УДК 512.542

О МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Н.М. Адарченко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON MAXIMAL SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

N.M. Adarchenko

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В 1986 году В.А. Ведерников доказал, что если M – не нормальная максимальная подгруппа конечной разрешимой группы G, то M содержит нормализатор некоторой силовской подгруппы группы G. В статье доказано следующее обобщение теоремы В.А. Ведерникова.

Теорема. *Пусть G – π-разрешимая конечная группа. Пусть M – такая не нормальная максимальная подгруппа группы G, что $| G : M |$ – степень простого числа p из π. Пусть H – некоторая холлова подгруппа из M такая, что p не делит $| H |$, причем либо $|\pi(H)\cap\pi'| \leq 1$, либо $| M : H |$ – π-число. Если ядро подгруппы HM_G / M_G в M / M_G не равно 1, то $N_G(H)$ содержится в M.*

Здесь M_G – ядро M в G, т. е. наибольшая нормальная подгруппа из G, содержащаяся в M; $\pi(H)$ – множество всех простых делителей $| H |$.

***Ключевые слова**: π-разрешимая группа, максимальная подгруппа.*

In 1986 V.A. Vedernikov proved that if M is a non-normal maximal subgroup of a finite soluble group G, then M contains a normalizer of some Sylow subgroup of G. In the paper the following generalization of Vedernikov's result is proved.

Theorem. *Let G be a π-soluble finite group. Let M be a non-normal maximal subgroup of G such that $| G : M |$ is a power of a prime p in π. Let H be a Hall subgroup in M such that p does not divide $| H |$, and either $|\pi(H) \cap \pi'| \leq 1$ or $| M : H |$ is a π-number. If the core of HM_G / M_G in M / M_G is not equal to 1, then $N_G(H)$ is contained in M.*

Here M_G is the core of M in G, i. e., the largest normal subgroup in G contained in M; $\pi(H)$ is the set of prime divisors of $| H |$.

***Keywords**: π-soluble group, maximal subgroup.*

2010 Mathematics Subject Classification: 20D20, 20E28

По теореме Ф. Холла, конечная группа разрешима, если индексы ее максимальных подгрупп – простые числа или квадраты простых чисел [1, теорема 10.5.7]. В 1986 году в работе [2] В.А. Ведерников доказал, что если M – не нормальная максимальная подгруппа конечной разрешимой группы G, то M содержит нормализатор некоторой силовской подгруппы группы G. В настоящей статье предлагается усиление этого результата.

Обозначения: π – некоторое множество простых чисел; π' – множество всех простых чисел, не входящих в π; M_G – ядро подгруппы M в группе G, т. е. наибольшая нормальная подгруппа из G, содержащаяся в M . Натуральное число t называется π-числом, если все его простые делители принадлежат π. Через $F(G)$ обозначается подгруппа Фиттинга группы G. Подгруппа H конечной группы G называется π-хол-ловой подгруппой, если H – π-подгруппа и $|G : H|$ является π'-числом. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка конечной группы G.

В работе [3] доказано следующее обобщение упомянутой выше теоремы В.А. Ведерникова.

***Теорема* 1.** *Пусть G – π-разрешимая конечная группа, содержащая нильпотентную π-холлову подгруппу. Пусть M – не нормальная максимальная подгруппа группы G. И пусть $|G : M|$ – π-число. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $F(M / M_G) \neq 1$ и $q \in \pi\,(F(M /M_G))$, то в G найдется силовская q- подгруппа Q такая, что $N_G(Q)$ содержится в M;*

2) *если $F(M / M_G) = 1$, то $N_G(K)$ содержится в M для некоторой π'-холловой подгруппы K группы G.*

Наша задача состоит в усилении теоремы 1. Нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения. Следующая лемма является частным случаем леммы 17.5 монографии [4].

***Лемма* 1**. *Пусть K – нормальная подгруппа π-разрешимой конечной группы G. Пусть H – такая холлова подгруппа группы G, что либо $|\pi(H) \cap \pi'| \leq 1$, либо $|G : H|$ – π-число. Тогда $N_G(KH) = N_G(H)K$ и справедливо равенство*

$$N_G(H)K / K = N_{G/K}(HK / K).$$

Напомним, что конечная группа называется примитивной, если она имеет максимальную подгруппу с единичным ядром.

***Лемма* 2** [5, теорема А.15.2]. *Если конечная примитивная группа G имеет абелеву минимальную нормальную подгруппу L, то L является единственной минимальной нормальной подгруппой в G, причем $L = C_G(L)$ дополняема в G. Кроме того, L совпадает с подгруппой Фиттинга $F(G)$ группы G.*

***Лемма* 3** [4, лемма 3.9]. *Пусть L – минимальная нормальная подгруппа конечной группы G. Если порядок L делится на простое число p, то $G / C_G(L)$ не содержит неединичных нормальных p-подгрупп.*

***Теорема* 2.** *Пусть G – π-разрешимая конечная группа. Пусть M – такая не нормальная максимальная подгруппа группы G, что $|G : M|$ – степень простого числа p из π. Пусть H – некоторая холлова подгруппа из M такая, что p не делит $|H|$, причем либо $|\pi(H) \cap \pi'| \leq 1$, либо $|M : H|$ – π-число. Если ядро подгруппы HM_G / M_G в M / M_G не равно 1, то $N_G(H)$ содержится в M.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $M_G \neq 1$. Рассмотрим группу G / M_G и её максимальную подгруппу M / M_G. Подгруппа HM_G / M_G является в M / M_G холловой подгруппой, удовлетворяющей условию теоремы. Применяя индукцию, получаем, что нормализатор подгруппы HM_G / M_G в G / M_G содержится в M / M_G. Но по лемме 1 нормализатор подгруппы HM_G / M_G в G / M_G совпадает с $N_G(H)M_G / M_G$. Отсюда следует, что $N_G(H)$ содержится в M.

Теперь рассмотрим случай $M_G = 1$. В этом случае группа G примитивна, и по лемме 2 минимальная нормальная подгруппа $L = C_G(L)$ совпадает с подгруппой Фиттинга $F(G)$ группы G. Кроме того, согласно лемме 3 факторгруппа G / L не содержит неединичных нормальных p-подгрупп. Так как $G / L = ML / L$ изоморфна M, то получается, что M не содержит неединичных нормальных p-подгрупп. По условию, $H_M \neq 1$. Нетрудно заметить, что подгруппа H_ML нормальна в G. Применяя тождество Дедекинда, получаем следующее равенство:

$$H_M = H_M (H \cap L) = H \cap H_ML.$$

Учитывая это, приходим к следующему равенству:

$$N_G(H) \leq N_G(H \cap H_ML) = N_G(H_M) = M.$$

Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть G – π-разрешимая конечная группа. Пусть M – не нормальная максимальная подгруппа группы G. И пусть $|G : M|$ – π-число. Если $F(M / M_G) \neq 1$ и $q \in \pi$ $(F(M / M_G))$, то в G найдется силовская q-подгруппа Q такая, что $N_G(Q)$ содержится в M.*

***Следствие* 2.** *Пусть G – π-разрешимая конечная группа. Пусть M – не нормальная максимальная подгруппа группы G. И пусть $|G : M|$ – π-число. Если $F(M / M_G) = 1$, то $N_G(K)$ содержится в M для некоторой π'-холловой подгруппы K группы G.*

Следствия 1 и 2 показывают, что условие нильпотентности π-холловой подгруппы в теореме 1 является излишним.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Холл*, *М.* Теория групп / М. Холл. – М. : Изд. иностр. литературы. – 1962. – 468 с.

2. *Ведерников*, *В.А.* О π-свойствах конечных групп / В.А. Ведерников // В сб. : Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск : Наука и техника. – 1986.– С. 13–19.

3. *Gritsuk*, *D.V.* On maximal subgroups of a finite solvable group / D.V. Gritsuk, V.S. Monakhov // arXiv: 1105.1054v1[math. GR] 5 May 2011. – P. 1–5.

4. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука. – 1978. – 272 с.

5. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter. – 1992. – 891 pp.

Поступила в редакцию 07.06.12.