О ПОЛУГРУППЕ КЛАССОВ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Д.Н. Симоненко

Известно (см. например [1]), что множество всех непустых классов Фиттинга конечных групп образует полугруппу с единицей относительно умножения классов Фиттинга. Обозначим её через Ф. Цель данной работы – исследовать её строение как топологического объекта. Используются определения и обозначения из [1].

Условимся через Σ обозначать множество всех конечных простых групп с точностью до изоморфизма. Пусть B(Σ) означает совокупность всех подмножеств Σ, снабженное топологией, база которой состоит из окрестностей вида $V_{\Omega}(\Gamma)=\{\Delta\in B(\Sigma)\mid \Delta\cap\Omega=\Gamma\cap\Omega\}$, где $\Gamma\in B(\Sigma)$, Ω пробегает все конечные подмножества Σ.

$B(\Sigma)$ с операцией $\cup$ образует топологическую полугруппу идемпотентов и она хаусдорфова.

В 1997 году вышла статья [2] Мельникова О.В. и Нестерович Т.В., в которой на полугруппе П всех непустых формаций конечных групп была введена топология и установлен ряд свойств П как топологической полугруппы.

По аналогии с [2], введем в Ф топологию.

Лемма. Пусть G – группа и $F\in\Phi$. Обозначим через $W_G(F)=\{X\in\Phi \mid G_F=G_X\}$. Семейство $\{W_G(F)\mid F\in\Phi$ и G пробегает все конечные группы$\}$ образует базу топологии в Ф.

Доказательство. Действительно, очевидно для всякого класса $F\in\Phi$ существует $W_G(F)$ из этого семейства и $F\in W_G(F)$.

Далее заметим что, если $F\in W_K(F)\cap W_L(F)$, то $F\in W_{K\times L}(F)$. Тогда для всех $X\in W_{K\times L}(F)$ из $(K\times L)_X=(K\times L)_F$ следует, что $(K\times\{1\})_X=(K\times L)_X\cap(K\times\{1\})=(K\times L)_F\cap(K\times\{1\})=(K\times\{1\})_F$. Откуда вытекает, что $K_X=K_F$. Аналогично получаем, что $L_X=L_F$. Лемма доказана.

Теорема 1. В введенной выше топологии Ф является хаусдорфовой топологической полугруппой.

Доказательство. Возьмем $F_1\in W_G(F)$ и $X_1\in W_{G/G_F}(X)$, то есть $G_F=G_{F_1}$ и $(G/G_F)_X=(G/G_F)_{X_1}$. Это означает, что $G_{F*X}/G_F=G_{F_1*X_1}/G_F$. Отсюда $(G/G^{F\cdot X})^X=G^X/G^{F\cdot X}$ и $G^{F\cdot X}$ наименьшая подгруппа из G с таким свойством, что $G^X/G^{F\cdot X}\in F$. Это означает, что выполняется $G^{F\cdot X}=(G^X)^F=(G^X)^{F_1}=(G^{X_1})^{F_1}=G^{F_1\cdot X_1}$. Откуда по теореме о соответствии $G_{F*X}=G_{F_1*X_1}$, то есть $F_1*X_1\in W_G(F*X)$. Непрерывность доказана.

Хаусдорфовость следует из того, что если $F\not\subset X$, то существует $K\in F\setminus X$ и $W_K(F)\cap W_K(F)=\varnothing$. Теорема доказана.

Заметим, что топология, введенная на полугруппе П, является компактной. Остается открытым вопрос о компактности Ф.

Теорема 2. Полугруппа Ф является непрерывной связкой над полугруппой идемпотентов $B(\Sigma)$, которая задается отображением $\sigma:\Phi\to B(\Sigma)$, где $\sigma(F)=\Sigma\cap F$.

Доказательство. Для доказательства теоремы необходимо показать, что σ есть непрерывный гомоморфизм. Докажем сначала его непрерывность. Пусть E – прямое произведение простых групп из заданного конечного множества Ω и $X\in W_E(F)$, то есть $E_X=E_F$. Тогда для любого K из Ω получим, что $K_X=K_F$ и K – простая группа. Это значит, что либо $K_X=K_F$ единичная группа и K одновременно не принадлежит F и X, либо $K^X=K^F=K$ и K одновременно принадлежит обоим классам. Поэтому $\Omega\cap F=\Omega\cap X$ и отсюда следует, что $\sigma(X)\in V_{\Omega}(\sigma(F))$. Это по определению означает непрерывность отображения σ.

Покажем, что σ – гомоморфизм, то есть $\Sigma\cap(F*X)=(\Sigma\cap F)\cup(\Sigma\cap X)$. Пусть K – простая группа из $F*X$, тогда $K_F\in X$. В силу простоты K получаем, что либо K_F совпадает с K и тогда $K\in F$, либо K_F единична и тогда $K=K/K_F\in X$. В любом случае K принадлежит правой части и выполняется включение $\Sigma\cap(F*X)\subseteq(\Sigma\cap F)\cup(\Sigma\cap X)$.

Докажем обратное включение. Пусть $K\in(\Sigma\cap F)\cup(\Sigma\cap X)$, то есть простая группа, принадлежащая или F или X. Тогда либо K не принадлежит F, то есть K_F единична и $K=K/K_F\in X$, либо $K_F=K$, то есть K принадлежит F, и тогда единичная группа $K/K_F\in X$. Получили, что $K\in\Sigma\cap(F*X)$, а это означает включение в другую сторону. Значит, мы доказали, что $\Sigma\cap(F*X)=(\Sigma\cap F)\cup(\Sigma\cap X)$ и σ – непрерывный гомоморфизм. Теорема доказана.

Литература:

1. Ведерников В.А. Элементы теории классов групп. – Смоленск, 1988.
2. Мельников О.В., Нестерович Т.В. Некоторые свойства полугрупп формаций как топологической полугруппы // Вопросы алгебры. Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф.Скорины. 1998. Вып.11.- С. 68-75.