УДК 535.317.1 : 535.55

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСВЕЩЕННОСТИ В ИЗОБРАЖЕНИИ ТОЧКИ И ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ПРИ ДВОЙНОМ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИИ В ЭЛЕМЕНТАХ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В. А. Комиссарук

Приведены общие выражения, с помощью которых можно оценить влияние двойного лучепреломления на свойства оптической системы, работающей в естественном свете при некогерентном освещении. Для осесимметричного случая с квадратичной зависимостью разности хода от радиуса зрачка даны кривые передаточной функции.

Двойное лучепреломление как следствие разного рода напряжений часто присуще прозрачным компонентам оптических систем хотя бы в малой степени. Представляется уместным поэтому рассмотреть его влияние на качество изображения. Воспользуемся системой координат и обозначениями из обзорной работы Хопкинса [1]: там x, y — безразмерные координаты в плоскости выходного зрачка и u', v' — в плоскости изображения; $W(x, y)$ — волновая аберрация (двойное лучепреломление отсутствует), $\alpha(x, y)$ — функция амплитудного пропускания, равная нулю за пределами зрачка. Комплексная амплитуда колебания в зрачке

$$f(x, y) = \alpha(x, y)\, e^{ikW(x, y)}, \tag{1}$$

$k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны.

Распределение освещенности в изображении точки (с точностью до постоянного множителя C)

$$G(u', v') = C \left| \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int f(x, y)\, e^{i2\pi(u'x + v'y)}\, dxdy \right|^2 . \tag{2}$$

Передаточная функция при некогерентном освещении

$$D(s) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int f\left(x + \frac{s}{2}, y\right) f^*\left(x - \frac{s}{2}, y\right) dxdy}{\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int f(x, y)\, f^*(x, y)\, dxdy} . \tag{3}$$

Здесь s — приведенная частота; звездочка означает комплексно сопряженную величину.

Предположим теперь, что оптическая система обладает двойным лучепреломлением; свойства ее в этом отношении могут быть описаны разностью хода $w(x, y)$ и азимутом одного из главных направлений $\psi(x, y)$. В дальнейшем $\psi(x, y)$ — это угол между осью x и направлением поляризации быстрых лучей. Волновую аберрацию $W(x, y)$ будем понимать как среднее из величин $W_{1,2}(x, y)$, которые определяют фазу колебаний на сфере сравнения в быстром и медленном лучах. При этом

$$W_1(x, y) = W(x, y) + \frac{1}{2} w(x, y),$$

$$W_2(x, y) = W(x, y) - \frac{1}{2} w(x, y).$$

Далее примем, что оптическая система работает в естественном свете, который состоит из двух некогерентных компонент, поляризованных по направлениям осей x и y. Стандартным приемом разложим колебания в каждой точке зрачка x, y по тем же направлениям. Складывая освещенности от колебаний, поляризованных взаимно перпендикулярно или некогерентных, находим функцию рассеяния в изображении точки

$$G_w(u', v') = \frac{1}{2} C \left[\left| \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x, y) \left(\cos^2 \psi(x, y)\, e^{ikW_1(x, y)} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \sin^2 \psi(x, y)\, e^{ikW_2(x, y)} \right) e^{i2\pi(u'x+v'y)}\, dxdy \right|^2 + 2 \left| \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x, y) \cos \psi(x, y) \sin \psi(x, y) \times \right.$$

$$\left. \times \left(e^{ikW_1(x, y)} - e^{ikW_2(x, y)} \right) e^{i2\pi(u'x+v'y)}\, dxdy \right|^2 + \left| \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x, y) \left(\sin^2 \psi(x, y) \times \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times e^{ikW_1(x, y)} + \cos^2 \psi(x, y)\, e^{ikW_2(x, y)} \right) e^{i2\pi(u'x+v'y)}\, dxdy \right|^2 \right].$$

После некоторых преобразований, формально используя обозначение (1), получим

$$G_w(u', v') = C \left(\left| \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{1}{2} kw(x, y) f(x, y)\, e^{i2\pi(u'x+v'y)}\, dxdy \right|^2 + \right.$$

$$+ \left| \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\psi(x, y) \sin \frac{1}{2} kw(x, y) f(x, y)\, e^{i2\pi(u'x+v'y)}\, dxdy \right|^2 +$$

$$\left. + \left| \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin 2\psi(x, y) \sin \frac{1}{2} kw(x, y) f(x, y)\, e^{i2\pi(u'x+v'y)}\, dxdy \right|^2 \right). \tag{4}$$

Обозначим

$$\cos \frac{1}{2} kw(x, y) f(x, y) = f_1(x, y),$$

$$\cos 2\psi(x, y) \sin \frac{1}{2} kw(x, y) f(x, y) = f_2(x, y),$$

$$\sin 2\psi(x, y) \sin \frac{1}{2} kw(x, y) f(x, y) = f_3(x, y).$$

Выражение для передаточной функции, если его выводить из (4) таким же путем, как (3) из (2), выглядит следующим образом:

$$D_w(s) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{j=3} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f_j\left(x+\frac{s}{2},\, y\right) f_j^*\left(x-\frac{s}{2},\, y\right) dx\,dy}{\sum\limits_{j=1}^{j=3} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f_j(x,\, y)\, f_j^*(x,\, y)\, dx\,dy}.$$

После подстановки и упрощений

$$D_w(s) = \frac{\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_w(x,\, y,\, s)\, f\left(x+\frac{s}{2},\, y\right) f^*\left(x-\frac{s}{2},\, y\right) dx\,dy}{\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\, y)\, f^*(x,\, y)\, dx\,dy}, \tag{5}$$

где

$$\Gamma_w(x,\, y,\, s) = \cos\frac{1}{2}kw\left(x+\frac{s}{2},\, y\right)\cos\frac{1}{2}kw\left(x-\frac{s}{2},\, y\right) +$$
$$+ \cos 2\times\left[\psi\left(x+\frac{s}{2},\, y\right)-\psi\left(x-\frac{s}{2},\, y\right)\right]\sin\frac{1}{2}kw\left(x+\frac{s}{2},\, y\right)\sin\frac{1}{2}kw\left(x-\frac{s}{2},\, y\right).$$

Коэффициент, тождественный множителю $\Gamma_w(x, y, s)$, определяет интенсивность двухлучевой интерференции в присутствии двойного лучепреломления [2]. В этом можно убедиться и с помощью выражения (4), заменив в правой части двойной интеграл суммой двух слагаемых. Подобного результата следовало ожидать, зная о способе измерения передаточной функции посредством интерферометра со сдвигом волновых фронтов. Математическое обоснование этого способа [1] нетрудно видоизменить применительно к оптической системе с двойным лучепреломлением.

Рассмотрим полученные выражения (4) и (5). При $w(x, y) \equiv 0$ (двойное лучепреломление отсутствует) или $w(x, y) \equiv \mathrm{const}$, $\psi(x, y) \equiv \mathrm{const}$ (оптическая система содержит двоякопреломляющую пластинку) они переходят соответственно в (2) и (3). Еще один тривиальный случай — в оптической системе имеется двоякопреломляющий клин. Тогда $\psi(x, y) = \psi_0$ (азимут главного сечения клина), $w(x, y) = w_{00} + w_{10}(x\cos\psi_0 + y\sin\psi_0)$, ($w_{00}$ и w_{10} — некоторые постоянные).

Элементарные представления о двоении точки подсказывают, что функцию рассеяния можно выразить, используя обозначение (2), в виде суммы

$$G_w(u',\, v') = \frac{1}{2}\left[G\left(u'+\frac{1}{2}u_0',\ v'+\frac{1}{2}v_0'\right) + G\left(u'-\frac{1}{2}u_0',\ v'-\frac{1}{2}v_0'\right)\right],$$

причем

$$u_0' = \frac{w_{10}\cos\psi_0}{\lambda}, \quad v_0' = \frac{w_{10}\sin\psi_0}{\lambda}.$$

То же получается из (4).

Далее,

$$D_w(s) = \cos(\pi u_0' s)\, D(s),$$

где $D(s)$ имеет вид (3). Этот результат непосредственно следует из (5).

Рассмотрим теперь частный случай, имеющий некоторое практическое значение: перед безаберрационной оптической системой находится защитное стекло с температурой, квадратично изменяющейся по радиусу. Неоднородность температуры вызывает как общее изменение кривизны волнового фронта, так и двойное лучепреломление из-за термоупругих напряжений. Ввиду осевой симметрии положим

$$W(x, y) = W_{20}\rho^2,$$

$$w(x, y) = w_{20}\rho^2,$$

$$\psi(x, y) = \varphi \left(\text{или } \varphi \pm \frac{\pi}{2}\right).$$

Здесь W_{20} и w_{20} — соответствующие постоянные, в первой учитывается и возможность фокусировки; $\rho^2 = x^2 + y^2$, φ — азимутальный угол полярных координат.

Найдем выражение для числа Штреля E, принимая $\alpha(x, y) \equiv 1$ по зрачку, а сам зрачок круглым. Это число в данном случае равно отношению $G_w(0, 0)$ к значению этой же величины при $W_{20} = 0$, $w_{20} = 0$. После интегрирования и элементарных преобразований получается

$$E = \frac{1}{4}\left\{\left[\frac{\sin\frac{1}{2}k\left(W_{20} + \frac{1}{2}w_{20}\right)}{\frac{1}{2}k\left(W_{20} + \frac{1}{2}w_{20}\right)}\right]^2 + \left[\frac{\sin\frac{1}{2}k\left(W_{20} - \frac{1}{2}w_{20}\right)}{\frac{1}{2}k\left(W_{20} - \frac{1}{2}w_{20}\right)}\right]^2 + \right.$$

$$\left. + 2\,\frac{\sin\frac{1}{2}k\left(W_{20} + \frac{1}{2}w_{20}\right)}{\frac{1}{2}k\left(W_{20} + \frac{1}{2}w_{20}\right)}\,\frac{\sin\frac{1}{2}k\left(W_{20} - \frac{1}{2}w_{20}\right)}{\frac{1}{2}k\left(W_{20} - \frac{1}{2}w_{20}\right)}\cos\frac{1}{2}kw_{20}\right\}. \qquad (6)$$

Разложение в ряд при малых значениях W_{20} и w_{20} дает

$$E \approx 1 - \frac{1}{12}k^2\left(W_{20}^2 + w_{20}^2\right).$$

Последнее равенство говорит о том, что при малых величинах w_{20} условие оптимальной фокусировки $W_{20} = 0$. При этом

$$E = \left(\frac{\sin\frac{1}{2}kw_{20}}{\frac{1}{2}kw_{20}}\right)^2. \qquad (6')$$

Принято считать, что изображение будет высокого качества, если $E \geqslant 0.8$. Этому соответствует, в согласии с критерием Рэлея, $w_{20} \leqslant \lambda/4$.

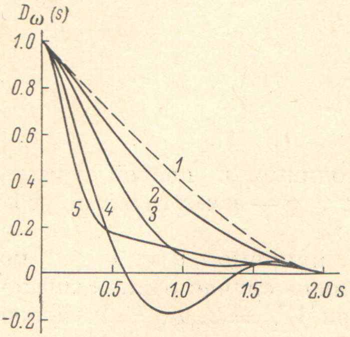
Передаточная функция при осевой симметрии принимает только действительные значения. Следующее выражение было использовано для вычислений на ЭВМ:

$$D_w(s) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_S \left[\cos(kw_{20}sx) - \frac{1}{2}(kw_{20}sy)^2\,\frac{\sin\frac{1}{2}kw_{20}\left[\left(x + \frac{s}{2}\right)^2 + y^2\right]}{\frac{1}{2}kw_{20}\left[\left(x + \frac{s}{2}\right)^2 + y^2\right]} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\sin\frac{1}{2}kw_{20}\left[\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 + y^2\right]}{\frac{1}{2}kw_{20}\left[\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 + y^2\right]}\right]\cos(2kW_{20}sx)\,dxdy.$$

[Область интегрирования S — общая площадь двух кругов с центрами в точках $\pm s/2$, 0. Расчетная формула получена из (5) с использованием соотношений в треугольнике, две вершины которого — центры кругов, а третья — точка x, y].

Результаты расчетов даны на рисунке. Прерывистая кривая *1* приведена для сравнения; она представляет передаточную функцию совершенной оптической системы с круглым зрачком. Кривые *2—4* рассчитаны при $W_{20}=0$, $w_{20}=\lambda/4$, $\lambda/2$ и λ соответственно. Хорошо видно снижение контраста по сравнению с кривой *1*. Кривая *4* показывает обращение контраста в области средних частот.



Передаточная функция при различных значениях разности хода на краю зрачка.

Кривая *1*: $W_{20}=0$, $w_{20}=0$; кривые *2—4*: $W_{20}=0$, $w_{20}=\frac{1}{4}\lambda, \frac{1}{2}\lambda$ и λ соответственно; кривая *5*: $W_{20}=0.68\lambda$, $w_{20}=\lambda$.

Из (6′) видно, что кривой *4* отвечает $E=0$. Численное исследование (6) при $w_{20}=\lambda$ дает для оптимальной фокусировки $W_{20}=\pm 0.68\ \lambda$ (тогда E принимает наибольшее значение). Сочетанию $w_{20}=\lambda$, $W_{20}=0.68\ \lambda$ соответствует кривая *5*. Сопоставив ее с кривой *4*, видим, что здесь ценой ухудшения передачи контраста на низких частотах удается до некоторой степени исправить передаточную функцию в области средних частот. При частотах $s\simeq 0.9-1.5$ кривая *5* лежит даже выше кривой *3*.

В заключение отметим следующее любопытное обстоятельство: если для каких-либо частот при некотором w_{20} полезно иметь $W_{20}\neq 0$, то для них существуют две плоскости наилучшего изображения, так как оба знака у коэффициента фокусировки равноправны в выражении для передаточной функции.

Автор приносит благодарность А. Г. Беляеву за программирование вычислений.

Литература

[1] H. H. Hopkins. Proc. Phys. Soc., *79*, 889, 1962.
[2] В. А. Комиссарук. Опт. и спектр., *27*, 845, 1969.

Поступило в Редакцию 23 декабря 1969 г.