УДК 539.184.22

# ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТА ДОППЛЕРА НА ФОРМУ ЛИНИИ СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

*А. В. Лазарев*

В приближении квадратичном по скорости источника излучения для наблюдаемой частоты перехода получено выражение для функции релаксации, определяющей допплеровское уширение линии. Показано, что в случае как длинноволнового, так и коротковолнового излучения поправки имеют существенный характер.

Допплеровское уширение линии рассматривалось в работе [1]. Однако авторы использовали при вычислении функции релаксации разложение точного выражения наблюдаемой частоты перехода только до члена линейного по скорости источника. Очевидно, что такое приближение не учитывает сдвига максимума частоты излучения, ассиметрии линии и справедливо только для достаточно длинноволнового излучения. В настоящей работе сделана попытка уточнить результаты работы [1] в указанных направлениях.

Будем рассматривать источник излучения, движение которого можно считать классическим. Взаимодействие с термостатом приводит не только к изменению его скорости движения $v\ (t)$ по отношению к лабораторной системе координат, но также и к изменению частоты перехода $\omega_0$ в собственной системе координат источника излучения. Последнее явление мы не будем рассматривать.

Скорость движения источника считаем, как обычно, случайной функцией времени, распределение вероятности для которой удовлетворяет уравнению Больцмана. Поскольку мы ограничиваемся вероятностной схемой описания движения источника, нам известны только распределения положений и скоростей частиц и, следовательно, интеграл столкновений, фигурирующий в уравнении Больцмана, не может быть вычислен точно. Распределение вероятности $f\ (v,\ r,\ t)$ позволяет получить только либо средние по малым объемам и промежуткам времени (порядка куба длины свободного пробега $l_0^3$ и времени свободного пробега $\tau_c$), либо средние по ансамблю. Таким образом, мы можем вычислить только среднее значение интеграла столкновений за время порядка $\tau_0$, и все предсказания, формально полученные для меньших времен, не имеют физического смысла. В частности, качественно правильное поведение функции релаксации в работе [1] вблизи нуля носит случайный характер. Можно показать, что это связано с нечетностью по скорости использованной в данном случае поправки к частоте перехода.

Мы будем считать, что распределение для случайной величины $v\ (t)$ не зависит от пространственных координат и что источники излучения составляют незначительную примесь к частицам другого сорта (термостату), которые уже находятся в равновесии. В этом случае вероятность рассеяния интересующих нас частиц можно считать не зависящей от времени (случайный процесс будет стационарным). Пусть $w\ (v,\ \Delta v)$ есть вероятность рассеяния в единицу времени от значения $v$ в интервал $v+\Delta v,\ v+\Delta v+dv$, тогда интеграл столкновений можно записать в виде

$$J_c=\int f\,(v)\,w\,(v,\ \Delta v)\,dv-f\,(v')\int w\,(v',\ \Delta v)\,d\,(\Delta v). \qquad (1)$$

Первый член описывает вероятность прихода частицы в элементарный объем вблизи $v'$, а второй — ухода из этого объема. Интегрирование в первом члене ведется как по явной зависимости от $v$, так и по $v$, входящему в $\Delta v = v' - v$. Если явную зависимость от $v$ произведения $f(v)w(v, \Delta v)$ представить в виде ряда Тейлора вблизи точки $v'$, то интеграл столкновений запишется в виде разложения

$$J_c(v') = -\frac{\partial f(v')}{\partial v'_i} \int \Delta v_i w(v', \Delta v)\, d(\Delta v) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(v')}{\partial v'_i \partial v'_j} \times$$
$$\times \int \Delta v_i \Delta v_j w(v', \Delta v)\, d(\Delta v) + \ldots, \tag{2}$$

которое будет справедливо [2], если только выполняется условие $\Delta v \frac{\partial f}{\partial v} \ll 1$, т. е. распределение не меняется заметным образом на интервалах скоростей порядка среднего изменения скорости при столкновении. Полученное приближение (приближение Фоккера—Планка) соответствует непрерывному марковскому случайному процессу, переходная вероятность для которого $f(v_1t_1\ v_2t_2)$ удовлетворяет уравнению Чепмена—Колмогорова. Различие между решением уравнения Колмогорова и решением уравнения Больцмана может стать заметным, если начальные условия носят существенно сингулярный характер. Однако это различие не является существенным, так как решения обоих уравнений экспоненциально приближаются к равновесному распределению с характерными временами порядка $\tau_0$ и для интервалов, больших чем $\tau_0$, будут приводить к одинаковым результатам. Различие проявится только для времен, меньших чем $\tau_0$, но, как мы уже отмечали, в этом случае и решение уравнения Больцмана не имеет особого физического смысла.

Для броуновского процесса обычно считается [3], что различные компоненты скорости статистически независимы, среднее изменение скорости пропорционально скорости, а средняя энергия не зависит от скорости. В этом случае уравнение Колмогорова имеет вид

$$\frac{\partial f(v_1t_1v_2t_2)}{\partial t_1} = \left\{\alpha \tilde{v}_1 \nabla_{v_1} - \frac{1}{2} q \Delta_{v_1}\right\} f(v_1t_1v_2t_2), \tag{3}$$

где $\alpha = \frac{kT}{mD}$, $q = \alpha v_0^2$, $m$ — масса частицы, $D$ — коэффициент диффузии, $v_0^2 = \frac{2kT}{m}$.

В уравнении (3) переменные разделяются и переходную вероятность можно искать в виде произведения соответствующих вероятностей для каждой из компонент. В общем случае, если источник излучения участвует в движении, которое можно рассматривать классически, вероятность перехода с излучением в определенном направлении фотона частоты $\omega$ в лабораторной системе координат пропорциональна интегралу

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \exp\left(i \int_0^t \omega(t')\, dt' - i\omega t\right) dt, \tag{4}$$

где

$$\omega(t) = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}}{\left(1 - \frac{v(t)}{c}\right) \cos\theta},$$

$\theta$ — угол между направлением наблюдения и мгновенной скоростью.

Зависимостью от скорости коэффициента пропорциональности между $I(\omega)$ и вероятностью перехода можно пренебречь, так как ее учет привел бы только к появлению членов порядка $\frac{v_0}{c} I(\omega)$ не меняя существенно формы линии. Если источник участвует в броуновском движении, то необходимо усреднить $I(\omega)$ по распределению для $v(t)$. Разлагая $\omega(t)$ в ряд по $v$ до квадратичных членов включительно, получим

$$\langle I(\omega)\rangle = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{i(\omega_0-\omega)t} \Phi(t)\, dt, \tag{5}$$

где

$$\Phi(t) = \left\langle \exp\left\{ i\omega_0 \int_0^t \left[ \frac{v_z(t')}{c} + \frac{v_z^2(t')}{2c^2} - \frac{1}{2c^2}\left(v_x^2(t') + v_y^2(t')\right)\right] dt' \right\}\right\rangle,$$

скобки обозначают усреднение по случайному распределению, ось $z$ — направление наблюдения.

Так как компоненты скорости статистически независимы, то для $\Phi(t)$ получаем

$$\Phi(t) = \left\langle e^{i\omega_0 \int_{t'}^{t_2} \left(\frac{v_z(t')}{c} + \frac{v_z^2(t')}{2c^2} dt'\right)} \right\rangle \left\langle e^{-i\omega_0 \int_{t_1}^{t_2} \frac{v_x^2(t')}{2c^2} dt'} \right\rangle \times$$
$$\times \left\langle e^{-i\omega_0 \int_{t_1}^{t_2} \frac{v_y^2(t')}{2c^2} dt'} \right\rangle = \Phi_1(t)\, \Phi_2^2(t). \tag{6}$$

Метод вычисления средних типа $\Phi_i(t)$, где $i = 1,\ 2$, развит в работах [4, 5]. В нашем случае вспомогательные величины $A_i$ $(i = 1,\ 2)$, где $A_i = \left\langle \exp\left( i \int_{t_1}^{t_2} F_i(v)\, dt \right) \right\rangle_{v(t_1)=v}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial A_i}{\partial \tau} + x \frac{\partial A_i}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} - iF_i(x)\, A_i = 0 \tag{7}$$

с начальным условием $A_i(\tau = 0) = 1$. Скобки со значком $v(t_1) = v$ обозначают усреднение по случайному процессу с фиксированной начальной точкой $v$. Величины $F_i(x)$ равны

$$F_1 = \gamma x + \beta x^2, \quad F_2 = -\beta x^2, \quad \gamma = \frac{\omega_0}{\alpha}\frac{v_0}{c}, \quad \beta = \frac{\omega_0}{\alpha}\frac{v_0^2}{c^2}.$$

Кроме того, введены безразмерные величины $x = \frac{v}{v_0}$, $\tau = \alpha(t_2 - t_1)$. Таким образом, нахождение функции релаксации сводится к решению уравнений типа (7) с последующим усреднением полученных решений по распределению для начальных значений $v$. Будем решать уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + x\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - i(\gamma x + \beta x^2) A = 0, \quad A_{\tau=0} = 1, \tag{8}$$

решение которого позволит вычислить $\Phi_1(\tau)$; комплексно-сопряженное же решение этого уравнения в случае $\gamma \equiv 0$ определит $\Phi_2(\tau)$.

Произведя подстановку $A = e^{\frac{1+\delta}{2}(\tau + x^2)} B(\tau,\ x)$, где $\delta = \sqrt{1 - 2i\beta}$, получим для $B(\tau,\ x)$ уравнение

$$\frac{\partial B}{\partial \tau} - \delta x \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - i\gamma x B = 0 \tag{9}$$

с начальным условием $B_{\tau=0}=e^{-\frac{1+\delta}{2}x^2}$. Будем искать его решение в виде

$$B(\tau, x)=\int_{-\infty}^{+\infty} b(\tau, \nu)\, e^{-i\nu x} d\nu \tag{10}$$

тогда для $b(\tau_1\nu)$ получаем уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial b}{\partial \tau}+(\delta\nu-\gamma)\frac{\partial b}{\partial \nu}=-\left(\delta+\frac{\nu^2}{2}\right)b, \tag{11}$$

кроме того, $b(\tau, \nu)$ должно удовлетворять соотношению $(\delta\nu-\gamma)\, be^{-i\nu x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0$. Общий интеграл уравнения

$$b=f\left(\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\delta\nu-\gamma}{\delta}e^{-\delta\tau}\right)\exp\left\{-\left(\delta+\frac{\gamma^2}{2\delta^2}\right)\tau+\frac{1}{4\delta}\times\right.$$
$$\left.\times\left[-\nu^2(1+e^{-\delta\tau})-2\nu\frac{\gamma}{\delta}(1-e^{-\delta\tau})+\frac{\gamma^2}{\delta^2}(3-e^{-\delta\tau})\right]\right\} \tag{12}$$

зависит от произвольной функции $f(z)$. Начальное условие для $B$ накладывает на эту произвольную функцию интегральное соотношение

$$e^{-\frac{1+\delta}{2}x^2}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu)\, e^{-i\nu x} d\nu, \tag{13}$$

которое однозначно определяет ее. Окончательно для $b(\tau, \nu)$ получаем

$$b(\tau, \nu)=[2\pi(1+\delta)]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{\nu^2}{\delta(1+\delta)}[(1+\delta)-(1-\delta)e^{-2\delta\tau}]-\frac{\gamma\nu(1-e^{-\delta\tau})}{2\delta^2(1+\delta)}\times\right.$$
$$\left.\times[(1+\delta)-(1-\delta)e^{-\delta\tau}]+\frac{\gamma^2(1-e^{-\delta\tau})}{4\delta^3(1+\delta)}[(3+\delta)-(1-\delta)e^{-\delta\tau}]-\left(\delta+\frac{\gamma^2}{2\delta^2}\right)\tau\right\}. \tag{14}$$

Легко убедиться, что найденное решение удовлетворяет не только уравнению (11), но и дополнительному условию, наложенному на $b(\tau, \nu)$. Подставляя выражение (14) в (10) и интегрируя по $\nu$, получаем решение задачи (9); возвращаясь к величине $A(\tau, x)$, получаем решение исходной задачи (8).

Будем считать, что излучающие частицы находятся в равновесии со средой. Тогда распределение для $v$ будет стационарным решением уравнения (3), т. е. распределением Максвелла. Усредняя решение уравнения (8) по распределению Максвелла, получаем для $\Phi_i(\tau)$

$$\Phi_1(\tau)=2\left\{\frac{\delta e^{\left(1-\delta-\frac{\gamma^2}{\delta}\right)\tau}}{(1+\delta)^2-(1-\delta)^2 e^{-2\delta\tau}}\right\}^{1/2}\exp\left\{\frac{\gamma^2}{\delta^3}\frac{1-e^{-\delta\tau}}{(1+\delta)+(1-\delta)e^{-\delta\tau}}\right\}, \tag{15a}$$

$$\Phi_2(\tau)=2\left\{\frac{\delta^* e^{(1-\delta^*)\tau}}{(1+\delta^*)-(1-\delta^*)^2 e^{-2\delta^*\tau}}\right\}^{1/2}. \tag{15б}$$

Используя результаты (15), получаем с помощью формулы (6) окончательное выражение для функции релаксации

$$\Phi(\tau)=8\frac{|\delta|}{|(1+\delta)^2-(1-\delta)^2 e^{-2\delta\tau}|}\left\{\frac{\delta^* e^{\left(3-2\,\mathrm{Re}\,\delta-\delta^*-\frac{\gamma^2}{\delta^2}\right)\tau}}{(1+\delta^*)^2-(1-\delta^*)^2 e^{-2\delta^*\tau}}\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{\gamma^2}{\delta^3}\frac{1-e^{-\delta\tau}}{(1+\delta)-(1-\delta)e^{-\delta\tau}}\right\}. \tag{16}$$

Если положить $\delta = 1$, т. е. $\beta \equiv 0$ (ограничиться линейным по $v$ членом разложения), то результат (16) переходит в функцию релаксации работы [1].

Как будет видно из дальнейшего, квадратичными членами в разложении наблюдаемой частоты излучения можно ограничиться в случае $\beta \ll 1$. Разлагая $\delta$ в ряд по $\beta$ и оставляя только существенные члены, получим

$$\Phi(\tau) \approx e^{-\left(\frac{i\beta+\gamma^2}{2}+2i\beta\gamma^2\right)\tau} \exp\left\{\frac{\gamma^2}{2}\left[1-e^{(-1+i\beta)\tau}\right] + \right.$$
$$\left. + i\beta\frac{\gamma^2}{2}\left[3\left(1-e^{(-1+i\beta)\tau}\right)+\frac{1}{2}\left(1-e^{(-1+i\beta)\tau}\right)^2\right]\right\}. \qquad (16а)$$

Величина $\gamma \sim \frac{l_0}{\lambda}$, где $\lambda$ — длина волны испускаемого излучения. В случае, если $\gamma \approx \frac{v_0}{c}$ $\left(\beta = \frac{\gamma v_0}{c}\right)$ из формулы (16а) видно, что максимум линии излучения смещается в сторону меньших частот на величину порядка ширины линии. Таким образом, для длинноволнового излучения учет квадратичных членов приводит к заметным отличиям от формулы работы [1]. В противоположном случае коротковолнового излучения, для интервалов времени $\tau > 1$ $\left(t_2 - t_1 > \frac{1}{\alpha},\ \alpha \sim \frac{1}{\tau_0}\right)$ мы получим

$$\Phi_{\tau>1}(\tau) \approx e^{-\left(\frac{1}{2}+i\beta\right)\gamma^2\tau+\frac{\gamma^2}{2}}\left\{\cos\frac{7\beta\gamma^2}{4} + i\sin\frac{7\beta\gamma^2}{4}\right\}. \qquad (17)$$

Центральная часть линии излучения, следовательно, в этом случае будет определяться выражением

$$I(\omega) \sim \frac{\frac{\gamma^2}{2}\alpha\cos\frac{7\beta\gamma^2}{4} + (\omega-\omega_0+\alpha\beta\gamma^2)\sin\frac{7\beta\gamma^2}{4}}{(\omega-\omega_0+\alpha\beta\gamma^2)^2+\frac{\alpha^2\gamma^4}{4}}, \qquad (18)$$

которое имеет максимум в точке $\omega = \omega_0 - \alpha\beta\gamma^2 + \frac{\alpha\gamma^2}{2}\frac{\cos\varphi - 1}{\sin\varphi}$ и минимум в точке $\omega = \omega_0 - \alpha\beta\gamma^2 + \frac{\cos\varphi + 1}{\sin\varphi}$, $\varphi = \frac{7\beta\gamma^2}{4}$. Минимум в спектре возник в результате сделанных нами приближений при вычислении $\Phi(\tau)$ и, очевидно, не имеет физического смысла. Потребуем, чтобы он лежал достаточно далеко от центра линии. Тогда полученное ограничение будет одновременно и определением области применимости выражения (16). Из условия

$$\frac{\alpha\gamma^2}{2}\frac{\cos\varphi+1}{\sin\varphi} \geqslant \frac{\alpha\gamma^2}{2} \qquad (19)$$

получаем $\gamma^2\beta \ll 1$ или $\gamma < \left(\frac{v_0}{c}\right)^{1/3}$ откуда $\beta = \frac{\gamma v_0}{c} \ll 1$.

Максимум выражения (18) находится, следовательно, в точке $\omega = \omega_0 - \alpha\beta\gamma^2\left(1-\frac{\gamma^2}{4}\right)$ и, если $\gamma > 2$, смещен в сторону положительных частот. Кроме того, как мы уже отмечали, линия излучения асимметрична.

Автор благодарит Н. Н. Корста, Н. И. Хозановича и И. В. Александрова за полезные обсуждения.

## Литература

[1] М. И. Подгорецкий, А. В. Степанов. ЖЭТФ, *40*, 561, 1961.
[2] К. Лонгмайр. Физика плазмы. Атомиздат, М., 1966.
[3] С. Чандрасекар. Стохастические проблемы в физике и астрономии. ИЛ, 1947.
[4] Н. Н. Корст, Н. И. Хозанович. ЖЭТФ, *45*, 1523, 1963.
[5] Н. Н. Корст, А. В. Лазарев. Physica, *40*, 270, 1968.

Поступило в Редакцию 24 марта 1969 г.