющих пластинок; путем предельного перехода получали выражение, описывающее ячейку с непрерывным углом поворота. Ячейка интерпретировалась как устройство, поворачивающее плоскость поляризации входящей световой волны. В последующем на основании точного решения будет выяснена возможность и ограниченность такой интерпретации работы винтовой ячейки Керра.

В [1] использовалась N -матрица. Возможно решение задачи без привлечения N -матрицы, если рассматривать в пределах Δx_3 , $\Delta x_3 \frac{d\theta}{dx_3} \ll 1$ вин-

товую ячейку как обычную ячейку Керра. Точнее, если в случае ячейки Керра, используя метод Джонса [4], можно записать

$$\mathbf{E}(x_3 + \Delta x_3) = \hat{A}^{-1}(x_3) \hat{A}(x_3 + \Delta x_3) \mathbf{E}(x_3), \quad (2)$$

где

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \exp \left\{ i \frac{\omega}{c} n_1 x_3 \right\} & 0 \\ 0 & \exp \left\{ i \frac{\omega}{c} n_2 x_3 \right\} \end{bmatrix}$$

и n_1, n_2 — показатели преломления для обыкновенного и необыкновенного луча, ω — частота световой волны, то для винтовой ячейки справедливо соотношение (2) с точностью до $\mathbf{O}(\Delta x_3)$, $|\mathbf{O}(\Delta x_3)| \sim \Delta x_3^2$, но записанное в локальной системе координат $\tilde{x}_i = U_{ij} x_j$, где $\hat{U} = \{U_{ij}\}$ — матрица собственных векторов ε_{ij}

$$\mathbf{E}(x_3 + \Delta x_3) = \hat{U}^{-1}(x_3) \hat{U}(x_3 + \Delta x_3) \hat{A}^{-1}(x_3) \hat{A}(x_3 + \Delta x_3) \mathbf{E}(x_3) + \mathbf{O}(\Delta x_3). \quad (3)$$

Соотношение (3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x_3) + \frac{d\mathbf{E}(x_3)}{dx_3} \Delta x_3 &= \hat{U}^{-1}(x_3) \left\{ \hat{U}(x_3) + \frac{d\hat{U}(x_3)}{dx_3} \Delta x_3 \right\} \times \\ &\times \hat{A}^{-1}(x_3) \left\{ \hat{A}(x_3) + \frac{d\hat{A}(x_3)}{dx_3} \Delta x_3 \right\} \mathbf{E}(x_3) + \mathbf{O}(\Delta x_3), \end{aligned}$$

или

$$\frac{d\mathbf{E}}{dx_3} = \left\{ \hat{U}^{-1} \frac{d\hat{U}}{dx_3} + \hat{A}^{-1} \frac{d\hat{A}}{dx_3} \right\} \mathbf{E}.$$

Учитывая, что

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

где $\cos \theta = \mathbf{e}_1 \tilde{\xi}$, \mathbf{e}_1 — единичный вектор в направлении оси x_1 , $\tilde{\xi}$ — собственный вектор ε_{ij} , соответствующий собственному значению $\varepsilon_1 = n_1^2$, получим

$$\frac{d\mathbf{E}}{dx_3} = \hat{B} \mathbf{E}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} i \frac{\omega}{c} n_1 & a \\ -a & i \frac{\omega}{c} n_2 \end{bmatrix}, \quad a = \frac{d\theta}{dx_3}. \quad (4)$$

При $\frac{d\hat{B}}{dx_3} = 0$ решение уравнения (4) имеет вид

$$\mathbf{E} = a_1 \mathbf{h}_1 \exp \{ \gamma_1 x_3 \} + a_2 \mathbf{h}_2 \exp \{ \gamma_2 x_3 \}, \quad (5)$$

где $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ — собственные векторы и γ_1, γ_2 — собственные значения матрицы \hat{B} , a_1, a_2 — произвольные постоянные. Вычисление дает

$$\gamma_{1,2} = \frac{i(\beta_1 + \beta_2 \pm \sqrt{\Delta\beta^2 + 4a^2})}{2}, \quad \Delta\beta = \beta_1 - \beta_2, \quad \beta_1 = \frac{\omega}{c} n_1, \quad \beta_2 = \frac{\omega}{c} n_2.$$

При поляризации падающей световой волны по оси x_1 (рис. 1) соотношение (5) принимает вид

$$\begin{aligned} E_{11} &= C \left\{ i\Delta\beta \sin \left(\frac{\sqrt{\Delta\beta^2 + 4a^2}}{2} x_3 \right) + \sqrt{\Delta\beta^2 + 4a^2} \cos \left(\frac{\sqrt{\Delta\beta^2 + 4a^2}}{2} x_3 \right) \right\}, \\ E_{21} &= C 2a \sin \left(\frac{\sqrt{\Delta\beta^2 + 4a^2}}{2} x_3 \right), \end{aligned}$$

при поляризации по оси x_2

$$E_{12} = -C2\alpha \sin\left(\frac{\sqrt{\Delta\beta^2 + 4\alpha^2}}{2} x_3\right),$$

$$E_{22} = C \left\{ -i\Delta\beta \sin\left(\frac{\sqrt{\Delta\beta^2 + 4\alpha^2}}{2} x_3\right) + \sqrt{\Delta\beta^2 + 4\alpha^2} \cos\left(\frac{\sqrt{\Delta\beta^2 + 4\alpha^2}}{2} x_3\right) \right\},$$

где

$$C = \frac{E_0 \exp\left\{i\left[\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} x_3 - \omega t\right]\right\}}{\sqrt{\Delta\beta^2 + 4\alpha^2}}$$

и $E_0 = |\mathbf{E}_0|$ — амплитуда падающей световой волны.

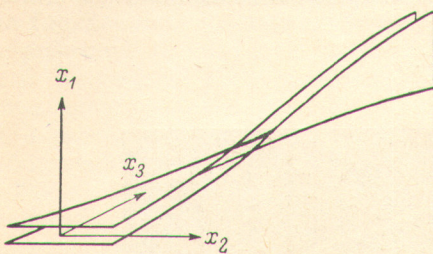


Рис. 1.

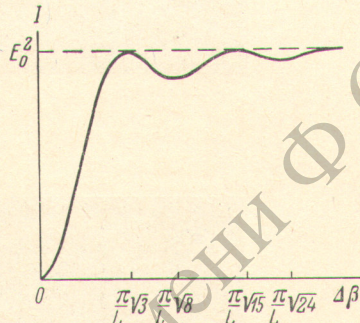


Рис. 2.

Составляя матрицу \hat{E}

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} E'_{11} & E'_{12} \\ E'_{21} & E'_{22} \end{bmatrix}, \quad E'_{ij} = E_0^{-1} E_{ij} \exp\{i\omega t\},$$

связь между электрическим вектором \mathcal{E} входящей и выходящей световой волны можно записать в системе координат $\{x_i\}$ в виде

$$\mathcal{E}_{\text{вых.}} = \hat{U}^{-1} \hat{E} \mathcal{E}_{\text{вх.}}$$

Значение матрицы $\hat{U}^{-1} \hat{E}$ берется при $x_3 = L$, где L — размер ячейки в направлении оси x_3 . Из вида матрицы $\hat{U}^{-1} \hat{E}$ можно заключить, что при произвольных L, α она не является матрицей поворота. Однако если положить $\alpha L = \pi$ и $(\Delta\beta/2\alpha)^2 \ll 1$, то разлагая матричные элементы \hat{E} по малому параметру $(\Delta\beta/2\alpha)^2$ и ограничиваясь первым приближением, получаем

$$E'_{11} = b \cos w, \quad E'_{12} = b \sin w, \quad E'_{21} = -b \sin w, \quad E'_{22} = b \cos w,$$

где $b = \text{const}$, $|b| = 1$, $w = \frac{1}{8} \frac{\Delta b^2}{\alpha} L$. В этом случае матрица $\hat{U}^{-1} \hat{E}$ является матрицей поворота на угол

$$w = \frac{1}{8} \frac{\Delta\beta}{\pi} L^2 = 6.27 \cdot 10^{-11} \pi B^2 L^2 \left(\frac{V}{d}\right)^4 \text{ рад.},$$

где B — постоянная Керра, L — размер электродов в направлении распространения световой волны, V — подавляемая разность потенциалов, d — расстояние между электродами. Этим случаем ограничивается рассмотрение винтовой ячейки в работе [2].

Рассмотрим характеристики винтовой ячейки, когда условие $(\Delta\beta/2\alpha)^2 \ll 1$ не выполняется и $L\alpha = \pi/2$. Они определяются соотношением

$$I = E_0^2 [(\tau_1 \hat{U}^{-1} \hat{E} \tau_2) (\tau_1 \hat{U}^{-1} \hat{E} \tau_2)^*], \quad (6)$$

где τ_1, τ_2 — направление оси поляризатора и анализатора, определенные с точностью до знака.

Как и для обычной ячейки Керра, особый интерес представляют два случая: а) когда оси поляризатора и анализатора скрещены; б) когда оси поляризатора и анализатора параллельны. В первом случае $\tau_1^{(1)} = -\tau_2^{(1)}$,

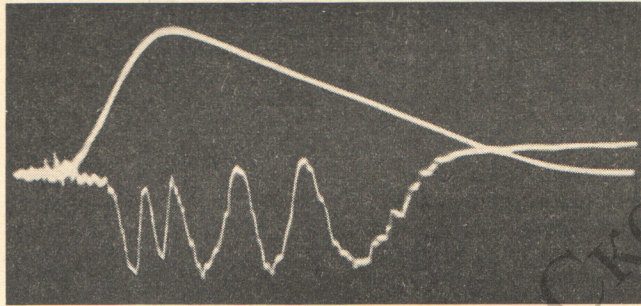


Рис. 3.

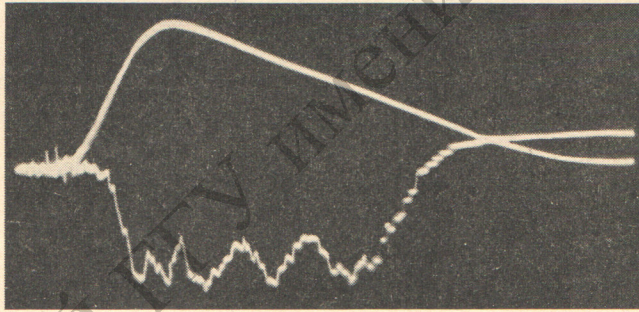


Рис. 4.

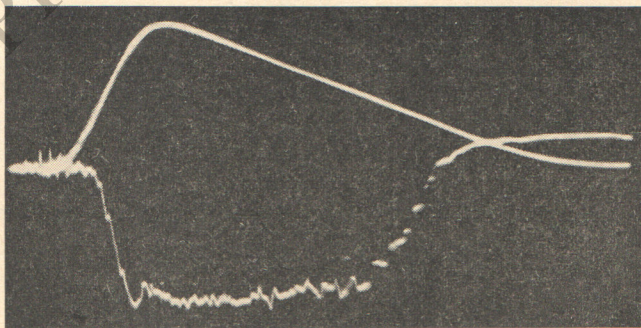


Рис. 5.

$\tau_1^{(2)} = \tau_2^{(2)}$; во втором случае $\tau_1^{(1)} = \tau_2^{(1)}$, $\tau_1^{(2)} = \tau_2^{(2)}$. С учетом этого при скрещенных осях выражение (6) имеет вид

$$I_{\perp} = \frac{E_0^2}{\Delta\beta^2 + 4a^2} \left\{ \cos^2 2\sigma \Delta\beta^2 \sin^2 \left(\frac{\sqrt{\Delta\beta^2 + 4a^2}}{2} L \right) + (\Delta\beta^2 + 4a^2) \cos^2 \left(\frac{\sqrt{\Delta\beta^2 + 4a^2}}{2} L \right) \right\}, \quad (7)$$

при параллельных

$$I_{\parallel} = \frac{E_0^2}{\Delta\beta^2 + 4a^2} (\Delta\beta^2 \sin^2 2\sigma + 4a^2) \sin^2 \left(\frac{\sqrt{\Delta\beta^2 + 4a^2}}{2} L \right), \quad I_{\perp} + I_{\parallel} = E_0^2,$$

где σ — угол между осью x_1 и направлением поляризации входящей световой волны. При $\sigma=45^\circ$ I_1 для винтовой ячейки мало отличается от аналогичной функции для обыкновенной ячейки.

Существенно новое свойство винтовой ячейки Керра проявляется при $\sigma=0^\circ$ (90°), когда $I_\perp \rightarrow E_0^2$ при $\Delta\beta \rightarrow \infty$ (рис. 2). Это свойство может найти применение для получения прямоугольных световых импульсов, например для быстродействующих световых затворов, в тех случаях, когда форма управляющего напряжения отличается от прямоугольной. На рис. 3—5 дана экспериментальная форма изменения интенсивности светового потока, прошедшего через винтовую ячейку, при $\sigma=45, 15, 0^\circ$ и определенной форме управляющего сигнала (показанной на этих рисунках). Оси поляризатора и анализатора были скрещены; в качестве электрооптического вещества использовался нитробензол; источником светового излучения служил лазер ЛГ-55; ячейка имела размеры $d=2$ мм, $L=300$ мм. На рис. 6 сопоставлены экспериментальная и вычисленная по формуле (7) формы изменения интенсивности светового потока, $\sigma=0^\circ$.

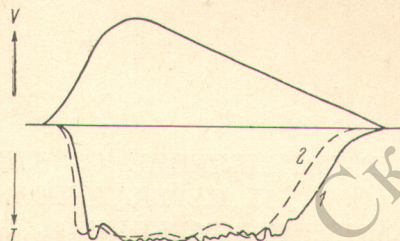


Рис. 6. Форма изменения во времени внешнего управляющего напряжения на винтовой ячейке Керра (верхняя кривая); внизу — экспериментальное изменение интенсивности светового излучения (1) и вычисленное по формуле (7) (2).

Литература

- [1] R. C. Jones, J. Opt. Soc. Am., 38, 671, 1948.
- [2] E. F. Dawson, N. O. Young, J. Opt. Soc. Am., 50, 170, 1960.
- [3] П. Т. Тагер. Ячейка Керра. Изд. «Искусство», 1937.
- [4] R. C. Jones, J. Opt. Soc. Am., 31, 488, 1941.
- [5] Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. «Наука», М., 1965.

Поступило в Редакцию 24 октября 1969 г.