

О ПРИМЕНЕНИИ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ КРАМЕРСА—КРОНИГА ДЛЯ РАСЧЕТА ФАЗЫ ВОЛНЫ, ОТРАЖЕННОЙ ОТ ТОНКИХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЛОЕВ

Е. А. Лунашко, В. К. Милославский и И. Н. Шкляревский

Дана классификация частотной зависимости фазы волны, отраженной от плоскопараллельного слоя, заключенного между прозрачными полубесконечными средами. Выявлены два существенных случая $|r_1| > |r_2|$ и $|r_1| < |r_2|$, для которых имеет место качественное различие в зависимостях $\varphi(\omega)$. В первом случае применимы дисперсионные соотношения Крамерса—Кронига для нахождения $\varphi(\omega)$ по известной частотной зависимости отражательной способности. Во втором — для вычисления $\varphi(\omega)$ требуется расчет дополнительных слагаемых, определяемых нулями комплексной амплитуды отраженной волны в верхней полуплоскости комплексной частоты.

Часто возникает задача нахождения фазы отраженной волны слоистых сред. Эта задача важна в связи с синтезом многослойных покрытий, фильтров и других интерференционных устройств. Дисперсия фазы существенно влияет на основные характеристики фильтров [1-3]. Измерение фазы и отражательной способности желательно в промежуточных стадиях формирования интерференционного устройства [4], так как при этом появляется возможность более точного предсказания оптических характеристик устройства в его окончательном виде.

Представляет интерес измерение фазы отраженной волны от однослойных покрытий на диэлектриках и металлах [4-6].

Существующие интерференционные методы определения фазы отраженной волны пригодны в случае высокого отражения и требуют кропотливой работы [4-6]. Более привлекательным является использование дисперсионных соотношений Крамерса—Кронига (ДС), позволяющих по известной частотной зависимости отражательной способности рассчитать частотную зависимость фазы. В [7] показана принципиальная возможность определения фазы отраженной волны от диэлектрического слоя, расположенного на оптически менее плотной среде, с помощью ДС.

Возможность применения ДС в общем случае слоистых систем не очевидна, так как амплитуда отраженной волны должна отвечать ряду требований в области комплексной частоты. В настоящей работе исследуются условия применимости ДС для нахождения фазы при отражении от однослойных покрытий.

Комплексная амплитуда волны, нормально отраженной от слоя толщиной d и с показателем преломления $\tilde{n} = n + ik$, разграничивающего две прозрачные среды с показателями преломления n_0 и n_1 , может быть представлена в виде

$$\tilde{R} = R \exp i\varphi = \frac{r_1 + r_2 \exp ia\omega}{1 + r_1 r_2 \exp ia\omega}, \quad (1)$$

где

$$r_1 = |r_1| \exp i\delta_1 = \frac{\tilde{n} - n_0}{\tilde{n} + n_0}, \quad r_2 = |r_2| \exp i\delta_2 = \frac{n_1 - \tilde{n}}{n_1 + \tilde{n}}$$

и $a=2d\tilde{n}/c$. Из (1) следуют выражения для амплитуды R и фазы φ

$$R^2 = \frac{|r_1|^2 + |r_2|^2 \eta^2 + 2|r_1 r_2| \eta \cos(a_1 \omega + \delta_2 - \delta_1)}{1 + |r_1|^2 |r_2|^2 \eta^2 + 2|r_1 r_2| \eta \cos(a_1 \omega + \delta_2 + \delta_1)}, \quad (2)$$

$$\varphi = \arctg \frac{|r_1| (1 - |r_2|^2 \eta^2) \sin \delta_1 + |r_2| \eta (1 - |r_1|^2) \sin(a_1 \omega - \delta_2)}{|r_1| (1 + |r_2|^2 \eta^2) \cos \delta_1 + |r_2| \eta (1 + |r_1|^2) \cos(a_1 \omega - \delta_2)}, \quad (3)$$

где $\eta = \exp(-a_2 \omega)$ и $a = a_1 + ia_2$.

Отличающимися от общепринятых [8, 9] выражениями (1)–(3) мы воспользовались, чтобы не нарушать установленной записи ДС [10]. Как показано в [11, 12], соответствие с экспериментом получается, если в (1) взять $\exp(-ia\omega)$, $r_1 = -(\tilde{n} - n_0)/(\tilde{n} + n_0)$; $r_2 = (n_1 - \tilde{n})/(n_1 + \tilde{n})$ и $\tilde{n} = n - ik$. Истинный скачок фазы Δ связан с φ соотношением $\Delta = \pi - \varphi$ [12]. Из (3) можно вычислить зависимость $\varphi(d)$ или $\varphi(\omega)$. Наиболее просто представить фазовые зависимости в области прозрачности, так как в этом случае дисперсией величин, входящих в (3), можно пренебречь. При условии $k=0$, коэффициенты r_1 и r_2 становятся действительными и могут иметь оба знака. Оказывается, что разнообразие зависимостей $\varphi(a\omega)$ определяются соотношением между абсолютными величинами r_1 и r_2 и их знаками. Можно выделить два основных случая: 1) $|r_1| > |r_2|$ и 2) $|r_1| < |r_2|$. При $|r_1| > |r_2|$ в начальной точке $a\omega=0$ $\varphi(0)=0$, если $r_1 > 0$ и $r_2 \leq 0$ и $\varphi(0)=\pi$ (или $-\pi$), если $r_1 < 0$, $r_2 \leq 0$. При $|r_1| < |r_2|$ $\varphi(0)=0$ при $r_2 > 0$ и $r_1 \geq 0$, и $\varphi(0)=\pi$ (или $-\pi$) при $r_2 < 0$, $r_1 \leq 0$. Существенное различие двух указанных ситуаций заключается в следующем. При $|r_1| > |r_2|$ фаза является периодической функцией $a\omega$, осциллирует относительно прямой $\varphi=0$ или $\varphi=\pi$ с амплитудой осцилляции, не превышающей $\pi/2$. Во втором случае наблюдается монотонный рост фазы с ростом $a\omega$. (Фаза при этом разделяется на два слагаемых: прямую линию, составляющую угол $\pi/4$ с осью абсцисс и пересекающую ось ординат при 0 или π , и осциллирующую добавку с периодом $\Delta a\omega = 2\pi$). В первом случае имеются точки, в которых производная $\varphi'(a\omega)=0$, во втором $-\varphi'(a\omega) \neq 0$ всюду. Обе ситуации разделяются условием равенства коэффициентов отражения передней и задней границы $r_1=r_2$ [8]. При выполнении этого условия коэффициент отражения R^2 обращается в 0 (условие «просветления») в точках $a\omega = (2m+1)\pi$ при $r_1, r_2 \leq 0$ или $a\omega = 2m\pi$ при $r_1 = 0$, $r_2 \geq 0$. В этих же точках фаза претерпевает скачкообразное изменение (на величину $\pm\pi$).

От условий, налагаемых на коэффициенты отражения, можно перейти к условиям для показателей преломления слоя и окружающих сред.

В первом случае ($|r_1| > |r_2|$) выполняется неравенство $(n^2 - n_0 n_1) \times (n_1 - n_0) > 0$. Если $n_1 > n_0$, то $n^2 > n_0 n_1$; если же волна падает на границу раздела со стороны оптически более плотной среды ($n_1 < n_0$), то при $|r_1| > |r_2|$ $n^2 < n_0 n_1$. Условие «просветления» $r_1=r_2$ соответствует условию $n^2 = n_0 n_1$ при $n_0 \neq n_1$, если $n_0 = n_1$, то условие $r_1=r_2$ выполняется при любом значении n .

На рис. 1 приведена зависимость $\Delta = \pi - \varphi = f(a\omega)$ для различных соотношений r_1 и r_2 .

Отмеченные выше два типа зависимостей фазы от частоты ω различаются по их возможности быть представленными ДС Крамерса—Кронига. Фаза волны, отраженной при нормальном падении от массивного зеркала, может быть найдена по известной частотной зависимости $R(\omega)$ с помощью интегрального соотношения

$$\varphi(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln R(x) dx}{x^2 - \omega^2}. \quad (4)$$

Соотношение (4) выполняется всегда, если волна падает на плоское зеркало со стороны вакуума, и широко используется для нахождения оптических постоянных по известной отражательной способности. Однако (4)

не является универсальным и может не выполняться при отражении света от границы раздела двух сред с n отличающимися от единицы, что показано в [13]. Необходимым условием выполнимости (4) является отсутствие нулей и полюсов у комплексной функции \tilde{R} в верхней полуплоскости комплексной частоты $\omega \equiv z = x + iy$ [10]. Из (1) видно, что \tilde{R} не имеет полюсов в верхней полуплоскости z , так как всюду $|r_1 r_2| < 1$ и $\exp iaz < 1$. Далее будем предполагать отсутствие частотной зависимости у величин $r_1 r_2$ и a . Такое условие в первом приближении обеспечивается на действительной оси в области прозрачности слоя и окружающих сред вдали от собственных частот. В этом случае частотная зависимость \tilde{R} определяется главным образом экспонентой $\exp iaz$ как на действительной оси, так и в комплексной области, непосредственно примыкающей к действительной оси в интервале прозрачности. Условие обращения в нуль функции \tilde{R} в этом случае принимает вид

$$x_m = \frac{(2m + 1)\pi}{a}, \quad y_m = \frac{1}{a} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

$$r_1, r_2 > 0 \text{ или } r_1, r_2 < 0, \quad (5)$$

$$x_m = \frac{2m\pi}{a}, \quad y_m = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{r_2}{r_1} \right|,$$

$$r_1 \geq 0 \text{ и } r_2 \leq 0, \quad (6)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

Из (5) и (6) следует, что нули \tilde{R} находятся в верхней полуплоскости при $|r_2| > |r_1|$ и переходят в нижнюю при $|r_2| < |r_1|$. Таким образом, при выполнении последнего условия никаких препятствий для применения ДС (4) для нахождения фазы отраженной волны не имеется [7].

Если же $r_1, r_2 < 0$ или $r_1 < 0, r_2 > 0$, то в правой части (4) при $|r_2| < |r_1|$ прибавляется частотнонезависимое слагаемое π . Случай $|r_2| > |r_1|$ требует специального обсуждения, так как функция $\ln \tilde{R}$ приобретает в верхней полуплоскости точки ветвления. Отметим, что число нулей в верхней полуплоскости ограничено, так как диэлектрики и полупроводники имеют «красную» границу поглощения x_g , отделяющую область прозрачности от области собственного поглощения. Для частот $x > x_g$ наблюдается значительный рост $\text{Im } \tilde{n}$ с ростом частоты x . В области, непосредственно примыкающей к x_g , $k \ll n$, и числитель \tilde{R} может быть представлен в форме $r_1 + r_2 \exp (ia_1 - a_2) z$. Отсюда видно, что нули в верхней полуплоскости и на действительной оси отсутствуют при выполнении условия $a_2 x = Kd > \ln \left| \frac{r_2}{r_1} \right|$, ($K = \frac{2x}{c} k$). Это условие равносильно условию отсутствия отрицательных действительных значений \tilde{R} на действительной оси при $r_1, r_2 > 0$ или $r_2 > 0, r_1 < 0$, или положительных при $r_1, r_2 < 0$ или $r_2 < 0, r_1 > 0$. При небольшой разнице в r_1 и r_2 это условие выполняется при сравнительно небольших оптических плотностях (например, при $r_2/r_1 \sim 2$ нули переходят в нижнюю полуплоскость при $Kd > 0.67$). Ограниченное число нулей в верхней полуплоскости позволяет вывести

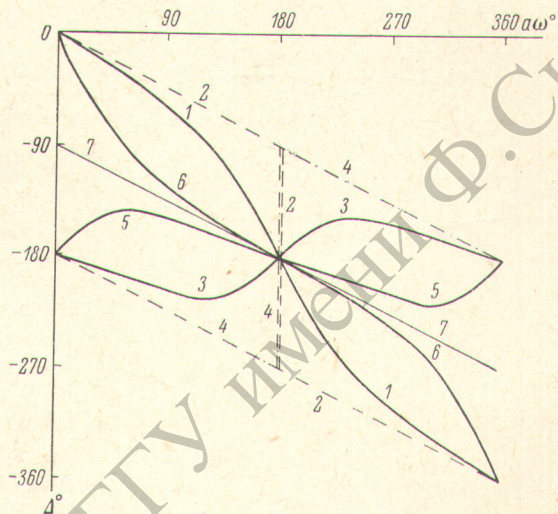


Рис. 1. Зависимость $\Delta = \pi - \varphi = f(a\omega)$.

- 1 — $|r_2| > |r_1|, r_2 > 0, r_1 > 0, n_0 = 1.5, n = 1.3, n_1 = 1;$
 - 2 — $|r_2| = |r_1|, r_2 > 0, r_1 > 0, n_0 = 1.69, n = 1.3, n_1 = 1;$
 - 3 — $|r_1| > |r_2|, r_1 < 0, r_2 < 0, n_0 = 1, n = 1.3, n_1 = 1.5;$
 - 4 — $|r_1| = |r_2|, r_1 < 0, r_2 < 0, n_0 = 1, n = 1.3, n_1 = 1.69;$
 - 5 — $|r_1| > |r_2|, r_1 < 0, r_2 > 0, n_0 = 1.2, n = 2.2, n_1 = 1.5;$
 - 6 — $|r_1| < |r_2|, r_1 < 0, r_2 > 0, n_0 = 1.5, n = 2.2, n_1 = 1.2;$
 - 7 — $|r_1| = |r_2|, r_1 < 0, r_2 > 0, n_0 = 1.5, n = 2.2, n_1 = 1.5.$
- Для случаев $|r_1| > |r_2|, r_1 > 0, r_2 \leq 0$ и $|r_2| > |r_1|, r_2 < 0, r_1 \leq 0$ значения Δ смещаются на π .

соотношение, аналогичное (4) с учетом существования точек ветвления. Для этого рассмотрим интеграл в первой четверти комплексной области от функции $f(z) = (z^2 - \omega^2)^{-1} \ln \tilde{R}$ по контуру, указанному на рис. 2, обходящему все нули функции \tilde{R} . Так как внутри контура функция $f(z)$ однозначна, полный интеграл равен нулю. Легко видеть, что при $L \rightarrow \infty$ $\rho_m \rightarrow 0$ (ρ_m — радиус малой окружности вокруг точки ветвления z_m) интегралы по большой и малым окружностям обращаются в нуль, так как при $L \rightarrow \infty$ \tilde{R} стремится к ограниченному пределу $\neq 0$. Значения функции $\ln \tilde{R}$ по двум берегам разреза Γ_{1m} и Γ_{2m} отличаются на $2\pi i$. Интеграл по мнимой оси чисто мнимый и сходится при $L \rightarrow \infty$, так как $\ln \tilde{R}$ — действительная функция на мнимой оси. Выделяя действительную часть из полного интеграла, получаем при $\rho_m \rightarrow 0$

$$\varphi(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln R(x) dx}{x^2 - \omega^2} + 2 \sum_{m=0}^{n-1} \left(\arctg \frac{y_m}{x_m - \omega} - \arctg \frac{y_m}{x_m + \omega} \right) + 2\pi j, \quad (7)$$

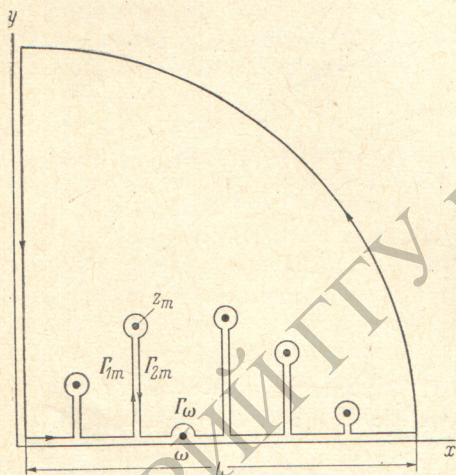


Рис. 2. Контур интегрирования для случая $r_1 < r_2$ и $r_1, r_2 > 0$.

где целое число j задается условием $x_{j-1} < \omega < x_j$, n — полное число нулей в верхней полуплоскости. Полученная формула отличается от (4) слагаемыми, возникающими из-за отличного от нуля интеграла по берегам разреза Γ_{1m} и Γ_{2m} . Формула (7) применима в том случае, если $r_1, r_2 > 0$. При $r_1, r_2 < 0$ в правой части возникает дополнительное слагаемое π . При $r_1 > 0, r_2 < 0$ первая точка ветвления попадает на мнимую ось, и в правой части (7) добавляется слагаемое, равное $-2 \arctg \frac{y_0}{\omega}$, а нумерация суммы начинается с $m = 1$, при $r_1 < 0, r_2 > 0$ добавляется слагаемое $\pi - 2 \arctg \frac{y_0}{\omega}$.

Дополнительные слагаемые создают дополнительную дисперсию фазы $\varphi(\omega)$ по сравнению с тем, что дает интегральное соотношение (4). Особенно существенна дисперсия в районе частот ω , близких к x_m . Из (7) видно, что при $\omega \sim 0$ вклад в фазу за счет выбранной точки x_m незначителен и близок к нулю, при $\omega \gg x_m$ фаза приобретает слагаемое 2π . Таким образом, фаза имеет добавочный член, нарастающий по мере роста ω и определяющий качественное различие в ходе фазы при $|r_1| < |r_2|$ и $|r_1| > |r_2|$.

Использование ДС в этом случае для нахождения фазы затруднено из-за необходимости вычисления координат точек ветвления. В области прозрачности дисперсия оптических постоянных незначительна, и координаты можно вычислить, используя соотношения (5), (6), где значения a, r_1 и r_2 следует брать в минимумах $R(\omega)$. Значительные трудности возникают, однако, если точка ветвления по координате x_m приходится на край собственного поглощения, так как дисперсия $n(\omega)$ и $k(\omega)$ в этой области значительна (определяется сложными аналитическими выражениями) и уравнения для нахождения x_m, y_m приобретают громоздкий вид. Найденные соотношения могут быть обобщены на случай, когда диэлектрическая пленка создается на металлической поверхности. Здесь, как правило, $|r_1| < |r_2|$. Интегральная формула (4) не может быть применена для расчета $\varphi(\omega)$ и следует пользоваться более сложными выраже-

ниями типа (7). При расчете координат точек ветвления возникают дополнительные трудности из-за отличной от нуля фазы на границе слой—металл и ее дисперсии.

Литература

- [1] P. W. Baumeister, F. A. Jenkins. *J. Opt. Soc. Am.*, 47, 57, 1957.
- [2] S. Penselin, A. Steudell. *Zs. Physik*, 142, 21, 1955.
- [3] O. S. Heavens, H. M. Liddell. *Appl. Optics*, 5, 373, 1966.
- [4] И. Н. Шкляревский, Е. А. Лупашко, Н. Л. Афанасьева. *Опт. и спектр.*, 26, 437, 1969.
- [5] И. Н. Шкляревский, Н. А. Носуленко. *Опт. и спектр.*, 14, 805, 1963.
- [6] И. Н. Шкляревский, Е. А. Лупашко. *Опт. и спектр.*, 21, 482, 1966.
- [7] Е. А. Лупашко, В. К. Милославский, И. Н. Шкляревский. *Опт. и спектр.*, 24, 257, 1968.
- [8] Г. В. Розенберг. *Оптика тонкослойных покрытий*. ГИФМЛ, М., 1958.
- [9] С. Метфессель. *Тонкие пленки, их изготовление и измерение*. ГЭМ, М.—Л., 1963.
- [10] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Электродинамика сплошных сред*. ГИФМЛ, М., 1959.
- [11] И. Н. Шкляревский. *ЖТФ*, 26, 333, 1956.
- [12] И. Н. Шкляревский, Н. А. Носуленко. *Опт. и спектр.*, 14, 247, 1963.
- [13] J. S. Plaskett, P. N. Schatz. *J. Chem. Phys.*, 38, 612, 1963.

Поступило в Редакцию 14 апреля 1969 г.