

ВЛИЯНИЕ СТОЛКНОВЕНИЙ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ
ОСЕВЫХ МОД В ГАЗОВОМ ЛАЗЕРЕ

Ю. П. Гудков

В доплеровском приближении исследована работа газового лазера в режиме двух типов колебаний с учетом эффектов, вызванных столкновениями атомов активной среды. Получены общие выражения для интенсивностей и частот генерации лазера и проведены численные расчеты.

Введение

В работах [1,2] по газовым лазерам было отмечено, что увеличение плотности активной среды не только приводит к уменьшению времен жизни атомов, но и оказывает влияние на симметрию формы спектральной линии. Этот эффект в одномодовом режиме проявляется в том, что зависимость мощности генерации от частоты перестает быть симметричной функцией [2], а в двухмодовом режиме наблюдается преимущественное ослабление генерации одной из мод по сравнению с другой [3]. В ряде работ эти явления объясняются влиянием столкновений атомов. Жок и Джаван [2] отметили, что «мягкие» столкновения (когда фаза атомного осциллятора изменяется меньше чем на 2π) могут оказать влияние на взаимодействие атома с электрическим полем в лазере. В таком случае влияние столкновений нельзя описать просто количественным изменением скоростей распада уровней, так как в одном акте столкновения происходит одновременное изменение как скорости атома, так и его фазы. Это в конечном счете оказывает влияние на отклонение формы контура усиления от симметричной. Однако фактически Жок и Джаван в своей работе ограничились учетом изменения скорости атома и пренебрегли влиянием столкновений на фазу осциллятора, что, по мнению Форка и Поллака [3], а также Раутиана [5], принципиально не дает возможности объяснить асимметрию контура усиления.

В работе Форка и Поллака [3] использовано противоположное предельное предположение — авторы ограничиваются учетом влияния столкновений на фазу. Используя в качестве взаимодействия силы Ван дер Ваальса, Форк и Поллак в результате получили, что это взаимодействие

проявляется в отклике $D(\nu - \omega) = \frac{e^{i\omega}}{\gamma + i(\omega - \nu)}$, где s — линейная функция

давления. Такой отклик благодаря множителю $e^{i\omega}$ дает асимметричную спектральную линию, что позволило авторам провести детальный расчет работы He^3 — Ne^{20} -лазера с учетом эффектов давления. Следует отметить, однако, в этой работе приведены только результаты, а модельные предположения и вывод формул опущены. Поэтому их окончательные формулы трудно обсуждать. В работе [4], выполненной Джорджи, Боренштейном и Лэмбом, учтено одновременное изменение и скорости, и фазы. Авторы получили выражение для мощности генерации в одномодовом режиме, имеющее асимметричный характер. В этой работе, однако, изменение скорости и фазы при столкновении рассматриваются независимо, в то время как между ними, по-видимому, должна существовать связь.

В статье Раутиана [5] использован метод, принципиально отличающийся от идей, использованных в работах [2-4]. Метод Раутиана заключается в следующем. Хотя обе возможные причины (изменение скорости и изменение фазы) приводят в отдельности только к уширению, но при наличии статистической связи между ними могут привести и к искажению симметричной формы контура усиления. Для учета статистической связи между ними в уравнения для матрицы плотности можно ввести члены с интегралами столкновений. Поскольку модифицированные таким образом уравнения можно рассматривать как квантовомеханический аналог кинетического уравнения Больцмана, это избавляет от необходимости проводить усреднение по предысториям всех сталкивающихся атомов. В этом смысле метод Раутиана кажется нам предпочтительнее методов, использованных в других работах.

Наиболее интересные эффекты в лазере имеют место при многомодовом режиме, в то время как в статье Раутиана исследуется режим одномодовый. При этом большое значение приобретают эффекты, вызванные влиянием столкновений на конкуренцию типов колебаний (θ -члены). Данная работа выполнена на основе идей, использованных в работе Раутиана, причем приближения модельного характера — ударное приближение для столкновений, двухуровневая модель атомов и т. п. — сохранены и здесь. Не учитывается также и диффузионный характер движения атомов, имеющий место в газах высокой плотности — это сделано в других работах [7, 8].

Макроскопическая поляризация среды с учетом столкновений

Итак, в качестве уравнений для матрицы плотности возьмем уравнения, использованные в статье Раутиана,

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho_{jj}(z, v, t) &= \pm 2 \operatorname{Re} [iV_{ab}^* \rho_{ab}] + q_j(z, v) - \Gamma_j \rho_{jj} + \\ &+ \int A_j(v', v) \rho_{jj}(z, v', t) dv', \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial t} \right) \rho_{ab}(z, v, t) &= iV_{ab}(\rho_{aa} - \rho_{bb}) - (\Gamma + i\delta) \rho_{ab} + \\ &+ \int A(v', v) \rho_{ab}(z, v', t) dv'. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь j принимает два значения, причем знак «плюс» относится к случаю $j=a$ (верхний уровень), а знак «минус» — к случаю $j=b$ (нижний уровень); $q_j(zv) = \Lambda_j(z) W_M(v)$ — скорость возбуждения уровня j [$W_M(v)$ — распределение Максвелла]; $\Gamma_j = \gamma_j + \nu_j$ и $\Gamma + i\delta = \gamma_{ab} + \nu + i\delta$, где γ_j — вероятность спонтанного распада уровня j , γ_{ab} — радиационная ширина атомного перехода ω , величины ν_j определяют вклад столкновений в вероятность распада уровней j , ν — ударная ширина атомного перехода, δ — смещение частоты атомного осциллятора вследствие столкновений, $A_j(v', v)$ и $A(v', v)$ — ядра интегралов столкновений, $V_{ab}(z, t) = e^{i\omega t} \left(\frac{p}{\hbar} E \right)$ — матричный элемент взаимодействия атома с электрическим полем E (в представлении взаимодействия), где p — среднее значение индуцированного электрического дипольного момента. Отметим, что, как и в работе Лэмба [6], мы имеем дело с полем, обладающим осевой симметрией. Поэтому уравнения (1) зависят только от координаты z . Это связано с тем, что мы не учитываем поперечные моды. Поле E имеет в своем спектре две частоты ν_1 и ν_2 , но, чтобы не ограничивать общности рассмотрения, представим его в следующем виде:

$$E = \sum_{\mu} E_{\mu}(t) \sin(K_{\mu}z) \cos(\nu_{\mu}t). \quad (2)$$

Одной из вращающихся поляризаций можно пренебречь, так как матричный элемент оказывает резонансное воздействие на атомный осциллятор только при частотах, весьма близких к атомной. Поэтому для V_{ab} будем использовать следующее выражение:

$$V_{ab} = -\frac{p}{2\hbar} \sum_{\mu} E_{\mu}(t) \sin(K_{\mu}z) e^{i(\omega - \nu_{\mu})t}, \quad (3)$$

где $E_{\mu}(t)$ и ν_{μ} — амплитуды и частоты колебаний. В отношении ядер интегралов столкновений ограничимся моделью сильных столкновений

$$\left. \begin{aligned} A_j(\mathbf{v}', \mathbf{v}) &= \tilde{\nu}_j W_M(\mathbf{v}), \\ A(\mathbf{v}', \mathbf{v}) &= \tilde{\nu} W_M(\mathbf{v}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Члены с A_j и A в уравнениях (1) описывают те столкновения, которые приводят к одновременному изменению скорости и фазы. Из уравнений видно, что A_j представляет собой вероятность того, что атом, находящийся на уровне j , в результате столкновения изменит скорость на величину $(\mathbf{v} - \mathbf{v}')$. Физический смысл $\tilde{\nu}_j$ заключается в количестве таких столкновений, которые приводят только к перераспределению атомов по скоростям. Величина $\tilde{\nu}$ определяет одновременно уширение линии и сдвиг фазы осциллятора в одном и том же акте столкновения и должна быть, вообще говоря, комплексной.

Проделав необходимые выкладки, в процессе которых мы пренебрегаем быстрыми пространственными и временными колебаниями $E(t)$, получим поляризацию среды в явном виде

$$P_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L dz [p_{ab}(\mathbf{z}, t) e^{-i\omega t} \sin K_n z] + \text{компл. сопр.},$$

где $K_n = \frac{n\pi}{L}$, а L — длина резонатора. Здесь P_n означает пространственную компоненту Фурье разложения поляризации по собственным функциям резонатора. Вклад в $P_n(t)$ от первого порядка теории возмущений будет иметь следующий вид:

$$P_n^{(1)}(t) = i \frac{\sqrt{\pi} p^2}{2\hbar K u} \sum_{\mu} E_{\mu}(t) e^{-i\nu_{\mu} t} N_{n-\mu} \frac{W\left(i \frac{p_{\mu}}{K u}\right)}{1 - \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}}{K u} W\left(i \frac{p_{\mu}}{K u}\right)}, \quad (5)$$

где $N_{n-\mu} = \frac{2}{L} \int_0^L dz N(z) \sin(K_{\mu}z) \sin(K_n z)$, $N(z) = \frac{\Lambda_a}{\Gamma_a - \tilde{\nu}_a} - \frac{\Lambda_b}{\Gamma_b - \tilde{\nu}_b}$, $P_{\mu} = \Gamma_i - i(\nu_{\mu} - \omega - \delta)$, $W\left(i \frac{x}{K u}\right) = \frac{K u}{\sqrt{\pi}} \int \frac{W_M(\mathbf{v})}{x + iK v_z} d\mathbf{v}$ — функция, табулированная в [9], u — средняя тепловая скорость.

Формула (5) отличается от соответствующего выражения, полученного в работе [6], множителем $\frac{1}{1 - \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}}{K u} W\left(i \frac{p_{\mu}}{K u}\right)}$ и приводит к тому, что

контур усиления становится несимметричной функцией расстройки. Выпишем теперь поляризацию третьего порядка, где содержатся нелинейные эффекты

$$\begin{aligned}
 P_n^{(3)}(t) = & \frac{i\sqrt{\pi}p^4}{32h^3Ku} \sum_{j=a,b} \sum_{\mu,\nu,\sigma} E_\mu E_\nu E_\sigma \left\{ \frac{e^{-i(\nu_\mu - \nu_\nu + \nu_\sigma)t}}{\left[1 - \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}}{Ku} W\left(i \frac{p_\sigma}{Ku}\right)\right] \left[1 - \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}}{Ku} W\left(i \frac{p_{\mu\nu\sigma}}{Ku}\right)\right]} \right\} \times \\
 & \times \left[\frac{W\left(i \frac{p_\sigma}{Ku}\right) - W\left(i \frac{p_{\mu\nu\sigma}}{Ku}\right)}{p_{\mu\nu\sigma} - p_\sigma} + \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}_j}{Ku} \frac{W\left(i \frac{p_\sigma}{Ku}\right) W\left(i \frac{p_{\mu\nu\sigma}}{Ku}\right)}{\Gamma_j - \tilde{\nu}_j - i(\nu_\sigma - \nu_\rho)} \right] + \\
 & + \frac{W\left(i \frac{p_\sigma}{Ku}\right) + W\left(i \frac{p_{\mu\nu\sigma}}{Ku}\right)}{p_{\mu\nu\sigma} + p_\sigma} + \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}_j}{Ku} \frac{W\left(i \frac{p_\sigma}{Ku}\right) W\left(i \frac{p_{\mu\nu\sigma}}{Ku}\right)}{\Gamma_j - \tilde{\nu}_j - i(\nu_\sigma - \nu_\rho)} + \\
 & + N_{\mu-\rho+\sigma-n} \left(-\frac{W\left(i \frac{p_\sigma}{Ku}\right)}{(p_{\mu\nu\sigma} - p_\sigma)(2p_\sigma - p_{j\sigma\rho})} + \frac{W\left(i \frac{p_{\mu\nu\sigma}}{Ku}\right)}{(p_{\mu\nu\sigma} - p_\sigma)(2p_{\mu\nu\sigma} - p_{j\sigma\rho})} + \right. \\
 & \left. + \frac{2W\left(i \frac{p_{j\sigma\rho}}{2Ku}\right)}{(2p_{\mu\nu\sigma} - p_{j\sigma\rho})(2p_\sigma - p_{j\sigma\rho})} + \frac{\sqrt{\pi} \tilde{\nu}_j}{1 - \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}_j}{Ku} W\left(i \frac{p_{j\sigma\rho}}{2Ku}\right)} \right) \times \\
 & \times \left. \frac{\left[W\left(i \frac{p_{j\sigma\rho}}{2Ku}\right) - W\left(i \frac{p_{\mu\nu\sigma}}{Ku}\right) \right] \left[W\left(i \frac{p_{j\sigma\rho}}{2Ku}\right) - W\left(i \frac{p_\sigma}{Ku}\right) \right]}{(2p_\sigma - p_{j\sigma\rho})(2p_{\mu\nu\sigma} - p_{j\sigma\rho})} \right] + \\
 & + \frac{e^{-i(\nu_\mu + \nu_\nu - \nu_\sigma)t}}{\left[1 - \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}^*}{Ku} W\left(i \frac{p_\sigma^*}{Ku}\right)\right] \left[1 - \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}}{Ku} W\left(i \frac{p_{\mu\nu\sigma}}{Ku}\right)\right]} \times \\
 & \times \left[\frac{W\left(i \frac{p_\sigma^*}{Ku}\right) - W\left(i \frac{p_{\mu\nu\sigma\rho}}{Ku}\right)}{p_{\mu\nu\sigma\rho} - p_\sigma^*} + \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}_j}{Ku} \frac{W\left(i \frac{p_\sigma^*}{Ku}\right) W\left(i \frac{p_{\mu\nu\sigma\rho}}{Ku}\right)}{\Gamma_j - \tilde{\nu}_j + i(\nu_\sigma - \nu_\rho)} \right] + \\
 & + \frac{W\left(i \frac{p_\sigma^*}{Ku}\right) + W\left(i \frac{p_{\mu\nu\sigma\rho}}{Ku}\right)}{p_\sigma^* + p_{\mu\nu\sigma\rho}} + \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}_j}{Ku} \frac{W\left(i \frac{p_\sigma^*}{Ku}\right) W\left(i \frac{p_{\mu\nu\sigma\rho}}{Ku}\right)}{\Gamma_j - \tilde{\nu}_j + i(\nu_\sigma - \nu_\rho)} + \\
 & + N_{\mu-\rho-\sigma+n} \left(\frac{W\left(i \frac{p_{\mu\nu\sigma\rho}}{Ku}\right)}{(p_{\mu\nu\sigma\rho} - p_\sigma^*)(2p_{\mu\nu\sigma\rho} - p_{j\sigma\rho}^*)} - \frac{W\left(i \frac{p_\sigma^*}{Ku}\right)}{(p_{\mu\nu\sigma\rho} - p_\sigma^*)(2p_\sigma^* - p_{j\sigma\rho}^*)} + \right. \\
 & \left. + \frac{2W\left(i \frac{p_{j\sigma\rho}^*}{2Ku}\right)}{(2p_{\mu\nu\sigma\rho} - p_{j\sigma\rho}^*)(2p_\sigma^* - p_{j\sigma\rho}^*)} + \frac{\sqrt{\pi} \tilde{\nu}_j}{1 - \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}_j}{Ku} W\left(i \frac{p_{j\sigma\rho}^*}{2Ku}\right)} \right) \times \\
 & \times \left. \frac{\left[W\left(i \frac{p_{j\sigma\rho}^*}{2Ku}\right) - W\left(i \frac{p_{\mu\nu\sigma\rho}}{Ku}\right) \right] \left[W\left(i \frac{p_{j\sigma\rho}^*}{2Ku}\right) - W\left(i \frac{p_\sigma^*}{Ku}\right) \right]}{(2p_\sigma^* - p_{j\sigma\rho}^*)(2p_{\mu\nu\sigma\rho} - p_{j\sigma\rho}^*)} \right] \left. \right\} + \text{компл. сопр.} \quad (6)
 \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} p_\sigma &= \Gamma - i(\nu_\sigma - \omega - \delta), \\ p_{\mu\rho\sigma} &= \Gamma - i(\nu_\mu - \nu_\rho + \nu_\sigma - \omega - \delta), \\ p_{\mu\sigma\rho} &= \Gamma - i(\nu_\mu - \nu_\sigma + \nu_\rho - \omega - \delta), \\ p_{j\sigma\rho} &= \Gamma_j - i(\nu_\sigma - \nu_\rho). \end{aligned}$$

Таким образом, получены общие выражения для макроскопической поляризации среды, которая играет роль вынуждающей силы для колебаний электрического поля. В дальнейшем мы будем иметь дело с частным случаем формулы (6) при небольших плотностях газов.

Переход к доплеровскому пределу

Формула (6) в рамках сделанных предположений справедлива при любых значениях параметров Γ , Γ_j , ν , ν_j , $\tilde{\nu}$, $\tilde{\nu}_j$. В данной работе мы ограничимся рамками доплеровского приближения, т. е. считаем, что все введенные в теорию Лэмба параметры, связанные с эффектами давления, малы по сравнению с Ku . Так как эти параметры близки по величине к среднему числу столкновений, то это означает, что дальнейшие упрощения формулы (6) ограничивают наше рассмотрение давлениями порядка нескольких тор. Возможности упрощения связаны с тем, что при малых плотностях константы Γ , Γ_a , Γ_b малы по сравнению с разностью частот генерации Δ . Поэтому функцию $W\left(i\frac{p}{Ku}\right)$ можно разложить в ряд по степеням p/Ku , так как максимальное значение $|p|$ не превышает Δ , которая во всех реальных случаях в несколько раз меньше доплеровской ширины.

Проделав эти разложения, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma_j - i(\nu_\sigma - \nu_\rho)} \frac{W\left(i\frac{p_\sigma}{Ku}\right) - W\left(i\frac{p_{\mu\rho\sigma}}{Ku}\right)}{p_{\mu\rho\sigma} - p_\sigma} \approx \\ & \approx \frac{2}{Ku} \frac{1}{\Gamma_j - i(\nu_\sigma - \nu_\rho)} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{\Gamma - i\left(\nu_\sigma - \omega - \delta + \frac{1}{2}\nu_\mu - \frac{1}{2}\nu_\rho\right)}{Ku} \right], \\ & \frac{1}{\Gamma_j - i(\nu_\sigma - \nu_\rho)} \frac{W\left(i\frac{p_\sigma}{Ku}\right) + W\left(i\frac{p_{\mu\rho\sigma}}{Ku}\right)}{p_{\mu\rho\sigma} + p_\sigma} \approx \\ & \approx \frac{1}{Ku} \frac{1}{\Gamma_j - i(\nu_\sigma - \nu_\rho)} \left[\frac{Ku}{\Gamma - i\left(\frac{\nu_\mu - \nu_\rho}{2} + \nu_\sigma - \omega - \delta\right)} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right], \\ & \frac{1}{p_\sigma - p_{\mu\rho\sigma}} \left[-\frac{W\left(i\frac{p_\sigma}{Ku}\right)}{2p_\sigma - p_{j\sigma\rho}} + \frac{W\left(i\frac{p_{\mu\rho\sigma}}{Ku}\right)}{2p_{\mu\rho\sigma} - p_{j\sigma\rho}} \right] + \\ & + \frac{2W\left(\frac{p_{j\sigma\rho}}{2Ku}\right)}{(2p_{\mu\rho\sigma} - p_{j\sigma\rho})(2p_\sigma - p_{j\sigma\rho})} \approx \frac{1}{2(Ku)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда видно, что при сложении этих выражений старшим окажется резонансный член

$$\left\{ [\Gamma_j - i(\nu_\sigma - \nu_\rho)] \left[\Gamma - i\left(\frac{\nu_\mu - \nu_\rho}{2} + \nu_\sigma - \omega - \delta\right) \right] \right\}^{-1}.$$

Следующим по порядку величины является член $1/2(Ku)^2$, который можно не учитывать. Что касается тех слагаемых в формуле (6), которые стоят после множителя $\tilde{\nu}_j$, то в данном случае ими можно также пренебречь, так как они дают вклад порядка $\tilde{\nu}_i/Ku$.¹ При этом в формуле (6) мы сохраняем все, что связано с множителями вида

$$\frac{1}{1 - \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}}{Ku} W\left(i \frac{p}{Ku}\right)},$$

так как они влияют на форму линии.

Выполнив аналогичные упрощения во второй группе членов формулы (6) и объединяя все вместе, получим более короткое выражение

$$P_n^{(3)}(t) = \frac{i\sqrt{\pi} p^4}{32\hbar^3 Ku} \sum_{\mu, \rho, \sigma} E_\mu(t) E_\rho(t) E_\sigma(t) e^{-i(\nu_\mu - \nu_\rho + \nu_\sigma)t} \left[\frac{1}{\Gamma_a - i(\nu_\sigma - \nu_\rho)} + \frac{1}{\Gamma_b - i(\nu_\sigma - \nu_\rho)} \right] \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\left[1 - \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}}{Ku} W\left(i \frac{p_\sigma}{Ku}\right)\right] \left[1 - \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}}{Ku} W\left(i \frac{p_{\mu\rho\sigma}}{Ku}\right)\right] \Gamma - i\left(\frac{\nu_\mu - \nu_\rho}{2} + \nu_\sigma - \omega'\right)} \frac{N_{\mu+\rho-\sigma-n}}{\Gamma - i\left(\frac{\nu_\mu - \nu_\rho}{2} + \nu_\sigma - \omega'\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left[1 - \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}^*}{Ku} W\left(i \frac{p_\rho^*}{Ku}\right)\right] \left[1 - \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}}{Ku} W\left(i \frac{p_{\mu\rho\sigma}}{Ku}\right)\right] \Gamma - i\left(\frac{\nu_\mu + \nu_\sigma}{2} - \nu_\rho\right)} \frac{N_{\mu-\rho+\sigma-n}}{\Gamma - i\left(\frac{\nu_\mu + \nu_\sigma}{2} - \nu_\rho\right)} \right\} + \text{компл. сопр.} \quad (8)$$

Формула (8) отличается от соответствующего выражения Лэмба двумя множителями $\left\{ \left[1 - \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}}{Ku} W\left(i \frac{p_\sigma}{Ku}\right)\right] \left[1 - \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}}{Ku} W\left(i \frac{p_{\mu\rho\sigma}}{Ku}\right)\right] \right\}^{-1}$ и $\left\{ \left[1 - \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}^*}{Ku} W\left(i \frac{p_\rho^*}{Ku}\right)\right] \left[1 - \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}}{Ku} W\left(i \frac{p_{\mu\rho\sigma}}{Ku}\right)\right] \right\}^{-1}$, которые с достаточной для третьего

порядка точностью можно заменить величинами $\frac{1 + i \frac{2\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_r}}{(1 - \varepsilon_r)^2}$ и $\frac{1}{(1 - \varepsilon_r)^2}$.
Здесь

$$\varepsilon_r = \sqrt{\pi} \operatorname{Re} \frac{\tilde{\nu}}{Ku} W\left(i \frac{\Gamma}{Ku}\right), \quad (9)$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{\pi} \operatorname{Im} \frac{\tilde{\nu}}{Ku} W\left(i \frac{\Gamma}{Ku}\right), \quad \omega' = \omega + \delta. \quad (10)$$

При этом мы для простоты пренебрегли зависимостью этих множителей от частоты.² Объединяя вместе первый и третий порядки, получим

$$P_n(t) = -\frac{i\sqrt{\pi} p^2}{2\hbar Ku} \sum_{\mu} E_\mu(t) e^{-i\nu_\mu t} N_{n-\mu} J(\nu_\mu - \omega') +$$

$$+ \frac{i\sqrt{\pi} p^4}{32\hbar^3 Ku} \frac{1}{(1 - \varepsilon_r)^2} \sum_{\mu, \rho, \sigma} E_\mu E_\rho E_\sigma e^{-i(\nu_\mu - \nu_\rho + \nu_\sigma)t} \left[\frac{1}{\Gamma_a + i(\nu_\rho - \nu_\sigma)} + \frac{1}{\Gamma_b + i(\nu_\rho - \nu_\sigma)} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{\left(1 + i \frac{2\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_r}\right) N_{\mu+\rho-\sigma-n}}{\Gamma + i\left(\omega' - \nu_\sigma - \frac{\nu_\rho - \nu_\mu}{2}\right)} + \frac{N_{\mu-\rho+\sigma-n}}{\Gamma + i\left(\nu_\rho - \frac{\nu_\mu + \nu_\sigma}{2}\right)} \right] + \text{компл. сопр.} \quad (11)$$

¹ Учет асимметрии, вносимой в контур усиления этими выражениями, приводит к величинам порядка $\tilde{\nu}_j \tilde{\nu}_i / (Ku)^2$. Вклад в симметричную часть контура усиления (порядка $\tilde{\nu}_j / Ku$) можно учесть при подборе вещественной компоненты параметра $\tilde{\nu}$.

² Учет частотной зависимости параметров ε_r и ε_i приводит к величинам порядка $\tilde{\nu} \Delta / (Ku)^2$, где Δ — разность соседних собственных частот резонатора. В большинстве случаев Δ мало по сравнению с доплеровской шириной.

Здесь

$$J(\nu - \omega') = \frac{W\left(\frac{\nu_r - \omega'}{Ku} + i \frac{\Gamma}{Ku}\right)}{1 - \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}_r}{Ku} W\left(\frac{\nu_r - \omega'}{Ku} + i \frac{\Gamma}{Ku}\right)}.$$

Так как в дальнейшем нужно будет использовать значения функции $J(\nu - \omega')$ в доплеровском пределе, выпишем приближенные значения ее вещественной и мнимой компонент

$$J_r(\nu - \omega') = W_r(\nu - \omega') \left[1 + \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}_r}{Ku} W_r(\nu - \omega') \right] + \\ + W_i(\nu - \omega') 2\sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}_i}{Ku} W_r(\nu - \omega'), \quad (12a)$$

$$J_i(\nu - \omega') = W_i(\nu - \omega') \left[1 + 2\sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}_r}{Ku} W_r(\nu - \omega') \right] + \\ + W_r(\nu - \omega') \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}_i}{Ku} W_r(\nu - \omega'). \quad (12b)$$

Вещественная компонента $J(\nu - \omega')$ дает зависимость коэффициента усиления среды в линейном приближении. Легко видеть, что коэффициент усиления не является симметричной функцией, так как он зависит от нечетной функции $W_i(\nu - \omega')$. Кроме того, необходимо отметить, что максимум коэффициента усиления достигается при настройке не на атомную частоту ω , а на частоту, сдвинутую (с точностью до первого порядка относительно $|\tilde{\nu}|/Ku$) на величину $(-2\tilde{\nu}_i + \delta)$. Другими словами, генерация при достижении накачкой порогового значения возникает на частоте $(\omega - 2\tilde{\nu}_i + \delta)$.

Теперь, чтобы воспользоваться уравнениями самосогласования Лэмба [6], остается придать конкретные значения индексам суммирования μ, ρ, σ в формуле (11), выделить синфазную и квадратурную компоненты и вычислить коэффициенты для системы уравнений, определяющих амплитуды E_n и частоты ν_n

$$E_n = \alpha_n E_n - \beta_n E_n^3 - \theta_{nm} E_n E_m^2, \quad (13)$$

$$\nu_n = \Omega_n + \sigma_n + \rho_n E_n^2 + \tau_{nm}^2 E_m^2, \quad (14)$$

где $\Omega_n = n\pi \frac{c}{L}$ — собственные частоты резонатора.

Опуская промежуточные операции, представим выражения для коэффициентов $\alpha_n, \beta_n, \sigma_n, \rho_n, \theta_{nm}, \tau_{nm}$ в окончательном виде

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{2} \frac{\nu}{Q} \eta \left[\alpha'_n (1 + \varepsilon_{rn}) + \sigma'_n 2\varepsilon_{in} + \frac{\varepsilon_{rn}}{\eta} \right], \\ \sigma_n &= \frac{1}{2} \frac{\nu}{Q} \eta \left[\sigma'_n (1 + 2\varepsilon_{rn}) - \left(\alpha'_n + \frac{1}{\eta} \right) \varepsilon_{in} \right], \\ \beta_n &= F [\beta'_n (1 + 2\varepsilon_r) - \rho'_n 2\varepsilon_i], \\ \rho_n &= F [\rho'_n (1 + 2\varepsilon_r) - (\beta'_n - \beta) 2\varepsilon_i], \\ \theta_{nm} &= F [\theta'_{nm} (1 + 2\varepsilon_r) - (\tau'_{nm} \mp \tau) 2\varepsilon_i], \\ \tau_{nm} &= F [\tau'_{nm} (1 + 2\varepsilon_r) - (\theta'_{nm} - \theta) 2\varepsilon_i]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В этих выражениях и далее верхний знак соответствует случаю $m = n + 1$, а нижний — случаю $m = n - 1$. Здесь введены обозначения:

$\varepsilon_{rn} = \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}_r}{Ku} W_r(\nu_n - \omega')$, $\varepsilon_{in} = \sqrt{\pi} \frac{\tilde{\nu}_i}{Ku} W_r(\nu_n - \omega')$, ν — частота генерации, η — относительное возбуждение, Q — добротность, $F = \frac{\nu}{16} \frac{\eta}{Q} \frac{p^2}{\hbar^2} \frac{\Gamma_{ab}}{\Gamma_a \Gamma_b \Gamma}$ — вели-

чина, через которую выражаются параметры насыщения. Величины $F\alpha'_n$, $F\sigma'_n$, $F\beta'_n$, $F\rho'_n$, $F\theta'_{nm}$, $F\tau'_{nm}$ — коэффициенты, полученные в работе Лэмба [6]. Для них мы имеем следующие формулы (здесь они вычислены с несколько большей точностью):

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_n &= \frac{W_r (\nu_n - \omega')}{J_r^M} - \frac{1}{\eta}, \\ \sigma'_n &= -\frac{W_i (\nu_n - \omega')}{J_r^M}, \\ \beta'_n &= [\Gamma^2 \mathcal{L}(\omega' - \nu_n) + 1] \frac{1}{J_r^M}, \\ \rho'_n &= -\Gamma (\omega' - \nu_n) \mathcal{L}(\omega' - \nu_n) \frac{1}{J_r^M}, \\ \theta'_{nm} &= \left\{ \Gamma^2 \left[\mathcal{L}(\omega' - \nu_{12}) + \mathcal{L}\left(\frac{\Delta}{2}\right) \right] + \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma_{ab}} \frac{\Gamma}{2} \left[\frac{\Gamma \Gamma_a - \frac{\Delta^2}{2}}{\Gamma_a^2 + \Delta^2} + \frac{\Gamma \Gamma_b - \frac{\Delta^2}{2}}{\Gamma_b^2 + \Delta^2} \right] \right. \\ &\quad \times \left. \mathcal{L}\left(\frac{\Delta}{2}\right) + \frac{N_2}{N_0} \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma_{ab}} \frac{\Gamma}{2} \left[\frac{\Gamma \Gamma_a \mp \Delta (\omega' - \nu_n)}{\Gamma_a^2 + \Delta^2} + \frac{\Gamma \Gamma_b \mp \Delta (\omega' - \nu_n)}{\Gamma_b^2 + \Delta^2} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \mathcal{L}(\omega' - \nu_n) \right\} \frac{1}{J_r^M}, \\ \tau'_{nm} &= -\left\{ \Gamma \left[(\omega' - \nu_{12}) \mathcal{L}(\omega' - \nu_{12}) \pm \frac{\Delta}{2} \mathcal{L}\left(\frac{\Delta}{2}\right) \right] \pm \right. \\ &\quad \pm \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma_{ab}} \frac{\Gamma \Delta}{2} \left[\frac{\Gamma + \frac{\Gamma_a}{2}}{\Gamma_a^2 + \Delta^2} + \frac{\Gamma + \frac{\Gamma_b}{2}}{\Gamma_b^2 + \Delta^2} \right] \mathcal{L}\left(\frac{\Delta}{2}\right) + \\ &\quad \left. + \frac{N_2}{N_0} \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma_{ab}} \frac{\Gamma}{2} \left[\frac{\Gamma_a (\omega' - \nu_n) \pm \Delta \Gamma}{\Gamma_a^2 + \Delta^2} + \frac{\Gamma_b (\omega' - \nu_n) \pm \Delta \Gamma}{\Gamma_b^2 + \Delta^2} \right] \mathcal{L}(\omega' - \nu_n) \right\} \frac{1}{J_r^M}. \end{aligned} \right\} (16)$$

$\mathcal{L}(x)$ здесь означает функцию Лоренца $\frac{1}{\Gamma^2 + x^2}$, $\frac{N_2}{N_0}$ — фактор заполнения резонатора, $\nu_{12} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$ — средняя частота генерации, J_r^M — максимальное значение функции (12а),

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{1}{J_r^M}; \\ \tau &= -\left[1 + \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma_{ab}} \left(\frac{\Gamma + \frac{\Gamma_a}{2}}{\Gamma_a^2 + \Delta^2} + \frac{\Gamma + \frac{\Gamma_b}{2}}{\Gamma_b^2 + \Delta^2} \right) \right] \frac{\Gamma \Delta}{2} \mathcal{L}\left(\frac{\Delta}{2}\right) \frac{1}{J_r^M}, \\ \theta &= \left[1 + \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma_{ab}} \frac{1}{2\Gamma} \left(\frac{\Gamma \Gamma_a - \frac{\Delta^2}{2}}{\Gamma_a^2 + \Delta^2} + \frac{\Gamma \Gamma_b - \frac{\Delta^2}{2}}{\Gamma_b^2 + \Delta^2} \right) \right] \Gamma^2 \mathcal{L}\left(\frac{\Delta}{2}\right) \frac{1}{J_r^M}. \end{aligned} \right\} (17)$$

Из формул (15) и (16) видно, что «новые» коэффициенты, вычисленные с учетом столкновений, выражаются через «старые», полученные Лэмбом и обозначенные здесь теми же буквами, но штрихованными. Новые коэффициенты отличаются от лэмбовских малыми поправками, связанными с величинами $\tilde{\nu}_r/Ku$ и $\tilde{\nu}_i/Ku$. Таким образом, коэффициент усиления α_n приобретает асимметричную зависимость от расстройки благодаря тому, что в него входит коэффициент σ'_n , являющийся нечетной функцией. Аналогичным образом σ_n , определяющий линейное затягивание частоты генерации, приобретает четную зависимость от $(\nu_n - \omega')$ благодаря коэффициенту α'_n . То же самое происходит и с коэффициентами третьего порядка теории возмущений.

Сравнивая формулы (15) и (17) с формулами Форка [4], видим, что они отличаются друг от друга двумя обстоятельствами. Во-первых, в фор-

мулы (15) входят два параметра ϵ_r и ϵ_i , связанные с столкновениями, а у Форка один параметр. Но из-за того, что эти параметры малы (мы везде пренебрегали их вторыми степенями), эта разница мало сказывается на численных результатах. Во-вторых, поправки к коэффициентам третьего порядка ρ_n , θ_{nm} , τ_{nm} отличаются от форковских соответственно величинами β , $\pm\tau$ и θ (β , τ и θ являются не зависящими от частот и индекса моды частями коэффициентов β_n , τ_{nm} и θ_{nm}). Эти отличия связаны, естественно, с разницей в модельных представлениях.

Численные расчеты и обсуждение результатов

По формулам (15)–(17) были проведены численные расчеты на ЭВМ. Вычислены амплитуды и частоты биений для $\text{He}^3\text{—Ne}^{20}$ -лазера в режиме двух типов генерации. Парциальное давление гелия 1 тор, неона — 0.15 тор. Так как среднее изменение скорости излучающего атома (неона) при столк-

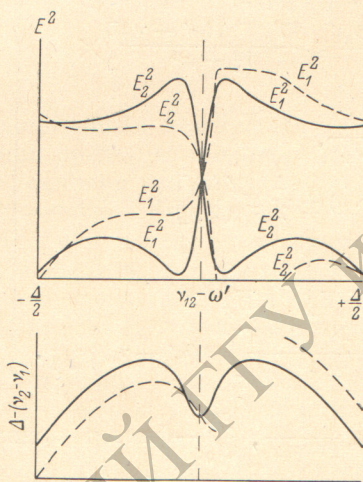


Рис. 1. Интенсивности E^2 и частота биений $\Delta - (v_2 - v_1)$ He—Ne -лазера в зависимости от расстройки $v_{12} - \omega'$.

$\nu = 4.74$ Мгц ($\lambda = 0.633$ мкм),
 $Q = 1.57 \cdot 10^8$, $Ku = 1010$ МГц, $N_2/N_0 =$
 $= -0.56$, $\eta = 1.06$, давление $\text{He}^3 - 1$ тор
 ($\Gamma_a = 12.5$ Мгц, $\Gamma_b = 26.3$ Мгц,
 $\Gamma = 66.7$ Мгц), давление $\text{Ne}^{20} - 0.15$ тор.
 Штриховые линии соответствуют случаю
 $\epsilon_r = -0.114 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon_i = 0.755 \cdot 10^{-2}$,
 сплошные линии — случаю $\epsilon_r = \epsilon_i = 0$.

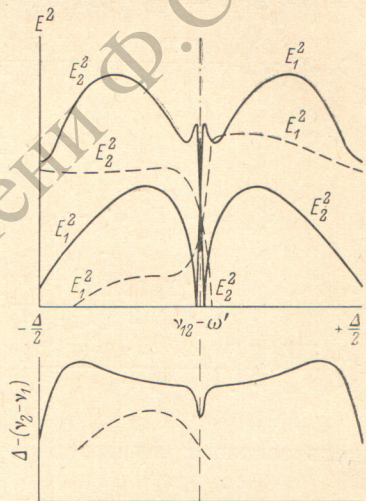


Рис. 2. Интенсивности и частота биений при относительном возбуждении $\eta = 1.05$.

Штриховые линии соответствуют следующему параметрам: давление $\text{He}^3 - 1$ тор, давление $\text{Ne}^{20} - 0.15$ тор ($\Gamma_a = 12.5$, $\Gamma_b = 26.3$ Мгц, $\Gamma = 66.7$ Мгц, $\epsilon_r = -0.114 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon_i = 0.755 \cdot 10^{-2}$). Сплошные линии соответствуют случаю, когда давление He^3 и Ne^{20} равно нулю ($\epsilon_r = \epsilon_i = 0$, $\Gamma_a = 10$ Мгц, $\Gamma_b = 13$ Мгц, $\Gamma = 11.5$ Мгц).

новениях с атомами He^3 довольно значительно — порядка одной четвертой средней тепловой скорости, мы можем воспользоваться моделью Раутиана для сильных столкновений [5]. Все основные исходные данные — рабочие уровни, времена распада, параметры резонатора — взяты из работы [3]. Величины ϵ_r и ϵ_i выбраны так, чтобы результаты расчета наилучшим образом совпадали с результатами Форка. В данном случае были использованы следующие значения: $\epsilon_r = -0.114 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon_i = 0.755 \cdot 10^{-2}$. Результаты расчета приведены на рис. 1 и 2 в виде графической зависимости амплитуд генерации и частоты биений ($v_2 - v_1 - \Delta$) от средней частоты v_2 (штриховые линии). Кривые Форка (из-за недостатка места они здесь не помещены) с ними хорошо совпадают. Имеется отчетливо выраженная асимметрия, заключающаяся в том, что для $v_{12} - \omega' < 0$ разность $|E_1^2 - E_2^2|$ меньше, чем в случае $v_{12} - \omega' > 0$. Рассматривая зависимость интенсивностей от частоты в целом, можно видеть, что одна из мод генерирует сильнее, чем

другая, которая в некотором диапазоне частот может быть подавлена. Ширина этой зоны подавления находится в обратной зависимости от относительного возбуждения. Это можно видеть, сравнивая рис. 1 ($\eta=1.06$) и рис. 2 ($\eta=1.05$). При накачках, мало превышающих пороговую, очевидно, можно реализовать одномодовый режим в весьма широком диапазоне частот. Такое неравноправное положение мод объясняется чувствительностью коэффициентов θ_{nm} , определяющих конкуренцию типов колебаний, к столкновениям — поправочные члены, связанные с столкновениями, имеют разные знаки при $\nu_{12} < \omega'$ и при $\nu_{12} > \omega'$. Аналогичные проявления асимметрии имеют место и для биений. На рис. 1 для сравнения изображены сплошными линиями амплитуды и биения в случае $\epsilon_r = \epsilon_i = 0$, т. е. когда имеется уширение уровней, но не учитываются интегралы столкновений. Здесь наблюдается полная симметрия — отсутствуют только тонкие эффекты в окрестности $\nu_{12} \approx \omega'$, которые объясняются теорией Лэмба [6], не учитывавшей столкновений. Результаты расчета по формулам Лэмба [6] представлены на рис. 2 сплошными линиями.

Автор благодарит А. В. Тулуба и Н. Н. Розанова за полезные дискуссии.

Литература

- [1] R. W. Bennet. Appl. Phys. Lett., 5, 56, 1964.
- [2] A. Szöcke, A. Javana. Phys. Rev. Lett., 10, 521, 1963.
- [3] R. Fork, M. Pollack. Phys. Rev., 139, 5A, 1408, 1965.
- [4] B. Gorffu, M. Börenstein, W. Lamb. Phys. Rev., 169, 340, 1968.
- [5] С. Г. Раутиан. ЖЭТФ, 51, 1176, 1968.
- [6] W. Lamb. Phys. Rev., 134, 6A, 1429, 1964.
- [7] Т. Л. Андреева. ЖЭТФ, 54, 641, 1968.
- [8] Т. Л. Андреева. Опт. и спектр., 25, 266, 1968.
- [9] В. Н. Фаддеева, Н. М. Терентьева. Таблицы значений интеграла вероятности от комплексного аргумента. Гостехиздат, М., 1954.

Поступило в Редакцию 11 августа 1969 г.