СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ В ЗАДАЧЕ О СФЕРИЧЕСКОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ РЕЗОНАТОРЕ, ЗАПОЛНЕННОМ БИИЗОТРОПНОЙ СРЕДОЙ

В.В. Кондратюк

Настоящая работа посвящена решению задачи о сферическом металлическом резонаторе, заполненном биизотропной средой [1].

Вначале найдем в сферических координатах решение системы однородных уравнений Максвелла для монохроматических полей вида $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})\exp(-i\omega t)$ в такой среде

$$rot\vec{E} = i\frac{\omega}{c}\left[(\chi - i\alpha)\vec{E} + \mu\vec{H}\right], \quad rot\vec{H} = -i\frac{\omega}{c}\left[\varepsilon\vec{E} + (\chi + i\alpha)\vec{H}\right]. \qquad (1)$$

Для этой цели удобно использовать полную и ортонормированную систему шаровых векторов $\vec{Y}^{L}_{JM}(\vec{n}_r)$ [2], с помощью которых можно построить функции,

$$\vec{F}^{L}_{JM}(k;r,\theta,\varphi) = z_L(kr)\vec{Y}^{L}_{JM}(\theta,\varphi); \quad z_L(\rho) = \sqrt{\pi/2\rho}\,Z_{L+1/2}(\rho), \qquad (2)$$

где $Z_{L+1/2}(\rho)$ - одна из цилиндрических функций. При этом, как и в случае плоских волн [3], имеется два типа решений с поляризацией $\nu = \pm 1$, напряженность электрического поля которых

$$\vec{E}_{JM\nu}(\vec{r}) = E_0\{\vec{F}^{J}_{JM}(k_\nu;\vec{r}) - i\nu(a_J\vec{F}^{J+1}_{JM}(k_\nu;\vec{r}) - b_J\vec{F}^{J-1}_{JM}(k_\nu;\vec{r}))\}. \qquad (3)$$

Волновые числа k_ν определяются формулами

$$k_\nu = \left(\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} + \nu\alpha\right)\omega / c = n_\nu\omega / c. \qquad (4)$$

Сферический резонатор представляет собой полую металлическую сферу радиуса r_0 с центром в начале координат, заполненную биизотропной средой. В этом случае из решений (3) следует выбрать только те, в которых $z_l(kr) = j_l(kr)$ - сферические функции Бесселя. Однако любое из решений вида (3), взятое отдельно, не удовлетворяет граничным условиям на поверхности металлической сферы. Поэтому рассмотрим следующую суперпозицию двух волн (с правой и левой поляризациями) с одинаковыми значениями J и M:

$$\vec{E}_{JM}(\vec{r}) = A_1^{JM}\vec{E}_{JM1} + A_{-1}^{JM}\vec{E}_{JM-1}.$$

При этом электромагнитное поле должно удовлетворять следующему граничному условию: $\left(E_\tau\right)_{r=r_0} = 0$, для чего выразим $\vec{E}_{JM}(\vec{r})$ через векторы $\vec{Y}^{(\lambda)}_{JM}(\vec{n}_r)$ [2], используя рекуррентные соотношения для $j_J(\rho)$:

$$\vec{E}_{JM}(\vec{r}) = \sum_{\nu=\pm1} A_\nu^J \{ j_J(k_\nu r)\vec{Y}^{(0)}_{JM}(\vec{n}_r) + i\nu \frac{1}{k_\nu r}\tilde{j}'_J(k_\nu r)\vec{Y}^{(1)}_{JM}(\vec{n}_r) +$$

$$+ i\nu \quad a_J b_J \frac{2J+1}{k_\nu r} j_J(k_\nu r)\vec{Y}^{(-1)}_{JM}(\vec{n}_r)\}, \qquad (5)$$

где $\tilde{j}_J(\rho) = \rho \cdot j_J(\rho)$ -функция Риккати—Бесселя. Функция $\vec{Y}^{(-1)}_{JM}(\vec{n}_r)$ не имеет тангенциальной составляющей [2], поэтому граничные условия на внутренней поверхности сферы удовлетворяются, если

$$A_1^J j_J(k_1 r_0) + A_{-1}^J j_J(k_{-1} r_0) = 0, A_1^J \frac{1}{k_1}\tilde{j}'_J(k_1 r_0) - A_{-1}^J \frac{1}{k_{-1}}\tilde{j}'_J(k_{-1} r_0) = 0. \qquad (6)$$

Эта система имеет нетривиальное решение, когда ее определитель равен нулю. Из этого условия получаем уравнение для определения собственных частот сферического резонатора:

$$\frac{1}{n_1}\tilde{j}'_J(n_1\omega r_0/c) j_J(n_{-1}\omega r_0/c) + \frac{1}{n_{-1}}\tilde{j}'_J(n_{-1}\omega r_0/c) j_J(n_1\omega r_0/c) = 0. \qquad (7)$$

Решая при значениях ω, являющихся корнями трансцендентного уравнения (7), систему (6) для коэффициентов A_ν^J, находим собственные функции задачи о сферическом биизотропном резонаторе.

Литература

1. Sihvola A.H., Lindell I.V. Micr.&Opt.Tech.Lett., vol.4, no.8, pp.295-297, July 1991.
2. Варшалович А.Б. и др. Квантовая теория углового момента. Л. 1975.
3. Годлевская А.Н., Капшай В.Н. // ДАН БССР.-1989.--Т.33.-№.4.-С.332-334.