УДК 535.14

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОМОДОВЫХ ОПТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

И. А. Дерюгин и *В. Н. Курашов*

С помощью P-представления матрицы плотности получены основные статистические характеристики многомодовых квантованных полей. Вычислены производящая функция и моменты распределения фотонов суперпозиции N независимых амплитудно стабилизированных мод с равномерно распределенной фазой и теплового шума. Рассмотрена зависимость дисперсии числа заполнения от N и отношения сигнала к шуму, на основании которой исследована скорость сходимости результирующего поля к гауссовому.

Когерентность излучения является одной из важнейших характеристик оптических квантовых генераторов, знание которой необходимо для многих практических целей. Использование лазера в системах передачи информации, голография, нелинейные оптические преобразования требуют учета достаточно тонких явлений, связанных со статистическими свойствами оптических полей. В большинстве случаев эти характеристики изучаются с помощью экспериментов по фотосчету, подробная теория которых имеется во многих работах [1-3]. Анализ экспериментальных результатов, проведенный Ходара [4], показал наличие существенных расхождений в однотипных исследованиях различных авторов, что было объяснено им с помощью предположения о многомодовом режиме работы исследуемых источников излучения. Однако характеристики суперпозиционных полей получены в [4] в классическом приближении, что не позволяет применить развитый Глаубером [1] аппарат квантовомеханического описания когерентности для более подробного их исследования. В настоящей работе на основании P-представления матрицы плотности получены основные статистические характеристики многомодовых квантованных полей. Обсуждение возможностей их экспериментального наблюдения будет приведено в дальнейшем.

P-представление и характеристическая функция поля

В большинстве случаев поля, изучаемые в оптике, могут быть описаны так называемым P-представлением матрицы плотности [1]

$$\rho = \int P(\alpha)\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\,d^2\alpha, \tag{1}$$

где $|\alpha\rangle$ — собственное состояние оператора уничтожения фотона, $d^2\alpha = d(\mathrm{Re}\,\alpha)\,d(\mathrm{Im}\,\alpha)$. Весовая функция $P(\alpha)$ — действительная функция комплексной переменной, играющая роль, аналогичную плотности вероятности распределения α на комплексной плоскости.

Не останавливаясь подробно на аналитических свойствах $P(\alpha)$, отметим только, что она может принимать отрицательные значения, ввиду чего ее часто называют функцией квазивероятности.

Удобно рассматривать $P(\alpha) = P(\alpha', \alpha'')$ как распределение вектора на плоскости. При этом распределения проекций α' и α'' на действительную и мнимую оси определяют, как нетрудно видеть, распределения координаты и импульса соответствующего осциллятора поля, которые, как и исходная функция $P(\alpha', \alpha'')$, являются плотностями квазивероятности. Формально, однако, если не принимать во внимание определенного квантовомеханического значения физических параметров, входящих в $P(\alpha)$ [1, 5], эти распределения во многих случаях дают обычные статистические характеристики соответствующих классических полей. Действительно, заменив в разложении положительно-частотной части поля

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{kr})}, \tag{2}$$

операторы $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ собственными значениями $\alpha_{\mathbf{k}}$ и взяв удвоенную действительную часть этого выражения, мы получим предельное классическое поле, в котором роль коэффициентов Фурье будут играть величины

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_{\mathbf{k}} &= 2\,|\alpha_{\mathbf{k}}| \cos\varphi_{\mathbf{k}}, \\ \alpha''_{\mathbf{k}} &= 2\,|\alpha_{\mathbf{k}}| \sin\varphi_{\mathbf{k}}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Если $P(\alpha'_{\mathbf{k}}\alpha''_{\mathbf{k}})$ является обычной плотностью вероятности, то $P(\alpha'_{\mathbf{k}})$ даст классическое распределение одной моды, амплитуда которой, однако, уменьшена в $\sqrt{2}$ раз.

Далее, учитывая определение огибающей случайного процесса [6, 7], нетрудно видеть, что распределением огибающей поля является функция $P(|\alpha_{\mathbf{k}}|)$, на основании чего легко получить классическое описание когерентности, развитое в работах Вольфа [8, 9]. Наконец, функция $P(|\alpha_{\mathbf{k}}|)$ определяет также распределение фотонов в моде. Действительно, определяя матричный элемент статистического оператора в представлении чисел заполнения, получим

$$\langle n|\rho|n\rangle = \int P(\alpha'\alpha'')\,|\langle n|\alpha\rangle|^2\, d\alpha' d\alpha'' = \int_0^\infty P(|\alpha|)\,\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\, e^{-|\alpha|^2} d|\alpha|. \tag{4}$$

Удобно ввести характеристическую функцию

$$\chi(x, y) = \int e^{i(x\alpha' + y\alpha'')} P(\alpha'\alpha'')\, d\alpha' d\alpha'', \tag{5}$$

с помощью которой изучение суперпозиционных полей отличается особой простотой. Если $\chi(x, y)$ известна, вычисление $P(\alpha'\alpha'')$ сводится к выполнению обратного преобразования Фурье. Для определения же $P(|\alpha|)$ введем функцию

$$\chi(P) = \int_0^{2\pi} \chi(\rho\cos\psi, \rho\sin\psi)\, d\psi = 2\pi \int_0^\infty J_0(|\alpha|\rho)\, P(|\alpha|)\, d|\alpha|, \tag{6}$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя, откуда, используя обратное преобразование Бесселя, находим непосредственно

$$P(|\alpha|) = \frac{|\alpha|}{2\pi} \int_0^\infty \chi(\rho)\, J_0(|\alpha|\rho)\, \rho\, d\rho. \tag{7}$$

Аналогичным образом убеждаемся, что распределение чисел заполнения фотонов сводится к выполнению преобразования Лагерра

$$\langle n|\rho|n\rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \rho\chi(\rho) \exp\left(-\frac{\rho^2}{4}\right) L_n\left(\frac{\rho^2}{4}\right) d\rho. \tag{8}$$

Определим, наконец, производящую функцию моментов распределения фотонов

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \langle n \mid \rho \mid n \rangle = f(1 - e^{-x}), \tag{9}$$

где

$$f(x) = \int_0^{\infty} P(\mid \alpha \mid) e^{-\mid \alpha \mid^2 x} d \mid \alpha \mid. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что $f(x)$ и $F(x)$ позволяют найти как $\langle n \mid \rho \mid n \rangle$, так и моменты числа заполнения

$$\langle n \mid \rho \mid n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=1}, \tag{11}$$

$$\langle n^s \rangle = (-1)^s \frac{d^s F(x)}{dx^s} \Big|_{x=0}. \tag{12}$$

Производящая функция $f(x)$ связана в свою очередь с характеристическим преобразованием Лапласа

$$f(x) = \frac{1}{4\pi x} \int_0^{\infty} \chi(\rho) \exp\left(-\frac{\rho^2}{4x}\right) \rho d\rho. \tag{13}$$

Таким образом, определение большинства полезных статистических характеристик поля сводятся к выполнению одного из интегральных преобразований $\chi(\rho)$.

Для суперпозиции нескольких статистически независимых мод результирующая функция квазивероятности представляет собой свертку

$$P_{\Sigma}(\alpha', \alpha'') = P_1 * P_2 * \ldots * P_N, \tag{14}$$

где

$$P_1 * P_2 = \int P_1(\alpha' - \alpha_1', \alpha'' - \alpha_1'') P_2(\alpha_1' \alpha_1'') d^2\alpha_1. \tag{15}$$

Характеристическая функция в этом случае равна простому произведению

$$\chi(x, y) = \prod_{i=1}^{N} \chi_i(x, y). \tag{16}$$

Однако $\chi(\rho)$ не сводится, очевидно, к произведению отдельных $\chi_i(\rho)$. Заметим еще, что поскольку

$$\chi(x, 0) = \prod_{i=1}^{N} \chi_i(x, 0), \tag{17}$$

из $P_{\Sigma}(\alpha', \alpha'')$ легко получить интегрированием по α'' и распределение суперпозиции классических полей, если, конечно, P-функция каждой из мод является плотностью вероятности. В этом можно было бы убедиться и непосредственно, интегрируя (14) по α'' и меняя порядок интегрирования.

Статистические характеристики многомодовых полей

Рассмотрим несколько примеров вычисления введенных в предыдущем разделе характеристик многомодовых полей. Будем предполагать, что результирующее поле образуется в результате суперпозиции N однотипных статистически независимых составляющих.

Сложение когерентных полей

Распределение квазивероятности одномодового когерентного поля имеет вид

$$P_k(\alpha'_k\alpha''_k) = \delta(\alpha'_k - \alpha''_{k0})\,\delta(\alpha''_k - \alpha''_{k0}), \tag{18}$$

откуда характеристическая функция

$$\chi_k(x,\ y) = e^{i(x\alpha'_{k0}+y\alpha''_{k0})}. \tag{19}$$

Сложение N процессов такого типа, следовательно, вновь дает когерентное поле

$$P(\alpha'\alpha'') = \delta(\alpha' - \alpha'_0)\,\delta(\alpha'' - \alpha''_0), \tag{20}$$

параметры α'_0 и α''_0 которого определяются соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_0 &= \sum_{k=1}^{N} \alpha'_{0k}, \\ \alpha''_0 &= \sum_{k=1}^{N} \alpha''_{0k}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Это соответствует обычной сумме N фиксированных векторов на плоскости. Определение остальных характеристик результирующего поля не представляет, таким образом, особого труда. Так,

$$\chi(\rho) = 2\pi J_0(|\alpha_0|\rho), \tag{22}$$

а производящая функция моментов

$$F(x) = \exp[-|\alpha_0|^2(1-e^{-x})], \tag{23}$$

т. е. распределение фотонов, как и следовало ожидать, является пуассоновским со средним значением

$$\langle n\rangle = |\alpha_0|^2 = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{N}\alpha'_{0k}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{N}\alpha''_{0k}\right)^2}. \tag{24}$$

Сложение гауссовых полей

Как и в предыдущем случае, гауссова плотность квазивероятности аддитивна, т. е. суперпозиция N статистически независимых мод такого типа дает

$$P(\alpha'\alpha'') = \frac{1}{\pi\langle n\rangle}\exp\left[-\frac{\alpha'^2 \perp \alpha''^2}{\langle n\rangle}\right], \tag{25}$$

где

$$\langle n\rangle = \sum_k \langle n_k\rangle. \tag{26}$$

Вычисляя характеристическую функцию распределения (25), находим

$$\chi(\rho) = 2\pi\exp\left[-\frac{\langle n\rangle}{4}\rho^2\right], \tag{27}$$

откуда

$$f(x) = \frac{1}{1+\langle n\rangle x} \tag{28}$$

и

$$P(|\alpha|) = \frac{2|\alpha|}{\langle n\rangle}\exp\left[-\frac{|\alpha|^2}{\langle n\rangle}\right]. \tag{29}$$

Последняя формула, как уже отмечалось, совпадает с распределением огибающей классического гауссова процесса, в чем нетрудно убедиться, сравнивая (29) с обычной формулой Рэлея.

Сложение амплитудно стабилизированных полей с равномерно распределенной фазой

Этот случай представляет значительный практический интерес, ввиду чего имеет смысл остановиться на нем несколько подробнее. P-функция поля с равномерно распределенной фазой имеет вид

$$P_k(\alpha'_k\alpha''_k)=\frac{1}{2\pi\,|\alpha_0|}\,\delta\left(\sqrt{\alpha'^2+\alpha''^2}-|\alpha_0|\right), \tag{30}$$

откуда, учитывая свойства δ-функции, после несложных преобразований находим

$$\chi_k(x,\ y)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos\left[x\,|\alpha_0|\sin\varphi\right]\cos\left[y\,|\alpha_0|\cos\varphi\right]d\varphi \tag{31}$$

или, используя теорему сложения функций Бесселя,

$$\chi_k(x,\ y)=J_0\left(\sqrt{x^2+y^2}\,|\alpha_{0k}|\right). \tag{32}$$

При сложении N статистически независимых мод такого типа получаем следующую характеристическую функцию:

$$\chi(x,\ y)=\prod_{k=1}^{N}J_0\left(\sqrt{x^2+y^2}\,|\alpha_{0k}|\right) \tag{33}$$

и

$$\chi(\rho)=2\pi\prod_{k=1}^{N}J_0(\rho\,|\alpha_{0k}|). \tag{34}$$

Распределение квазивероятности после перехода в обратном преобразовании Фурье к полярным координатам сводится к следующему интегралу:

$$P(\alpha'\alpha'')=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}d\rho\rho J_0\left(\rho\sqrt{\alpha'^2+\alpha''^2}\right)\prod_{k=1}^{N}J_0(\rho\,|\alpha_{k0}|). \tag{35}$$

Заметим, что распределение действительной части

$$P(\alpha')=\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha''P(\alpha'\alpha'')=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}d\rho\cos\alpha'\rho\prod_{k=1}^{N}J_0(\rho\,|\alpha_{k0}|) \tag{36}$$

совпадает с найденным в [4] распределением для аналогичной классической задачи. Из (35) можно получить физически очевидное следствие

$$P(\alpha'\alpha'')=0\ \text{при}\ \left|\sum_{k=1}^{N}|\alpha_{k0}|<\sqrt{\alpha'^2_k+\alpha''^2_k}\right.. \tag{37}$$

Найти явный вид распределения $P(\alpha'\alpha'')$, кроме тривиального случая $N=1$, удается также при $N=2$

$$P_{N=2}(\alpha'\alpha'')=\frac{1}{2\pi\Delta\left(|\alpha_{10}|;\ |\alpha_{20}|;\ \sqrt{\alpha'^2+\alpha''^2}\right)}, \tag{38}$$

где $\Delta(a;\ b;\ c)$ — площадь треугольника, образованного сторонами a, b, c. Если эти величины не могут образовать треугольник, $P=0$. В частности, если имеются две равных по амплитуде моды

$$P_{N=2}(\alpha'\alpha'')=\frac{1}{\pi^2\sqrt{\alpha'^2+\alpha''^2}\sqrt{4\,|\alpha_0|^2-(\alpha'^2+\alpha''^2)}},\quad 0\leqslant\sqrt{\alpha'^2+\alpha''^2}\leqslant 2\,|\alpha_0|. \tag{39}$$

Производящую функцию моментов распределения (35) найдем непосредственно, используя (13),

$$f(x)=\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty dz\exp\left(-\frac{z}{x}\right)\prod_{k=1}^{N}J_0\left(2\,|\alpha_{k0}|\sqrt{z}\right). \tag{40}$$

Как и выше, для $N=1,\ 2$ из (40) можно получить явный вид $f(x)$

$$f_{(N=1)}(x)=e^{-x|\alpha_0|^2}, \tag{41}$$

$$f_{(N=2)}(x)=I_0\left(2x\,|\alpha_{10}\alpha_{20}|\right)\exp\left[-x\left(|\alpha_{10}|^2+|\alpha_{20}|^2\right)\right]. \tag{42}$$

Моменты чисел заполнения для одной моды не отличаются от соответствующих моментов когерентного поля, что, как отметил Глаубер [1], связано с независимостью физически измеряемых величин от начальной фазы. Однако, как это видно на примере двух мод, характеристики существенно изменяются при сложении таких полей. Действительно, непосредственным дифференцированием (42) можно получить

$$\langle\Delta n^2\rangle=\langle n\rangle+\frac{1}{2}\langle n\rangle^2, \tag{43}$$

т. е. в обычном случае $\langle n\rangle\gg 1$ дисперсия намного превышает дисперсию пуассоновского распределения и приближается к величине $\langle n\rangle^2$, характерной для случайного гауссова поля.

Так как при вычислении моментов требуется лишь знание функции $f(x)$ и ее производных в точке $x=0$, разложением подынтегрального выражения в (40) удается получить достаточно удобные общие формулы. Дифференцируя s раз по x ряд

$$f(x)=\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty dze^{-\frac{z}{x}}\sum_{r_1\ldots r_N=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r_1+\ldots r_N}\,|\alpha_{10}|^{2r_1}\cdots|\alpha_{N0}|^{2r_N}}{(r_1!\ldots r_N!)^2}z^{r_1+\ldots+r_N}=$$

$$=\sum_{r_1\ldots r_N=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r_1+\ldots+r_N}\,|\alpha_{10}|^{2r_1}\cdots|\alpha_{N0}|^{2r_N}(r_1+\ldots+r_N)!}{(r_1!\ldots r_N!)^2}x^{r_1+\ldots+r_N} \tag{44}$$

и полагая $x=0$, находим

$$z_s=\left.\frac{d^sf(x)}{dx^s}\right|_{x=0}=(-1)^s(s!)^2\sum_{(r_1+\ldots+r_N=s)}\frac{|\alpha_{10}|^{2r_1}\cdots|\alpha_{N0}|^{2r_N}}{(r_1!\ldots r_N!)^2}. \tag{45}$$

В частности, если амплитуды всех мод одинаковы,

$$\left.\frac{d^sf(x)}{dx^s}\right|_{x=0}=(-1)^s\,|\alpha_0|^{2s}\,\Theta_{Ns}, \tag{46}$$

где Θ_{Ns} есть сумма квадратов полиноминальных коэффициентов

$$\Theta_{Ns}=\sum_{(r_1+\ldots+r_N=s)}\frac{(s!)^2}{(r_1!\ldots r_N!)^2}. \tag{47}$$

Если использовать теперь формулу дифференцирования сложной функции, нетрудно записать и общее выражение для s-того момента

$$\langle n^s\rangle = \left.\frac{d^sF(x)}{dx^s}\right|_{x=0} = s!\sum \frac{(-1)^m}{i!\,j!\ldots k!\,(1!)^i\,(2!)^j\ldots(l!)^k}\left.\frac{d^mf(x)}{dx^m}\right|_{x=0}, \tag{48}$$

где суммирование распространено по всем решениям в целых неотрицательных числах уравнений

$$\begin{gathered} i+2j+\ldots+lk=s,\\ i+j+\ldots+k=m. \end{gathered} \tag{49}$$

С учетом (45) это дает возможность вычислить любой момент распределения. Для случая равных амплитуд среднее значение $\langle n\rangle$ и дисперсия имеют простой вид

$$\left.\begin{aligned} \langle n\rangle &= N\,|\alpha_0|^2,\\ \langle\Delta n^2\rangle &= \langle n\rangle + N(N-1)\,|\alpha_0|^4. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Возвращаясь теперь к вопросу об изменении распределения суперпозиции N независимых мод с равномерно распределенной фазой при увеличении N, заметим, что в соответствии с центральной предельной теоремой должна наблюдаться сходимость к гауссову закону.

Действительно, если $|\alpha_1|=|\alpha_2|=\ldots=|\alpha_N|$, причем $N\,|\alpha_k|^2=\mathrm{const}$,

$$\lim_{N\to\infty} J_0^N\left(\rho\frac{|\alpha_0|}{\sqrt N}\right)\sim\lim_{N\to\infty}\left[1-\left(\frac{\rho\,|\alpha_0|}{2\sqrt N}\right)\right]^N=\exp\left[-\frac{\rho^2\,|\alpha_0|^2}{4}\right], \tag{51}$$

откуда

$$\lim_{N\to\infty} P(\alpha'\alpha'') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \rho J_0(\rho\,|\alpha|)\exp\left(-\frac{\rho^2\,|\alpha_0|^2}{4}\right)d\rho =$$

$$=\frac{1}{\pi\,|\alpha_0|^2}\exp\left[-\frac{|\alpha|^2}{|\alpha_0|^2}\right]. \tag{52}$$

Представление о скорости этой сходимости дает относительная дисперсия

$$\frac{\langle\Delta n^2\rangle}{\langle n\rangle^2}=\frac{1}{\langle n\rangle}+1-\frac{1}{N}, \tag{53}$$

отличающаяся от гауссовой последним членом. Уже при $N\sim 10$ обычные эксперименты по фотосчету для таких полей практически не обнаружат этого отличия, что качественно подтверждает соображения Ходара [4]. В следующем разделе мы исследуем, в какой мере на этот вывод влияет добавка хаотического шума.

Статистика излучения многомодового лазера в присутствии аддитивного гауссова шума

Рассмотрим поле, образованное N амплитудно стабилизированными модами с равномерно распределенной в интервале $[0,2\pi]$ фазой и одной или несколькими гауссовыми модами. Такая модель, обсуждавшаяся в цитированной работе Ходара, по-видимому, близка к реально встречающейся экспериментальной ситуации. Как мы видели выше, увеличение числа мод приводит к значительному ухудшению когерентности поля, что непосредственно сказывается, например, на увеличении дисперсии числа фотонов. Возникает вопрос, в какой мере существенна добавка шума. Самым простым способом его влияние можно проследить, вычисляя моменты $\langle n^s\rangle$ методом, аналогичным приведенному выше.

Прежде чем перейти к их определению, приведем для полноты результаты вычислений других статистических характеристик исследуемого процесса. Используя формулы предыдущего раздела, находим

$$\chi(x, y) = \exp\left[-(x^2+y^2)\frac{\langle n_\sigma\rangle}{4}\right]\prod_{k=1}^{N} J_0\left(\sqrt{x^2+y^2}\,|\alpha_{k0}|\right), \tag{54}$$

где $\langle n_\sigma\rangle$ есть дисперсия суммарной гауссовой составляющей. Распределение огибающей в соответствии с (7)

$$P(|\alpha|) = |\alpha|\int_0^\infty \exp\left(-\rho^2\frac{\langle n_\sigma\rangle}{4}\right) J_0(|\alpha|\rho)\prod_{k=1}^{N} J_0(\rho|\alpha_{k0}|)\,\rho d\rho =$$

$$= \frac{2|\alpha|}{\langle n_\sigma\rangle} f_{N+1}\left(\frac{1}{\langle n_\sigma\rangle};\ \alpha_1, \ldots \alpha_N,\ \alpha\right), \tag{55}$$

где $f_{N+1}\left(\frac{1}{\langle n_\sigma\rangle};\alpha_1, \ldots \alpha_n,\ \alpha\right)$ — производящая функция $N+1$ моды с равномерно распределенной фазой и амплитудами $\alpha_1 \ldots \alpha_N$, α, взятая в точке $\frac{1}{\langle n_\sigma\rangle}$. Частный случай этой формулы для $N=1$ непосредственно получаем, используя (42),

$$P(|\alpha|) = \frac{2|\alpha|}{\langle n_\sigma\rangle} I_0(2|\alpha||\alpha_0|)\exp\left[-\frac{1}{\langle n_\sigma\rangle}(|\alpha_0|^2+|\alpha|^2)\right], \tag{56}$$

т. е. распределение Райса [10]. Далее, распределение действительной части

$$P(\alpha') = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dx\cos\alpha' x\exp\left(-\frac{\langle n_\sigma\rangle x^2}{4}\right)\prod_{k=1}^{N} J_0(x|\alpha_{k0}|) \tag{57}$$

совпадает с полученным в [4]. Наконец, производящая функция $f(x)$ сводится к производящей функции суперпозиции когерентных мод:

$$f(x) = \frac{1}{2x}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{\rho^2}{4}\left(\langle n_\sigma\rangle + \frac{1}{x}\right)\right]\prod_{k=1}^{N} J_0(\rho|\alpha_{k0}|)\,\rho d\rho =$$

$$= \frac{1}{1+\langle n_\sigma\rangle x} f_N\left(\frac{x}{1+\langle n_\sigma\rangle x}\right). \tag{58}$$

Последняя формула дает возможность вычислить $\langle n^s\rangle$ в общем виде. Используя (44) и разложение бинома $(1+\langle n_\sigma\rangle x)^{-s-1}$, найдем

$$f(x) = \sum_{r_1\ldots r_N=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r_1+\cdots+r_N}|\alpha_{10}|^{2r_1}\ldots|\alpha_{N0}|^{2r_N}}{(r_1!\ldots r_N!)^2}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{i+r_1+\ldots+r_N}{i}\times$$

$$\times\langle n_\sigma\rangle^i x^{r_1+\ldots+r_N+i}, \tag{59}$$

где $\binom{m}{n}$ — биноминальный коэффициент. Отсюда

$$\frac{d^s f(x)}{dx^s} = \sum_{r_1\ldots r_N=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r_1+\ldots+r_N}|\alpha_{10}|^{2r_1}\ldots|\alpha_{N0}|^{2r_N}}{(r_1!\ldots r_N!)^2}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\langle n_\sigma\rangle^i\frac{[(r_1+\ldots+r_N+i)!]^2}{i!\,(r_1+\ldots+r_N+i-s)!}\,x^{r_1+\ldots+r_N+i-s} \tag{60}$$

и, наконец,

$$\frac{d^k f(x)}{dx^s}\bigg|_{x=0} = \sum_{i=0}^{s} \frac{(-1)^s \langle n_\sigma\rangle^i (s\,!)^2}{i\,!} \sum_{(r_1+\ldots+r_N=s-i)} \frac{\left|\alpha_{10}\right|^{2r_1}\ldots\left|\alpha_{N0}\right|^{2r_N}}{(r_1\,!\ldots r_N\,!)^2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{s} (-1)^{s-1} \frac{(s\,!)^2 \langle n_\sigma\rangle^{s-1} z_s}{(s-i)\,!\,i\,!}, \tag{61}$$

где z_s определяется формулой (45). Используя вновь (48), приведем $\langle n^s\rangle$ к виду

$$\langle n_s\rangle = \sum \frac{s\,!\,(m\,!)^2}{i\,!\,j\,!\ldots k\,!\,(1\,!)^i\,(2\,!)^j\ldots(l\,!)^k} \sum_{g=0}^{m} \frac{\langle n_\sigma\rangle^{m-g}(-1)^g z_g}{(m-g)\,!\,(g\,!)^2},$$

$$i+j+\ldots+k=m, \quad i+2j+\ldots+lk=s. \tag{62}$$

В частности, если все $|\alpha_{0k}|$ одинаковы

$$\langle n\rangle = \langle n_\sigma\rangle + N\,|\,\alpha_0\,|^2, \tag{63}$$

$$\frac{\langle\Delta n^2\rangle}{\langle n\rangle^2} = \frac{1}{\langle n\rangle} + 1 - \frac{N\,|\,\alpha_0\,|^4}{\langle n\rangle^2}. \tag{64}$$

Отсюда можно сделать следующий вывод: обнаружить присутствие малого шума на фоне сигнала большой мощности, состоящего из нескольких мод, фотоэлектронными измерениями средней мощности и дисперсии, по-видимому, практически невозможно, так как (64) по форме не отличается от (59). Количественная же добавка к относительной дисперсии в приближении $|\alpha_0|^2 \gg \langle n_\sigma\rangle$ оказывается порядка $2\langle n_\sigma\rangle/|\alpha_0|^2$, т. е. существенно меньше $1/N$ для не очень больших N. Таким образом, аддитивная малая добавка гауссова шума практически не определяет скорости сходимости результирующего поля к нормальному и экспериментально едва ли наблюдаема. Так, например, при $N=3$ и $|\alpha_0|^2/\langle n_\sigma\rangle = 10^3$ относительная дисперсия результирующего распределения отличается от гауссовой примерно на 1/3, т. е. достаточно заметно. В то же время добавка к дисперсии, связанная с шумом, составляет 10^{-4}, так что ее регистрация практически невозможна. Это связано, прежде всего, с инерционностью фотодетекторов, применяемых в исследованиях статистических свойств оптических полей. Обсуждение возникающих при этом дополнительных трудностей экспериментов по фотостатистике многомодовых полей будет проведено в дальнейшем.

Литература

[1] Р. Глаубер. Сб. «Квантовая оптика и квантовая радиофизика», стр. 91. Изд. «Мир», М., 1966.
[2] P. Kelley, W. Kleiner. Phys. Rev., *136*, 316A, 1964.
[3] R. Lehmberg. Phys. Rev., *167*, 1152, 1968.
[4] H. Hodara. Proc. IEEE, *53*, 696, 1965.
[5] G. Lachs. Phys. Rev., *138B*, 1012, 1965.
[6] Р. Деч. Нелинейные преобразования случайных процессов. Изд. «Советское радио», М., 1965.
[7] Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. Изд. «Советское радио», М., 1966.
[8] E. Wolf, L. Mandel. Revs. Mod. Phys., *37* (*2*), 231, 1965.
[9] M. Born, E. Wolf. Principles of Optics, Pergamon Press, New York, 1964.
[10] S. Rice. Bell. System. Techn J., *27*, 109, 1948

Поступило в Редакцию 10 ноября 1969 г.