

ВЛИЯНИЕ АБЕРРАЦИЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ТОЧНОСТЬ НОНИАЛЬНОГО СОВМЕЩЕНИЯ ШТРИХОВ

М. Н. Сокольский

Рассмотрен вопрос о влиянии aberrаций оптической системы на точность нониального совмещения штрихов. Приводятся формулы для определения предельно разрешаемого глазом сдвига штрихов, имеющих различный контраст и проецирующихся оптическими системами с различными значениями aberrаций. На примерах aberrаций 1-го порядка иллюстрируется применение полученных формул.

Важным вопросом разработки точных оптико-механических отсчетных систем является применение точных методов совмещения штрихов. Одним из широко распространенных методов является нониальное совмещение, когда совмещаются торцевыми частями два одинаковых штриха. Aberrации оптической системы могут сильно понижать точность совмещения, особенно, если оно производится по изображениям, даваемым различными частями оптической системы с различными значениями aberrаций. Представлялось целесообразным исследование влияния aberrаций оптической системы на точность нониального совмещения штрихов.

Известно, что угловой предел разрешения двух параллельных линий или отрезков этих линий совпадает с угловым пределом разрешения двух точек при одинаковых условиях наблюдения и достигает значения порядка $\rho = \lambda/2\beta$, где λ — длина волны, β — апертурный угол. Но глаз обладает большой чувствительностью при наблюдении прямой линии, претерпевающей в какой-либо точке сдвиг. Смещение черты нониуса относительно черты основной шкалы можно заметить, когда угловая величина расстояния между обеими чертами равна $\frac{1}{5} : \frac{1}{6}$ величины углового предела разрешения глаза. В работе [1] показано, что повышение разрешения объясняется не при помощи гипотетических свойств, приписываемых глазу, а явлением дифракции. Падение освещенности на линии раздела в случае сдвига штрихов обнаруживается глазом, так как максимальное значение освещенности в направлениях, параллельных линии раздела и смещенных от нее на величину более диаметра диска Эри, остается неизменным, и глаз видит между двумя одинаковыми освещенностями несколько меньшую освещенность.

При рассмотрении влияния aberrаций оптической системы остановимся на двух случаях: I — штрихи (линии) бесконечно узкие; II — штрихи конечной ширины.

I. Представим объект в виде двух светлых линий на темном фоне рис. 1, проведенных параллельно оси $O'Z'$. Линии (штрихи) можно охарактеризовать функцией, которая всюду равна нулю, исключая бесконечно малый интервал $0 < y < a$ для первой линии и $\delta < a + \delta$ для второй, где δ — величина сдвига одной линии относительно другой, a — ширина линии ($a \ll$ радиуса дифракционного кружка изображения ρ). Распределение освещенности в изображении светлой линии, являющейся функцией только y' в случае некогерентного освещения, равно [2]

$$E'(y') = \frac{aR^2}{\lambda} \int |f(\gamma', y')|^2 d\gamma', \quad (1)$$

где

$$f(\gamma', y') = E_0 \int \exp i \frac{2\pi}{\lambda} [N(\beta', \gamma') - \beta' y'] d\beta'. \quad (2)$$

Здесь $N(\beta', \gamma')$ — волновая aberrация; β', γ' — направляющие косинусы радиуса сферы сравнения R .

Глаз различит смещение одной линии относительно другой, если различны освещенности на границе раздела $z'=0$ и при $z' > \pm 2\rho$. При наличии только симметричных aberrаций в оптической системе максимальное значение освещенности будет находиться в точке $y' = \delta/2$ ($a \ll \delta$). В направлении оси $O'Z'$ распределение освещенности в изображении края линии аналогично распределению в изображении границы светлого поля. Тогда в точке $y'=0$; $z'=0$ освещенность в два раза меньше, чем в точке $y'=0$, $z' \gg 2\rho$.

Будем полагать, что изображение линий даются различными оптическими системами, волновые aberrации которых $N_1(\beta'_1, \gamma'_1)$ и $N_2(\beta'_2, \gamma'_2)$. Здесь и в дальнейшем индексы 1, 2 относятся к оптическим системам, проецирующим соответственно линии 1, 2.

Относительное распределение освещенности на границе раздела ($z'=0$) в изображении щелей равно сумме освещенностей $E(y')$, возникающих на границе при изображении каждой прямой в отдельности

$$E'(y') = \frac{1}{2} [A_1 E'_1(y') + m A_2 E'_2(y')], \quad (3)$$

где A_1, A_2 — нормирующие множители, m — контраст линий в плоскости изображения (отношение освещенностей линий). Для m имеем

$$m = \frac{\tau_2 E_2 \sin^2 \beta'_2 E'_2(y'=0)}{\tau_1 E_1 \sin^2 \beta'_1 E'_1(y'=0)}. \quad (4)$$

Здесь τ_1, τ_2 — коэффициенты пропускания систем, β'_1, β'_2 — задние апертурные углы; E_1, E_2 — удельные спектральные светности линий в плоскости предмета.

Из формул (1), (2) для каждой из систем, проецирующих линию при квадратном зрачке со сторонами $2c$, имеем

$$E'(y') = A \int_{-\beta}^{\beta} \left| \int_{-\beta}^{\beta} \exp i \frac{2\pi}{\lambda} [N(\beta', \gamma') - \beta' y'] d\beta' \right|^2 d\gamma', \quad (5)$$

или

$$E'(y') = A \int_{-\beta}^{\beta} \left[\left(\int_{-\beta}^{\beta} \cos \frac{2\pi}{\lambda} [N(\beta'_1, \gamma') - \beta'_1 y'] d\beta'_1 \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\int_{-\beta}^{\beta} \sin \frac{2\pi}{\lambda} [N(\beta'_1, \gamma') - \beta'_1 y'] d\beta'_1 \right)^2 \right] d\gamma', \quad (6)$$

где $\beta = \frac{c}{R}$, A — нормирующий множитель. $E'(y')$ нормирована так, что при $y'=0$ $E'(y')=1$.

После подстановки в (3) выражения (5) или (6), введя соответствующие индексы 1 и 2, получим окончательное выражение для распределения освещенности на границе раздела

$$\begin{aligned} E(y') = \frac{1}{2} \left\{ A_1 \int_{-\beta_1}^{\beta_1} \int_{-\beta_1}^{\beta_1} \exp i \frac{2\pi}{\lambda} [N_1(\beta'_1, \gamma'_1) - \beta'_1 y'] d\beta'_1 d\gamma'_1 + \right. \\ \left. + m A_2 \int_{-\beta_2}^{\beta_2} \int_{-\beta_2}^{\beta_2} \exp i \frac{2\pi}{\lambda} [N_2(\beta'_2, \gamma'_2) - \beta'_2 y'] d\beta'_2 d\gamma'_2 \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

В случае малых аберраций $E'(y')$ из (5) можно представить в виде

$$E'(y') = A \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\beta}^{\beta} \left[1 + i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta' - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta' \right)^2 \right] d\beta' d\gamma', \quad (8)$$

где

$$\Delta' = N(\beta', \gamma') - \beta' y'. \quad (9)$$

Отсюда с точностью до квадратичных членов имеем

$$E'(y') = A \left[8\beta^3 - 2\beta \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\beta}^{\beta} (\Delta')^2 d\beta' d\gamma' + \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \int_{-\beta}^{\beta} \left(\int_{-\beta}^{\beta} \Delta' d\beta' \right)^2 d\gamma' \right]. \quad (10)$$

В случае малых аберраций мы ограничились тремя членами разложения подынтегральной функции выражения (5) по аналогии со случаем влияния малых аберраций в изображении точки, выполненных в работе [2]. Как будет показано ниже, такое допущение справедливо лишь при весьма малых аберрациях, меньших $\frac{\lambda}{4}$.

Видимость смещения одной линии относительно другой определяется выражением

$$1 - \bar{E}(y') \geq k, \quad (11)$$

где k — некоторое число, установленное экспериментально. По данным Селвина [3], $k = 0.032 \pm 0.017$.

Максимальное значение $\bar{E}(y')$ из (7) лежит в точке $y' = \frac{\delta}{2}$ при наличии симметричных аберраций и в точке $y' = \frac{\delta}{2} + s$ [где s — смещение максимума функции $E'(y')$ относительно оси $O'Z'$] при наличии несимметричных аберраций.

Следует отметить, что $E'(y')$ нормирована так, что максимальное значение освещенности в направлении, параллельном линии раздела, по мере увеличения расстояния от линии раздела стремится к значениям $\bar{E}'_{\max} = 1$ на линии 1 ($z' \ll 0$) и $\bar{E}'_{\max} = m$ на линии 2 ($z' \gg 0$). При этом полагаем $m \geq 1$.

Таким образом, формула (7) позволяет установить влияние аберраций оптической системы на точность нониального совмещения линий, т. е. установить допустимые значения аберраций при заданном значении δ , либо для оптической системы с известными аберрациями установить $\delta_{\text{пред}}$.

В случае совершенной оптической системы (т. е. свободной от аберраций) $\bar{E}'_{\max}$ из (7) равно

$$E'_{\max} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} \beta_1 \frac{\delta}{2}}{\left(\frac{2\pi}{\lambda} \beta_1 \frac{\delta}{2} \right)^2} + m \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} \beta_2 \frac{\delta}{2}}{\left(\frac{2\pi}{\lambda} \beta_2 \frac{\delta}{2} \right)^2} \right]. \quad (12)$$

При $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ величина k из (11) имеет вид

$$k \approx 1 - \frac{1+m}{2} \left[1 - \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda} \beta \delta \right)^2}{12} \right]. \quad (13)$$

Отсюда для наименьшего заметного сдвига $\delta_{\text{пред.}}$ имеет место формула

$$\delta_{\text{пред.}} \approx \sqrt{\left(1 - \frac{2(1-k)}{1+m} \right)} \frac{\lambda}{12 \cdot 2\pi\beta}. \quad (14)$$

При $m=1$ получаем известную формулу для $\delta_{\text{пред.}}$ [1]

δ	Δ			$\delta_{\text{пред.}} \approx 2 \sqrt{3k} \frac{\lambda}{2\pi\beta}$ (15)
	0	$\frac{\lambda}{2\beta^2}$	$\frac{\lambda}{\beta^2}$	
$\frac{\lambda}{16\beta}$	0.0128	0.0119	0.0078	Давая значения Селвина, находим предельное значение в угловой мере — $12'' \div 4''$ (при диаметре зрачка 2 мм), что хорошо совпадает с экспериментальными данными. При $m=2$ $\delta_{\text{пред.}}$ уменьшается более чем в 3 раза. В качестве примера применения полученных формул остановимся на случае, когда
$\frac{\lambda}{10\beta}$	0.0325	0.0302	0.0197	
$\frac{\lambda}{8\beta}$	0.0504	0.0468	0.0305	

в оптической системе присутствуют aberrации 1-го порядка: дефокусировка, хроматизм увеличения, хроматизм положения. Рассмотрим широко применяемый в практике случай одинаково контрастных линий, проектируемых общей оптической системой ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $m=1$).

Формула (7) преобразуется к виду

$$\bar{E}(y') = \int_{-\beta}^{\beta} \left| \int_{-\beta}^{\beta} \exp i \frac{2\pi}{\lambda} [N(\beta'\gamma') - \beta'y'] d\beta' \right|^2 d\gamma', \quad (16)$$

а k равно

$$k = 1 - \frac{\bar{E}(y' = \frac{\delta}{2})}{\bar{E}(y' = 0)}. \quad (17)$$

а. Ошибка дефокусировки

$$N(\beta', \gamma') = \frac{y^2 + z^2}{2R^2} \Delta, \quad (18)$$

где y, z — координаты в плоскости выходного зрачка, Δ — выраженная в линейной мере величина дефокусировки. Очевидно, что $\beta' = y/R$, $\gamma' = z/R$.

Подставив (18) и (16) в (17), получаем значения k в зависимости от Δ и δ . Результаты расчетов сведены в таблицу. Видно, что при $\Delta \leq \lambda/2\beta^2$ величина k практически не меняется по сравнению со случаем $\Delta=0$. Величину $\Delta = \lambda/2\beta^2$ можно принять в качестве допуска на дефокусировку в оптических системах с нониальным совмещением штрихов.

Для малых aberrаций (16) с учетом (10) преобразуется к виду

$$\bar{E}(y') = \left[1 - \beta^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{\delta^2}{12} - \frac{1}{45} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \Delta^2 \beta^4 \right]. \quad (19)$$

При $\delta = \lambda/10\beta$ и Δ , равных $\lambda/2\beta^2$ и λ/β^2 ($N = \lambda/4$, $\lambda/2$), получаем значения, равные соответственно 0.0422 и 0.2281. Сравнивая эти значения со

значениями, полученными по точным формулам, видим, что даже при $N = \lambda/4$ погрешность расчета по приближенным формулам велика (30%), а при $N = \lambda/2$ формула не применима. Формулой (19) удобно пользоваться при $\delta < \lambda/10\beta$ и $\Delta < \lambda/2\beta^2$.

б. Хроматизм увеличения

$$N(\beta', \gamma') = \Delta_1(\lambda) \frac{y}{R}, \quad (20)$$

где $\Delta_1(\lambda)$ — хроматическая аберрация увеличения равна разности ординат в плоскости изображения точек пересечения двух лучей различных цветов, идущих из одной и той же точки объекта, с плоскостью изображения некоторого основного света.

Значение освещенности в направлении y' получаем, если проинтегрируем (16) по длинам волн

$$E'(y') = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{p_\lambda}{\lambda} \left\{ \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\beta}^{\beta} \exp i \frac{2\pi}{\lambda} [N(\beta', \gamma') - \beta' y'] d\beta' \right\}^2 d\gamma' d\lambda, \quad (21)$$

где p_λ — весовые коэффициенты, характеризующие спектральную чувствительность приемника, спектральную яркость источника. Для малых аберраций $E'_{\max}$ из (21) приобретает вид

$$E'_{\max}(y' = \frac{\delta_1}{2}) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{p_\lambda}{\lambda} \left[1 - \frac{\beta^2 \delta_1^2}{12} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{\beta^2}{3} (\Delta_1(\lambda) - \Delta_1(\lambda) \delta_1) \right] d\lambda. \quad (22)$$

Здесь $\frac{\delta_1}{2} = s + \frac{\delta}{2}$. Величину смещения максимума освещенности в случае малых аберраций легко найти из условия

$$\frac{\partial E'_{\max}(y')}{\partial y'} = 0.$$

Тогда

$$s = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{p_\lambda}{\lambda^3} \Delta_1(\lambda) d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{p_\lambda}{\lambda^3} d\lambda}. \quad (23)$$

Смещение максимума на s может особенно существенно повлиять на точность совмещения, если хроматизм увеличения присутствует в одной из оптических систем, проецирующих штрих. В качестве примера установим допуск на точность изготовления отражающей призмы, расположенной перед объективом автоколлиматора и выполняющей роль автоколлимационного зеркала. Хроматическая аберрация равна

$$\Delta_1(\lambda) = f' \sigma (n_\lambda - n_{\lambda_0}), \quad (24)$$

где f' — фокусное расстояние объектива; σ — угол клина развернутой в плоскопараллельную пластину призмы; n_λ, n_{λ_0} — показатели преломления стекла призмы для длины волны λ и основной длины волны λ_0 .

Примем в качестве p_λ произведение $b_\lambda v_\lambda$, где b_λ — спектральная яркость источника, v_λ — спектральная чувствительность глаза. Полагаем, что источник излучает как черное тело с температурой $T = 5000^\circ \text{K}$. Из формулы (23) для призмы из стекла К8 при $\sigma = 2'$, $f' = 200$ мм, $\lambda_1 = 0.4 \times 10^{-3}$ мм, $\lambda_2 = 0.7 \cdot 10^{-3}$ мм, $\lambda_0 = 0.56 \cdot 10^{-3}$ мм получаем $s = 0.034\mu$, что

составляет в угловой мере (при диаметре зрачка 2 мм) около $2''$. Эта величина близка к s , полученному из формулы (21). Допуская $s = 2''$, получаем $\sigma_{\text{пред.}} = 2'$.

в. Хроматизм положения

$$N(\beta', \gamma') = \Delta_2(\lambda) \frac{y'^2 + z'^2}{2R^2}. \quad (25)$$

Здесь $\Delta_2(\lambda)$ — хроматическая aberrация, равная

$$\Delta_2(\lambda) = s'_\lambda - s'_{\lambda_0}, \quad (26)$$

где s'_λ — расстояние плоскости параксиального изображения, соответствующего длине волны λ , от последней по-

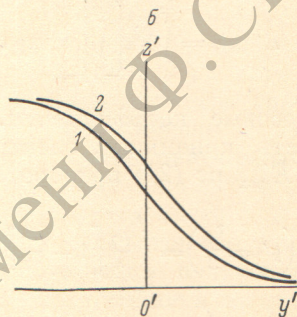
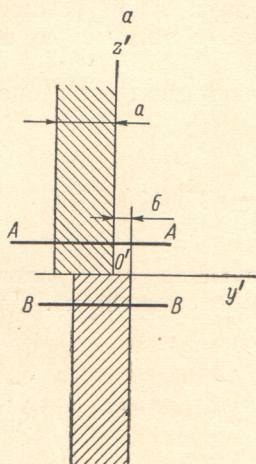


Рис. 2.

верхности. После подстановки (25) в (21) при $y' = \delta/2$ получаем $\bar{E}'_{\text{max}}(y')$. Для малых aberrаций $\bar{E}'_{\text{max}}$ равно

$$\bar{E}'_{\text{max}} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{p_\lambda}{\lambda} \left\{ 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{\beta^2 \delta^2}{12} - \frac{1}{45} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 [\Delta_2(\lambda)]^2 \beta^4 \right\} d\lambda. \quad (27)$$

В качестве примера вычислим по точным формулам k для визирной зрительной трубы с двухлинзовым объективом, выполненном из стекла К8 и Ф1 и ахроматизированным для линий C и F . Значения p_λ , пределов интегрирования, фокусного расстояния взяты из предыдущего примера.

Тогда при $\beta = 0.1$ для $\delta = \lambda_0/103$ получаем $k = 0.0306$. Вторичный спектр $s'_{\lambda_C, F} - s'_{\lambda_0} \approx 0.1$ мм.

Видно, что несмотря на значительную волновую aberrацию (волновая aberrация для длины волны $\lambda_F = 0.486 \cdot 10^{-3}$ мм равна одной длине волны) величина k незначительно изменилась по сравнению с безaberrационной системой, где $k = 0.0325$. Погрешность вычисления с помощью формулы (27) более 30%.

II. Распределение освещенности в изображении линии конечной ширины — a (рис. 2, а), — являющейся функцией только y' , имеет вид

$$E'_a(y') = \int_0^a E'(y' - y) dy, \quad (28)$$

где $E'(y')$ определяется формулой (5). Расчеты показывают, что, например, при $m=1$, $N(\beta', \gamma')=0$ и при $a \geq \lambda/2 \beta$ величина k существенно уменьшается по сравнению с бесконечно узкой щелью. Однако из практики известно, что и при широких щелях величина сдвига, разрешаемого глазом, в 5—6 раз меньше углового предела разрешения. Это объясняется тем,

что на границе раздела ($z'=0$) при малых сдвигах происходит заметное изменение освещенности, хотя и не обнаруживается аналогии с распределением освещенности на границе двух линий. На рис. 2, б показано распределение освещенности вдоль направлений AA и BB , расположенных вблизи границы раздела. Можно показать, что при щелях $a > 2\rho$ распределение освещенностей в изображении края линии практически не отличается от изображения границы светлого поля ($a=\infty$). Тогда изменение освещенности на краю щелей вдоль y' при сдвиге их на δ равно

$$\Delta E' = \frac{\partial E'_a(y'=0)}{\partial y'} \delta = E'(0) \delta. \quad (29)$$

Можно считать аберрации оптической системы допустимыми, если отношение $\Delta E'$ при наличии аберраций к $\Delta E'_0$ для совершенной системы не менее 0.8. Для квадратного зрачка получаем

$$\frac{\Delta E'}{\Delta E'_0} = \frac{E'(0)}{8\beta^3} \geq 0.8. \quad (30)$$

Можно показать, что установленные допуски на аберрации в случае бесконечных тонких линий удовлетворяют условию (30). Поэтому при рассмотрении влияния аберраций можно пользоваться приведенными выше формулами для случая бесконечно узких линий.

Автор благодарен Д. Ю. Гальперну за ценные советы и помощь в работе.

Литература

- [1] Д. Ю. Гальперн. ЖТФ, 16, 925, 1946.
- [2] А. Марешаль, М. Франсон. Структура оптического изображения. Изд. «Мир», М., 1964.
- [3] E. W. H. Selwin. Proc. Phys. Soc., 55, 310, 268, 1943.

Поступило в Редакцию 30 августа 1969 г.