ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С.А. Вербицкая, Е.Е. Дубинина

Стационарное уравнение Шредингера для связанных состояний в импульсном представлении имеет вид $\left(w^2 = -2mE > 0\right)$:

$$\left(\vec{p}^2 + w^2\right)\psi\left(\vec{p}\right) = -2m\int V\left(\vec{p}-\vec{k}\right)\psi\left(\vec{k}\right)d\vec{k}.$$

Рассмотрим потенциал, который в координатном представлении записывается следующим образом: $V\left(\vec{r}\right) = \alpha\left|\vec{r}\right|^{-2}$. Используя преобразование Фурье, получаем вид этого потенциала в импульсном представлении: $V(\vec{p}-\vec{k}) = \alpha\left(4\pi\left|\vec{p}-\vec{k}\right|\right)^{-1}$. Парциальные потенциалы [1] для него записывается с помощью ступенчатой функции Хевисайда:

$$V_\ell(p,k) = \frac{\alpha}{4\pi}\left[\Theta(k-p)p^{\ell+1}\frac{1}{k^\ell} + \Theta(p-k)k^{\ell+1}\frac{1}{p^\ell}\right].$$

Таким образом, можно сформулировать парциальные интегральные уравнения для связанных состояний ($\varphi_\ell(p) = p\psi_\ell(p)$):

$$\left(p^2 + w^2\right)\varphi_\ell(p) = -\frac{2m\alpha}{2\ell+1}\int_0^\infty\left[\Theta(k-p)p^{\ell+1}\frac{1}{k^\ell} + \Theta(p-k)k^{\ell+1}\frac{1}{p^\ell}\right]\varphi_\ell(k)dk.$$

Существует оператор $\hat{L}_p$, для которого $V_\ell(p,k)$ является функцией Грина [2]:

$$\hat{L}_p\left[\Theta(k-p)p^{\ell+1}\frac{1}{k^\ell}+\Theta(p-k)k^{\ell+1}\frac{1}{p^\ell}\right]=-(2\ell+1)\delta(p-k).$$

Таковым является самосопряженный оператор

$$\hat{L}_p=\frac{d^2}{dp^2}-\frac{\ell(\ell+1)}{p^2}.$$

Подействовав этим оператором на левую и правую части интегрального уравнения для парциальных волновых функций, получаем, что

$$\hat{L}_p\left[\varphi_\ell(p)\left(p^2+w^2\right)\right]=2ma\varphi_\ell(p).$$

Граничные условия формулируются при $p\to0$ и при $p\to\infty$. В результате несложных преобразований интегрального уравнения для $\varphi_\ell(p)$, получаем:

$$\lim_{p\to0}\left[\frac{1}{2\ell+1}\left((\ell+1)p^{\ell+1}G_0^{-1}(p)\varphi_\ell(p)-p^{\ell+1}\frac{d}{dp}\left(G_0^{-1}(p)\varphi_\ell(p)\right)\right)\right]=0,$$

$$\lim_{p\to\infty}\left[\frac{1}{2\ell+1}\left(\ell p^{-\ell}G_0^{-1}(p)\varphi_\ell(p)-p^{-\ell}\frac{d}{dp}\left(G_0^{-1}(p)\varphi_\ell(p)\right)\right)\right]=0.$$

Итак, мы свели парциальное интегральное уравнение Шредингера с потенциалом $V_\ell(p,k)$ к эквивалентной задаче Штурма–Лиувилля для дифференциального уравнения.

Литература:

1. Мессиа А. Квантовая механика: Пер. с французского // Под ред. Л.Д. Фаддеева. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.; 1978.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. 5-е изд., доп. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.; 1988. – 512 с.