ПОДГРУППА ФИТТИНГА И СВЕРХРАЗРЕШИМОСТЬ КОНЕЧНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

М.А. Грибовская

Согласно хорошо известной теореме Хупперта конечная группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы её всех максимальных подгрупп являются простыми числами, см. [1], теорема VI.9.5. В классе разрешимых групп эта теорема допускает следующее обобщение.

ТЕОРЕМА. *Пусть* G *– конечная разрешимая группа. Тогда и только тогда группа* G *сверхразрешима, когда каждая ее максимальная подгруппа не содержащая подгруппу Фиттинга, имеет простой индекс.*

Приведем необходимые обозначения и используемые результаты. Через $F(G)$ обозначается подгруппа Фиттинга группы G – произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы G, а через $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G – пересечение всех максимальных подгрупп группы G Запись $G = [A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A.

ЛЕММА 1. ([1], стр. 276) *Пусть* G *– конечная разрешимая неединичная группа. Тогда:*

(1) $\Phi(G) \le F(G)$ и $\Phi(G) \ne F(G)$;

(2) $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$;

(3) $C_G(F(G)) \le F(G)$;

(4) факторгруппа $F(G)/\Phi(G)$ есть прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы $G/\Phi(G)$.

Конечная группа G называется сверхразрешимой ([1], стр. 617), если она обладает нормальным рядом

$$1=G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_n=G$$

с циклическими факторами G_{i+1}/G_i, $i=0,1, \ldots, n-1$

ЛЕММА 2. ([1], стр.718) *Конечная группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда все её максимальные подгруппы имеют простые индексы.*

ЛЕММА 3. ([1], стр. 713) *Если G – конечная группа и факторгруппа $G/\Phi(G)$ сверхразрешима, то группа G сверхразрешима.*

ЛЕММА 4. ([1], стр. 20) *Группа всех автоморфизмов группы простого порядка p является циклической группой $p-1$.*

ЛЕММА 5. ([1], стр. 38) *Если G – конечная группа и N – её нормальная подгруппа. Тогда и только тогда факторгруппа G/N абелева, когда коммутант группы G содержится в N.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы. По лемме 2 в сверхразрешимой конечной группе каждая максимальная подгруппа имеет простой индекс. Обратно, пусть G – разрешимая конечная группа и каждая ее максимальная подгруппа, не содержащая подгруппу Фиттинга, имеет простой индекс. Так как $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ по лемме 1, то условия теоремы переносятся на факторгруппу $G/\Phi(G)$. Если $\Phi(G)\neq 1$, то по индукции группа $G/\Phi(G)$ сверхразрешима, поэтому группа G сверхразрешима по лемме 3.

Итак, $\Phi(G) = 1$ и $F(G) = N_1 \times \cdots \times N_t$ – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп N_i группы G, $i=1, \ldots, t$ по лемме 1. Ясно, что для каждого i существует максимальная подгруппа M_i группы G, не содержащая N_i. Поэтому $G = [N_i]M_i$, а по условию теоремы $|G:M_i| = |N_i| = p_i$ – простое число. Теперь факторгруппа $G/C_G(N_i)$ абелева по лемме 4. По лемме 5 коммутант

$$G' \subseteq \cap^t_{i=1} C_G(N_i) \subseteq C_G(F(G)),$$

а по лемме 1 имеем $C_G(F(G)) = F(G)$. Поэтому факторгруппа $G/F(G)$ абелева и индекс каждой максимальной подгруппы, содержащей $F(G)$, есть простое число. Таким образом, индексы всех максимальных подгрупп группы G – простые числа. По лемме 2 группа G сверхразрешима. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть G – конечная разрешимая группа. Если индексы максимальных подгрупп группы G, не содержащих подгруппу Фиттинга, яв-*

ляются простыми числами, то индексы всех максимальных подгрупп являются простыми числами.

Литература:

1. Huppert B., Endliche Gruppen I. – Berlin, Heidelberg, New York, 1967. – 792 s.