О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КОНЕЧНЫХ 3Z-ФАКТОРИЗУЕМЫХ ГРУПП

В.Н. Княгина

Рассматриваются только конечные группы. Как обычно, примарная группа – эта группа, порядок которой равен степени некоторого простого числа. Группа G называется *3z*-факторизуемой, если существуют такие подгруппы A, B и C, что $G = AB = AC = BC$ и все силовские подгруппы в A, B и в C циклические. Ясно, что если $G = AB = AC = BC$ – примарная 3z-факторизуемая группа, то подгруппы A, B и C циклические. Через A_G обозначается ядро подгруппы A в группе G, т.е. наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в A. Доказывается следующая

ТЕОРЕМА. *Если $G = AB = AC = BC$ – 3z-факторизуемая примарная группа с циклическими подгруппами A, B, C и $|A| \geq |B| \geq |C|$, то справедливы следующие утверждения:*

(1) $|A_G| \geq 1 + |A|\,|A \cap B| \,/\, |B| \geq 2$;

(2) либо $G = A$, *либо* $|A| = |B|$;

(3) $A \cap C = B \cap C \subseteq A \cap B$.

Доказательство. (1) Пусть $A=<a>$, $B=<b>$. Предположим, что $D = A \cap B \neq 1$. Тогда $D \lhd B$ и $D^G = D^{BA} = D^A \subseteq <D, A> \subseteq A$. Здесь $D^G = <D^g \mid g \in G>$ – подгруппа, порожденная всеми сопряженными с D подгруппами. Поэтому $1 \neq D^G \subseteq A$ и $A_G \neq 1$.

Пусть теперь $D = A \cap B = 1$. Пусть $|A| = \alpha$, $|B| = \beta$. Тогда $B = <b> = \{1, b, b^2, \ldots, b^{\beta-1}\}$. Если $Ab^i = Ab^j$, $0 \leq i$, $j \leq \beta - 1$, то $b^i b^{-j} = b^{i-j} \in A \cap B = 1$ и i - j делится на β, что невозможно при нашем выборе i и j. Поэтому в $\Omega = \{A, Ab, Ab^2, \ldots, Ab^{\beta-1}\}$ нет совпадающих смежных классов. На множестве Ω рассмотрим перестановку

$$\begin{pmatrix} A & Ab & Ab^2 & \ldots & Ab^{\beta-1} \\ A & Aba & Ab^2a & \ldots & Ab^{\beta-1}a \end{pmatrix}.$$

Так как $\Omega = \{A, Ab, Ab^2, \ldots, Ab^{\beta-1}\}$ – все смежные классы группы G по подгруппе A, то $\{A, Aba, Ab^2a, \ldots, Ab^{\beta-1}a\} \subseteq \Omega$. Рассмотрим цикл $(Ab \quad Aba \quad Aba^2 \ \ldots \ Aba^{\delta-1})$. Здесь $Aba^{\delta} = Ab$, поэтому $ba^{\delta}b^{-1} \in A$. Так как $|G : A| = |B : A \cap B| = |B|$ и A в рассматриваем цикле не содержится, то $\delta \leq |B| - 1 < |B|$. Кроме того, $a^{\delta} \neq 1$ и так как $<a^{\delta}> \lhd <a, b> = G$, то $<a^{\delta}> \lhd G$. Итак, в любом случае при $|A| \geq |B|$ получаем, что $A_G \neq 1$.

Так как A / A_G не содержит неединичных нормальных в G / A_G подгрупп, то ввиду доказанного $|A / A_G| < |BA_G / A_G| = |B / B \cap A_G|$. Поскольку $B \cap A_G = B \cap A$, то $|A_G| \geq 1 + |A||A \cap B| / |B| \geq 2$.

(2) Пусть $G \neq A$ и $|A| > |B|$. По доказанному выше подгруппа A содержит нормальную в G подгруппу $<a_1>$ порядка p. Так как факторгруппа $G / <a_1>$ – 3z-факторизуемая группа с циклическими факторами и $|A / <a_1>| \geq |B<a_1>/<a_1>|$, $|A / <a_1>| \geq |C<a_1>/<a_1>|$, то по индукции $|A / <a_1>| = |B<a_1>/<a_1>|$ или $|A / <a_1>| = \ = |C<a_1>/<a_1>|$. Если $|A / <a_1>| = |B<a_1>/<a_1>|$, то $a_1 \notin B$ и $A \cap B = 1$. Теперь $|G| = |A||B| > |B||C|$, т.е. $BC \neq G$. Если $|A / <a_1>| = = |C<a_1>/<a_1>|$, то $a_1 \notin C$ и $A \cap C = 1$. Поэтому $|G| = |A||C| > \ > |B||C|$, т.е. $BC \neq G$. Поэтому допущение неверно и $|A| = |B|$.

(3) Поскольку $|G| = |A||C|/|A \cap C| = |B||C|/|B \cap C|$, то $|A \cap C| = |B \cap C|$, а так как C циклическая, то $A \cap C = B \cap C \subseteq A \cap B$. Теорема доказана.

Для произвольных конечных 3z–факторизуемых групп из теорем Кегеля [1], с. 685 и В.С.Монахова [2] несложно выводится, что *конечная 3z-факторизуемая группа дисперсивна по Оре и содержит сверхразрешимую нормальную 2'-холлову подгруппу.*

Литература:

1. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin, Heidelberg, New York, 1967.
2. Монахов В.С. О частичной сверхразрешимости конечной факторизуемой группы // Доклады НАН Беларуси. 2001. Т.45, №3. С. 32-36.