УДК 621.375.9 : 535

ВРАЩАЮЩИЙСЯ КОЛЬЦЕВОЙ РЕЗОНАТОР С НЕВЗАИМНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

А. М. Волков и *В. А. Киселев*

На основе общей теории относительности и теории электромагнитного поля для сплошных сред выведены ковариантные уравнения, которые описывают распространение электромагнитных волн в анизотропной оптически активной среде, покоящейся в произвольной неинерциальной системе отсчета или находящейся в гравитационном поле. Исследованы резонансные свойства кольцевого резонатора с невзаимным элементом, вращающегося с постоянной угловой скоростью вместе с заполняющей его средой.

В работе [1] на основе общей теории относительности и теории электромагнитного поля для сплошных сред получены ковариантные уравнения, которые описывают распространение электромагнитных волн в изотропной оптически неактивной среде, покоящейся в произвольной неинерциальной системе отсчета. С помощью полученных уравнений исследованы резонансные свойства кольцевого резонатора, вращающегося вместе с заполняющей его изотропной средой. Однако для объяснения ряда явлений, наблюдающихся в кольцевом лазере с невзаимным элементом (например, ячейкой Фарадея), оказывается весьма существенной анизотропность и оптическая активность среды.

В данной работе выведены ковариантные уравнения, описывающие распространение электромагнитных волн в анизотропной среде, покоящейся в любой неинерциальной системе отсчета или находящейся в гравитационном поле. На основе полученных уравнений развита макроскопическая теория находящегося в неинерциальной системе отсчета невзаимного элемента, который применяется в кольцевых лазерах для создания постоянного начального сдвига частот встречных волн.

Электродинамика неинерциальных анизотропных сред

Ковариантные уравнения Максвелла имеют вид [2, 3]

$$H^{\alpha\beta}_{;\beta} = -\frac{4\pi}{c} j^{\alpha}, \quad F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = 0, \tag{1}$$

где $H^{\alpha\beta}$ и $F_{\alpha\beta}$ — контравариантный и ковариантный тензоры электромагнитного поля, j^{α} — четырехвектор тока. Здесь и далее греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ пробегают значения 0, 1, 2, 3, латинские $i, j, k, \ldots$ — значения 1, 2, 3 и по дважды повторяющимся индексам проводится суммирование.

Если ввести трехмерные векторы по схеме [4]

$$\left.\begin{aligned} &D_i = \sqrt{-g}\, H^{i0}, \quad H_i = -\frac{1}{2} e_{ikl} \sqrt{-g}\, H^{kl}, \\ &E_i = F_{0i}, \quad B_i = -\frac{1}{2} e_{ikl} F_{kl}, \quad J_i = \sqrt{-g}\, j^i \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и плотность заряда

$$\rho = \sqrt{-g}\, \frac{j^0}{c},$$

то ковариантные уравнения (1) можно записать в векторной форме

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}, &\qquad &\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0,\\ &\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho, & &\operatorname{div}\mathbf{B}=0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

В формулах (2) e_{ikl} — совершенно антисимметричный единичный трехмерный псевдотензор 3-го ранга, $g=\|g_{\alpha\beta}\|$ — определитель четырехмерного метрического тензора.

Дифференциальные уравнения поля (1) и (3) остаются справедливыми не только для вакуума и изотропной материальной среды [1], но и в случае анизотропной среды. Свойства среды сказываются только на виде уравнений, устанавливающих зависимость между компонентами электромагнитных тензоров $H^{\alpha\beta}$ и $F_{\alpha\beta}$, т. е. между векторами поля $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$. Поэтому основная задача состоит в выводе указанных соотношений.

Свойства анизотропной среды, покоящейся в инерциальной системе отсчета в отсутствие гравитационных полей, по отношению к электромагнитным волнам определяются тензорами диэлектрической ε_{ik} и магнитной μ_{ik} проницаемостей, устанавливающими линейную связь между векторами индукций $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ и напряженностей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ электромагнитного поля

$$D_i=\varepsilon_{ik}E_k,\qquad H_i=\mu^{-1}_{ik}B_k\quad(\text{или } B_i=\mu_{ik}H_k), \tag{4}$$

где

$$\mu_{ik}\mu^{-1}_{kj}=\delta_{ij}.$$

Компоненты тензоров ε_{ik} и μ_{ik} (а следовательно, и μ^{-1}_{ik}) в общем случае являются комплексными. Для непоглощающих сред диэлектрический и магнитный тензоры эрмитовы

$$\varepsilon_{ik}=\varepsilon^*_{ki},\qquad \mu^{-1}_{ik}=\mu^{-1*}_{ki}. \tag{5}$$

При выводе ковариантных материальных соотношений, которые связывают векторы электромагнитного поля в изотропной оптически неактивной среде, покоящейся в произвольной системе отсчета, мы рассматривали [1] величины ε и μ как компоненты смешанного четырехмерного тензора 4-го ранга $S^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$, который в этом случае можно было записать в виде «развертки» тензора 2-го ранга

$$S^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}=S^{\alpha}_{\gamma}S^{\beta}_{\nu}.$$

В случае анизотропной среды компонентами смешанного четырехмерного тензора 4-го ранга $S^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$ являются величины ε_{ik} и μ^{-1}_{ik}. Так как 18 независимых величин ε_{ik} и μ^{-1}_{ik} не могут быть приведены в соответствие с 16 компонентами четырехмерного тензора 2-го ранга S^{α}_{β}, то тензор $S^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$ уже нельзя свести к развертке симметричного тензора 2-го ранга. Материальные соотношения, связывающие компоненты тензоров электромагнитного поля $H^{\alpha\beta}$ и $F_{\alpha\beta}$ в случае анизотропной среды, покоящейся в произвольной системе отсчета (или находящейся в гравитационном поле) с метрикой пространства—времени $g_{\alpha\beta}$, можно записать в виде

$$\sqrt{-g}\,H^{\alpha\beta}=\sqrt{-g}\,g^{\alpha\gamma}g^{\beta\nu}S^{\sigma\tau}_{\gamma\nu}F_{\sigma\tau}\quad\text{или}\quad\frac{1}{\sqrt{g}}g_{\alpha\gamma}g_{\beta\nu}\sqrt{-g}\,H^{\gamma\nu}=S^{\sigma\tau}_{\alpha\beta}F_{\sigma\tau}. \tag{6}$$

Значения компонент тензора диэлектрической и магнитной проницаемости $S^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$ определяем таким образом, чтобы для анизотропных материальных сред, покоящихся в инерциальной системе отсчета в отсутствие гравитационных полей, соотношения (6), записанные с помощью (2) в трехмерной форме, были эквивалентны уравнениям (4).

Ковариантные материальные соотношения (6) для анизотропной среды можно получить и более формально, обобщая известное для инерциальных сред представление о поляризации анизотропной среды внешним полем. Такое обобщение не представляет затруднений и мало отличается от аналогичного вывода ковариантных материальных уравнений для изотропной среды [1].

Ввиду большого количества отличных от нуля компонент тензора диэлектрической и магнитной проницаемости $S^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$ мы не будем выписывать значения компонент этого тензора в общем случае.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только непоглощающих сред. Однако отметим, что уравнения (1) совместно с уравнениями (6) полностью описывают распространение электромагнитных волн в случае произвольной анизотропной среды (поглощающей, гиротропной и т. д.), покоящейся вместе с наблюдателем в любой системе отсчета или находящейся в гравитационном поле. Тензор $S^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$ определяет электромагнитные свойства среды. Геометрия четырехмерного пространства определяется метрическим тензором $g^{\alpha\beta}$.

Компоненты тензора ε_{ik} представим в виде

$$\varepsilon_{jk} = \varepsilon'_{jk} + i\varepsilon''_{jk},$$

где ε'_{ik} — вещественная, а ε''_{jk} — мнимая часть тэнзора. Из условия эрмитовости (5) следует, что

$$\varepsilon'_{ik} = \varepsilon'_{ki}, \quad \varepsilon''_{ik} = -\varepsilon''_{ki}.$$

Симметричный тензор ε'_{ik} надлежащим выбором осей координат можно привести к диагональному виду. В выбранной таким образом системе координат вещественная часть тензора ε_{ik} определяется тремя главными значениями ε_1, ε_2, ε_3. Недиагональные элементы тензора ε_{ik} в случае гиротропных кристаллов являются чисто мнимыми. Антисимметричный тензор 2-го ранга дуален некоторому вектору **g**, называемому вектором гирации

$$\varepsilon''_{ij} = e_{ijk} g_k.$$

Следовательно, тензор диэлектрической проницаемости для непоглощающей анизотропной оптически активной среды имеет вид

$$\varepsilon_{jk} = \varepsilon'_{jk} + i\varepsilon''_{jk} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & ig_z & -ig_y \\ -ig_z & \varepsilon_2 & ig_x \\ ig_y & -ig_x & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Если среда является магнитной, то для тензора $\sigma_{ik} = \mu^{-1}_{ik}$ получим

$$\sigma_{jk} = \sigma'_{jk} + i\sigma''_{jk} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & iF_z & -iF_y \\ -iF_z & \sigma_2 & iF_x \\ iF_y & -iF_x & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь σ_1, σ_2, σ_3 — главные значения симметричного тензора σ'_{ik} (в первом приближении по F $\sigma_i = \mu_i^{-1}$), **F** — вектор, дуальный антисимметричному тензору σ''_{ik} («вектор магнитной гирации»).

Допустим для простоты, что главные оси тензоров ε_{ik} и σ_{ik} совпадают друг с другом (для некоторого класса кристаллов указанное условие не выполняется; в этом случае можно перейти к общей системе координат, преобразовав соответствующим образом один из тензоров). Далее, чтобы получить ковариантные материальные уравнения, рассматриваем величины ε_{ik} и σ_{ik} как компоненты одного смешанного четырехмерного тензора 4-го ранга $S^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$. Нетрудно показать, что в данном случае тензор $S^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$, удовлетворяющий указанным выше условиям, имеет компоненты

$$\left.\begin{array}{ll}
S^{01}_{01}=S^{10}_{10}=\varepsilon_1, \quad S^{02}_{02}=S^{20}_{20}=\varepsilon_2, & S^{03}_{03}=S^{30}_{30}=\varepsilon_3, \\
S^{23}_{23}=S^{32}_{32}=\sigma_1, \quad S^{31}_{31}=S^{13}_{13}=\sigma_2, & S^{12}_{12}=S^{21}_{21}=\sigma_3, \\
S^{02}_{01}=S^{20}_{10}=-S^{10}_{20}=-S^{01}_{02}=ig_z, & S^{03}_{01}=S^{30}_{10}=-S^{01}_{03}=-S^{10}_{30}=-ig_y, \\
S^{03}_{02}=S^{30}_{20}=-S^{02}_{03}=-S^{20}_{30}=ig_x, & S^{31}_{23}=S^{13}_{32}=-S^{23}_{31}=-S^{32}_{13}=iF_z, \\
S^{12}_{23}=S^{21}_{32}=-S^{23}_{12}=-S^{32}_{21}=-iF_y, & S^{12}_{31}=S^{21}_{13}=-S^{31}_{12}=-S^{13}_{21}=iF_x.
\end{array}\right\} \quad (7)$$

Остальные компоненты, за исключением членов главной диагонали $S^{\alpha\alpha}_{\alpha\alpha}$, равны нулю. Значение членов главной диагонали из указанных выше условий не может быть определено. Действительно, так как метрический тензор $g^{\alpha\beta}$ симметричен, а тензоры электромагнитного поля $H^{\alpha\beta}$ и $F_{\alpha\beta}$ антисимметричны, то компоненты главной диагонали тензора диэлектрической и магнитной проницаемости $S^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$ вообще выпадают из уравнений (6) в любой системе координат и знание их не требуется ни при каких вычислениях. Однако можно определить их предельные значения из условия, что в изотропной оптически неактивной среде тензор $S^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$ должен совпадать с соответствующим тензором для изотропной среды [1].

Контравариантный тензор $S^{\alpha\beta\gamma\nu}=g^{\gamma\sigma}g^{\nu\tau}S^{\alpha\beta}_{\sigma\tau}$ в случае непоглощающей и негиротропной анизотропной среды, покоящейся в инерциальной системе отсчета в отсутствие гравитационных полей, совпадает с тензором диэлектрической и магнитной проницаемости, встречающимся в релятивистской теории движущихся инерциальных сред [5]. У любой другой системы отсчета или при учете гравитационного поля такого совпадения нет. Объясняется это тем, что авторы работ [5] рассматривали из различных (вообще говоря не обязательно инерциальных) систем отсчета среды, покоящиеся в инерциальной системе, в то время как мы рассматриваем среду, покоящуюся вместе с наблюдателем в произвольной системе отсчета.

В вакууме тензор $S^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}=\delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\nu}$ и уравнения (6) принимают известный вид [2, 4]

$$\sqrt{-g}\,H^{\alpha\beta}=\sqrt{-g}\,g^{\alpha\gamma}g^{\beta\nu}F_{\gamma\nu} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sqrt{-g}}\,g_{\alpha\gamma}g_{\beta\nu}\sqrt{-g}\,H^{\gamma\nu}=F_{\alpha\beta}.$$

Используя уравнения (1) и (6) с компонентами тензора $S^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$ (7), можно рассмотреть явления, которые обусловлены анизотропией или гиротропией неинерциальных сред, возникающими при воздействии постоянного электрического или магнитного поля (эффекты Керра, Фарадея, Коттон—Мутона), в системе отсчета, связанной со средой.

Вращающаяся анизотропная среда

В последнее время кольцевые лазеры нашли широкое применение для измерения угловой скорости вращения [6]. Вместе с кольцевым резонатором вращается и среда, заполняющая резонатор (например, активные элементы твердотельных лазеров, невзаимные устройства и т. п.). Рассмотрим, как влияет вращение анизотропной среды на ее оптические свойства и как при этом изменяются собственные частоты кольцевого резонатора.

Для описания электромагнитных процессов, происходящих во вращающемся кольцевом резонаторе, выберем связанную с резонатором и средой систему координат, в которой ось Z направлена вдоль вектора угловой скорости вращения Ω резонатора. Допустим, что главные оси тензоров ε_{ik} и σ_{ik} совпадают друг с другом и с осями выбранной системы координат (если такого совпадения нет, то с помощью соответствующего преобразования тензоров ε_{ik} и σ_{ik} всегда можно записать тензор $S^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$ в выбранной системе координат). Подставив в одно из уравнений (6) значения компонент тензоров электромагнитного поля $H^{\alpha\beta}$ и $F_{\alpha\beta}$ из (2), тензора $S^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$ из (7) и метрического тензора [1], получим нековариантные материальные уравнения, связывающие векторы поля в непоглощающей анизотропной оптически активной среде, покоящейся во вращающейся с постоянной угловой скоростью системе отсчета

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D} &= \hat{\varepsilon}\mathbf{E} + i\,[\mathbf{E}\cdot\mathbf{g}] - \left[\frac{[\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}]}{c}\,\hat{\sigma}\mathbf{B}\right] - i\left[\frac{[\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}]}{c}\,[\mathbf{B}\cdot\mathbf{F}]\right], \\ \mathbf{H} &= \hat{\sigma}\mathbf{B} + i\,[\mathbf{B}\cdot\mathbf{F}] - \left[\frac{[\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}]}{c}\,\hat{\varepsilon}\mathbf{E}\right] - i\left[\frac{[\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}]}{c}\,[\mathbf{E}\cdot\mathbf{g}]\right] + \\ &+ \left[\frac{[\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}]}{c}\left[\frac{[\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}]}{c}\,\hat{\sigma}\mathbf{B}\right]\right] + i\left[\frac{[\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}]}{c}\left[\frac{[\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}]}{c}\,[\mathbf{B}\cdot\mathbf{F}]\right]\right], \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где за $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\sigma}$ обозначены трехмерные диагональные тензоры

$$\hat{\varepsilon} = \mathrm{diag}\,(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3), \qquad \hat{\sigma} = \mathrm{diag}\,(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3),$$

$\mathbf{g}$ — вектор электрической гирации, $\mathbf{F}$ — вектор магнитной гирации.

Векторные уравнения Максвелла совместно с материальными уравнениями (8) описывают распространение электромагнитных волн в непоглощающей анизотропной и гиротропной среде, покоящейся во вращающейся системе отсчета.

Тем же методом, что и в работе [1], найдем собственные частоты кольцевого резонатора, покоящегося вместе с заполняющей его анизотропной оптически неактивной средой ($\mathbf{g} = \mathbf{F} = 0$) в равномерно вращающейся системе отсчета. В первом приближении по $|[\boldsymbol{\Omega}\cdot r]/c|$ находим методом теории возмущений сдвиг частот встречных волн

$$\Delta\omega = 2\omega_{\mathrm{p}}^{(1)} = \omega'_{\mathrm{p}}\left\{\int\left[\frac{[\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}]}{c}\mathbf{H}'_{\mathrm{p}}\right]\mathbf{E}'^{*}_{\mathrm{p}}\,dV - \int\hat{\mu}\left[\frac{[\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}]}{c}\,\hat{\varepsilon}\mathbf{E}'_{\mathrm{p}}\right]\mathbf{H}'^{*}_{\mathrm{p}}\,dV\right\},$$

где ω'_{p}, $\mathbf{E}'_{\mathrm{p}}$, $\mathbf{H}'_{\mathrm{p}}$ — собственные частоты и моды покоящегося в инерциальной системе отсчета кольцевого резонатора, $\omega_{\mathrm{p}}^{(1)}$ — поправка первого приближения к собственной частоте $\omega'_{\mathrm{p}} = \omega_{\mathrm{p}}^{(0)}$, ε и $\hat{\mu}$ — трехмерные диагональные тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости.

Собственные частоты вращающегося кольцевого резонатора с невзаимным элементом

Для уменьшения захвата частот встречных волн во вращающемся кольцевом лазере или для его полного устранения используется невзаимный элемент, который обеспечивает постоянную разность хода для противоположно бегущих волн. Чаще всего применяется пассивный невзаимный элемент, использующий эффект Фарадея. Роль невзаимного элемента играет изотропная среда с показателем преломления $n > 1$, помещенная в продольное магнитное поле [6, 7].

В системе отсчета, связанной со средой, выпишем материальные уравнения для вращающейся изотропной среды, помещенной в постоянное магнитное поле. В такой среде $\varepsilon_i = \varepsilon$ и направление вектора гирации совпадает с направлением магнитного поля [3].

Пусть ось y направлена вдоль вектора магнитного поля H. Тогда вектор g имеет компоненты

$$\mathbf{g} = (0,\ \varepsilon',\ 0). \tag{9}$$

Если изотропная среда является магнитной, то $\mu_i = \mu$ и

$$\mathbf{F} = \left(0,\ \frac{1}{\mu} f,\ 0\right). \tag{10}$$

Множитель $1/\mu$ введен для удобства.

Рассмотрим плоскую монохроматическую электромагнитную волну, распространяющуюся в кольцевом резонаторе вдоль магнитного поля. Уравнения Максвелла для такой волны

$$\mathbf{D} = [\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}^*], \qquad \mathbf{B} = [\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{E}], \tag{11}$$

где $n^* = |\mathbf{n}^*|$ — эффективный показатель преломления. Из соотношений (8) и (11) находим с точностью до первого порядка по $|[\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}]|/c$ два значения показателя преломления (для право и левополяризованных волн)

$$n_1^* = n + \frac{\varepsilon'\mu - n^2 f}{2n} + \frac{1+n^2}{2n}\left(\mathbf{n}\frac{[\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}]}{c}\right) + \frac{\varepsilon'\mu + f}{2n}\left(\mathbf{n}\frac{[\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}]}{c}\right),$$

$$n_2^* = n - \frac{\varepsilon'\mu - n^2 f}{2n} + \frac{1+n^2}{2n}\left(\mathbf{n}\frac{[\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}]}{c}\right) - \frac{\varepsilon'\mu + f}{2n}\left(\mathbf{n}\frac{[\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}]}{c}\right).$$

Сдвиг частот встречных волн в кольцевом лазере получим, приравнивая изменение фазы при обходе электромагнитными волнами контура кольцевого резонатора

$$\frac{\omega_1}{c}\oint n_1^* dl = \frac{\omega_2}{c}\oint n_2^* dl.$$

После несложных вычислений приходим к такому выражению для относительного сдвига частот

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_p'} = \left[\frac{4\Omega S_3}{c} + \frac{n_0^2 f - \varepsilon'\mu}{n_0} d - \frac{1+n_0^2}{2}\frac{4\Omega S_2}{c} + \frac{1+n_a^2}{2}\frac{4\Omega S_1}{c}\right][L + l\,(n_a - 1) + d\,(n_0 - 1)]^{-1},$$

где

$$S_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^l [\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}], \qquad S_2 = \frac{1}{2}\int\limits_l^{l+d} [\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}],$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\int\limits_{l+d}^{L} [\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}], \qquad n = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

L — полная длина контура резонатора; l — длина части резонатора, заполненной средой с показателем преломления n_a; d — длина части резонатора, которая заполнена изотропной средой с показателем преломления n_0, находящейся в магнитном поле. S_1 — площадь, ограниченная участком l контура и лучами, соединяющими концы участка с центром вращения. S_2 — площадь, ограниченная участком d контура и лучами, соединяющими концы участка с центром вращения. S_3 — остальная площадь контура.

Литература

[1] А. М. Волков, В. А. Киселев. ЖЭТФ, *57*, 1363, 1969.
[2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. Изд. «Наука», М., 1967.
[3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1959.
[4] J. Plebanski. Phys. Rev., *118*, 1396, 1960.
[5] Л. И. Мандельштам. Полное собрание трудов, т. I. Изд. АН СССР, М., 1948; И. Е. Тамм. Ж. Р. Ф.-Х.О., *56*, 248, 1924 (часть физическая).
[6] В. Е. Привалов, С. А. Фридрихов. УФН, *97*, 377, 1969.
[7] E. J. McCartney. Navigation, *13*, 260, 1966.

Поступило в Редакцию 6 ноября 1969 г.