УДК 535.39.01

АМПЛИТУДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СВЕТОВЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ОДНООСНЫЙ КРИСТАЛЛ—ИЗОТРОПНАЯ СРЕДА

Ф. И. Федоров и *В. В. Филиппов*

Даны упрощенные общие выражения для полей световых волн, преломленной и отраженных на границе одноосного прозрачного кристалла с изотропной средой. Рассмотрены случаи, когда отсутствуют одна или обе отраженные волны.

Точное общее решение задачи о поведении световой волны на границе изотропная среда—одноосный кристалл было получено в [1] и подробно рассмотрено в [2]. Аналогичная задача для границы одноосный кристалл—изотропная среда решена в общем виде в [3]. Эти вопросы представляют существенный интерес для расчета лазерных устройств на кристаллах. Однако найденные в [3] общие выражения несколько громоздки; в настоящей работе решение задачи приведено к более простой и компактной форме. Полученные результаты применяются к рассмотрению случаев, когда отсутствует одна или обе отраженные в кристалл волны.

Заметим, что недавно поведение световой волны как на границе изотропная среда—одноосный кристалл, так и для обратного случая рассматривалось в работе [4] с использованием стереографических проекций и сферической геометрии. При этом, в частности, были повторены в более усложненной форме некоторые результаты, изложенные в [1, 2]. Работа [4] стала нам известна лишь после отправки нашей статьи [3] в печать. Следует отметить, что метод стереографических проекций, использованный автором [4], в применении к данной задаче является значительно более сложным, чем ковариантный подход. Вследствие этого существенно затрудняется общий анализ полученных в [4] соотношений. Кроме того, ковариантный подход дает возможность рассмотреть поведение световой волны на границе поглощающего кристалла и изотропной среды (ср. [2]).

Векторы рефракции $\mathbf{m}_i = n_i \mathbf{n}_i$ (n_i — показатель преломления, $\mathbf{n}_i$ — направление нормали) всех волн (падающей, двух отраженных и преломленной) могут быть представлены в виде [2]

$$\mathbf{m}_i = \mathbf{b} + \eta_i \mathbf{q}, \tag{1}$$

где $\mathbf{q}$ — единичный вектор нормали к плоскости раздела, направленный в изотропную среду, $\mathbf{b} = [\mathbf{q}\,[\mathbf{mq}]]$, $\mathbf{m}$ — вектор рефракции падающей волны.

Падающая волна может быть обыкновенной ($\mathbf{m}_0$) и необыкновенной ($\mathbf{m}_e$). Их поля имеют соответственно вид [2]

$$\mathbf{E}_0 = A_0\,[\mathbf{m}_0\mathbf{c}], \quad \mathbf{H}_0 = A_0\,[\mathbf{m}_0\,[\mathbf{m}_0\mathbf{c}]]; \tag{2}$$

$$\mathbf{E}_e = A_e\,(\varepsilon_0 - \mathbf{m}_e \cdot \mathbf{m}_e)\,\mathbf{c}, \quad \mathbf{H}_e = A_e \varepsilon_0\,[\mathbf{m}_e\mathbf{c}], \tag{2a}$$

где $\mathbf{c}$ — единичный вектор оптической оси, выражение $\mathbf{m}_e \cdot \mathbf{m}_e$ обозначает диаду [2, 5].

Совершенно аналогичные выражения получаются и для отраженных в кристалл волн, которые мы будем отмечать штрихом ($\mathbf{E}'_i$, $\mathbf{H}'_i$, $\mathbf{m}'_i$, A'_i, η'_i, $i = o,\ e$).

Преломленную волну разложим на составляющие, лежащие в плоскости падения и перпендикулярно к ней

$$\mathbf{E}'' = A''\mathbf{a} + B''[\mathbf{n}''\mathbf{a}], \quad \mathbf{H}'' = A''[\mathbf{m}''\mathbf{a}] - B''n''\mathbf{a}, \tag{3}$$

где $\mathbf{a} = [\mathbf{mq}]$, $\mathbf{m}'' = n''\mathbf{n}''$ — вектор рефракции преломленной волны.

Если падающая волна является обыкновенной, то (см. [2])

$$\left.\begin{aligned} \eta'_0 = -\eta_0 = \sqrt{\varepsilon_0 - \mathbf{a}^2}, \quad \eta'' = \sqrt{\varepsilon'' - \mathbf{a}^2}, \\ \eta'_e = -\frac{1}{\mathbf{q}\varepsilon\mathbf{q}}\left(\mathbf{b}\varepsilon\mathbf{q} + \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_e\mathbf{q}\varepsilon\mathbf{q} - \mathbf{a}\bar{\varepsilon}\mathbf{a}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Здесь ε'' — диэлектрическая проницаемость изотропной среды, $\varepsilon = \varepsilon_0 + (\varepsilon_e - \varepsilon_0)\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$ — тензор диэлектрической проницаемости кристалла, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0\{\varepsilon_e + (\varepsilon_0 - \varepsilon_e)\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}\}$ — тензор, взаимный [5] к ε.

Решение граничной задачи в этом случае имеет вид

$$\left.\begin{aligned} A'_0 &= X_0^{-1}\mathbf{a}^2\{\varepsilon_0(\eta'_e - \eta'')(\eta_0\varepsilon'' - \eta''\varepsilon_0)(\mathbf{ac})^2 - \varepsilon_0(\eta_0 - \eta'')[\mathbf{am}_0]\,\mathbf{c}\}A_0, \\ A'_e &= 2X_0^{-1}(\varepsilon_0 - \varepsilon'')(\mathbf{bc} - \eta''\mathbf{qc})\,\eta_0\mathbf{a}^4\mathbf{ac}A_0, \\ A'' &= 2X_0^{-1}\{\{(\eta'_e\varepsilon'' - \eta''\varepsilon_0)\,\mathbf{a}^2\mathbf{qc} - (\eta'_e\eta''\varepsilon_0 - \eta_0^2\varepsilon'')\,\mathbf{bc}\}\,\varepsilon_0(\mathbf{ac})^2 - \\ &\quad - \xi_0[\mathbf{am}_0]\,\mathbf{c}\cdot[\mathbf{am}'_0]\,\mathbf{c}\}\,\eta_0A_0, \\ B'' &= 2X_0^{-1}n''\varepsilon_0\eta_0\{(\eta'_e - \eta'')(\varepsilon_0(\mathbf{ac})^2 + \eta_0^2(\mathbf{bc})^2 + \mathbf{a}^4(\mathbf{qc})^2) - \\ &\quad - 2\mathbf{a}^2(\eta_0^2 - \eta'_e\eta'')\,\mathbf{bc}\cdot\mathbf{qc}\}\,\mathbf{ac}A_0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где введены обозначения

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= \varepsilon''(\varepsilon_0\mathbf{bc} - \mathbf{m}'_e\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}^2) + \eta''\varepsilon_0[\mathbf{am}'_e]\,\mathbf{c}, \\ X_0 &= \mathbf{a}^2\{\varepsilon_0(\eta'_e - \eta'')(\eta_0\varepsilon'' + \eta''\varepsilon_0)(\mathbf{ac})^2 - \xi_0(\eta_0 + \eta'')[\mathbf{am}'_0]\}\,\mathbf{c}. \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

Если волновая нормаль отраженной волны совпадает с направлением оптической оси, то, используя вместо представления вида (2), (2а) разложение на составляющие

$$\mathbf{E}' = A'\mathbf{a} + B'[\mathbf{ca}], \quad \mathbf{H}' = A'[\mathbf{m}'\mathbf{a}] - B'n_0\mathbf{a}, \tag{6}$$

из граничных условий получаем

$$\left.\begin{aligned} A' = \frac{2\eta'(\eta'' + \eta')}{n_0(\eta'' - \eta')}A_0, \quad A'' = -\frac{4\eta'^2}{n_0(\eta'' - \eta')}A_0, \\ B' = B'' = 0, \quad \eta' = -n_0\mathbf{qc}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

При нормальном падении, используя вместо (3) разложение

$$\mathbf{E}'' = A''[\mathbf{n}_0\mathbf{c}] + B'[\mathbf{n}_0[\mathbf{n}_0\mathbf{c}]], \quad \mathbf{H}'' = n''A''[\mathbf{n}_0[\mathbf{n}_0\mathbf{c}]] - n''B''[\mathbf{n}_0\mathbf{c}], \tag{8}$$

имеем

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{m}_0 = -\mathbf{m}'_0 = n_0\mathbf{n}_0, \quad \mathbf{m}'' = n''\mathbf{n}_0, \\ A'_0 = \frac{n'' - n_0}{n'' + n_0}A_0, \quad A'' = \frac{2n_0^2}{n'' + n_0}A_0, \quad B'' = A'_e = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Если падающая волна является необыкновенной, то для определения векторов рефракции можно воспользоваться выражениями (4), в которых следует положить $\mathbf{a} = [\mathbf{m}_e\mathbf{q}]$ и

$$n_e^2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_e}{\varepsilon_0 + (\varepsilon_e - \varepsilon_0)(\mathbf{nc})^2}. \tag{10}$$

В этом случае вместо (5) получаем

$$\left.\begin{aligned} A'_0 &= X_e^{-1}(\varepsilon_0 - \varepsilon'')(\eta'_e - \eta_e)\,\varepsilon_0\mathbf{m}''\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}^4\cdot\mathbf{ac}A_e, \\ A'_e &= X_e^{-1}\mathbf{a}^2\{\xi_e(\eta'' - \eta'_0)[\mathbf{am}'_0]\,\mathbf{c} - \varepsilon_0(\eta_e - \eta'')(\eta''\varepsilon_0 - \eta'_0\varepsilon'')(\mathbf{ac})^2\}A_e, \\ A'' &= X_e^{-1}\varepsilon_0(\eta'_e - \eta_e)(\eta''\varepsilon_0 - \eta'_0\varepsilon'')\{\varepsilon_0(\mathbf{ac})^2 + ([\mathbf{am}'_0]\,\mathbf{c})^2\}\,\mathbf{ac}A_e, \\ B'' &= -X_e^{-1}n''\varepsilon_0(\eta'_e - \eta_e)(\eta'' - \eta'_0)(\eta'_0\mathbf{bc} + \mathbf{a}^2\mathbf{qc})\{\varepsilon_0(\mathbf{ac})^2 + ([\mathbf{am}'_0]\,\mathbf{c})^2\}A_e, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \xi_e &= \varepsilon'' (\varepsilon_0 \mathbf{bc} - \mathbf{m}_e \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}^2) + \eta'' \varepsilon_0 [\mathbf{a m}_e] \mathbf{c}, \\ X_e &= \mathbf{a}^2 \{\varepsilon_0 (\eta'_e - \eta'') (\eta'' \varepsilon_0 - \eta'_0 \varepsilon'') (\mathbf{ac})^2 - \xi_0 (\eta'' - \eta'_0) [\mathbf{a m}'_0] \mathbf{c}\}. \end{aligned}\right\} \tag{11a}$$

При совпадении нормали отраженной волны с оптической осью кристалла, воспользовавшись разложением (6), имеем

$$\left.\begin{gathered} B' = \frac{(\eta' - \eta_e)(\eta' \varepsilon'' + \eta'' \varepsilon_0)}{\eta'' \varepsilon_0 - \eta' \varepsilon''} A_e, \quad B'' = \frac{2 n_0 n'' \eta' (\eta' - \eta_e)}{\eta'' \varepsilon_0 - \eta' \varepsilon''} A_e, \\ A' = A'' = 0, \quad \eta' = -n_0 \mathbf{qc}. \end{gathered}\right\} \tag{12}$$

Наконец, для нормального падения необыкновенной волны с учетом (8) находим

$$\left.\begin{gathered} \mathbf{m}_e = -\mathbf{m}'_e = n_e \mathbf{n}_e, \quad \mathbf{m}'' = n'' \mathbf{n}_e, \\ A'_e = \frac{n'' - n_e}{n'' + n_e} A_e, \quad B'' = -\frac{2 n_0 \varepsilon_0}{n'' + n_e} A_e, \quad A'_0 = A'' = 0. \end{gathered}\right\} \tag{13}$$

Показатель преломления n_e находится из (10).

Если падающая волна распространяется вдоль оптической оси, то она может иметь любую поляризацию. Используя вместо (2), (2а) разложение

$$\mathbf{E} = A\mathbf{a} + B[\mathbf{na}], \quad \mathbf{H} = A[\mathbf{ma}] - B n_0 \mathbf{a}, \tag{14}$$

получаем для амплитуд отраженных и преломленной волн выражения

$$\left.\begin{gathered} A'_0 = \frac{n_0 (\eta - \eta'')}{2\eta (\eta + \eta'')} A, \quad A'_e = -\frac{\varepsilon_0 \eta'' - \varepsilon'' \eta}{(\eta - \eta'_e)(\varepsilon_0 \eta'' + \varepsilon'' \eta)} B, \\ A'' = \frac{2\eta}{\eta + \eta''} A, \quad B' = -\frac{2 n_0 n'' \eta}{\varepsilon_0 \eta'' + \varepsilon'' \eta} B, \\ \eta = n_0 \mathbf{qc}, \end{gathered}\right\} \tag{15}$$

при этом предполагается, что оптическая ось направлена от границы в кристалл ($\mathbf{c} = -\mathbf{n}$).

Представляет интерес рассмотреть те случаи, когда на границе возникает только одна отраженная волна, либо обе отраженные волны отсутствуют одновременно. Рассмотрим выражения (5), из которых следует, что отраженная необыкновенная волна отсутствует, если $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\varepsilon_0 = \varepsilon''$, $\mathbf{bc} - \eta'' \mathbf{qc} = 0$. Обозначим γ_1, γ_2, γ_3 косинусы углов между направлением оптической оси и соответственно векторами $\mathbf{q}$, $\mathbf{a} = [\mathbf{mq}]$, $\mathbf{b} = [\mathbf{qa}]$; тогда последнее условие выполняется при угле падения α,[1] который определяется выражением

$$\sin^2 \alpha = \frac{\varepsilon'' \gamma_1^2}{\varepsilon_0 (1 - \gamma_2^2)}. \tag{16}$$

Кроме того, необходимо, чтобы γ_1 и γ_3 имели одинаковые знаки (углы между $\mathbf{c}$ и $\mathbf{q}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{b}$ должны быть или тупыми, или острыми). Поскольку $\sin^2 \alpha < 1$, то

$$\varepsilon'' \gamma_1^2 < \varepsilon_0 (1 - \gamma_2^2), \tag{17}$$

что при заданных ε_0 и ε'' ограничивает возможные ориентации оптической оси.

Очевидно, что (16), (17) определяет угол Брюстера для отраженной необыкновенной волны, причем в общем случае ни нормаль, ни направление луча необыкновенной отраженной волны не перпендикулярно к $\mathbf{m}''$. При $\mathbf{c} \parallel \mathbf{a}$ ($\mathbf{bc} = \mathbf{qc} = 0$) условие $\mathbf{bc} - \eta'' \mathbf{qc} = 0$ выполняется тождественно для всех углов падения. Также просто можно проанализировать выражения (11), (15). Все случаи, когда на границе одноосного кристалла с изотропной средой возникает вместо двух лишь одна отраженная волна, одноименная с падающей, можно разделить на три группы.

---

[1] Под углом падения имеется в виду угол между волновой нормалью и вектором $\mathbf{q}$, а не между лучом и $\mathbf{q}$. Подробнее см. [6].

I. а) оптическая ось перпендикулярна плоскости падения ($\mathbf{c} \parallel \mathbf{a}$), б) оптическая ось лежит в плоскости падения ($\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$),[2] в) показатель преломления изотропной среды совпадает с показателем преломления кристалла для обыкновенной волны ($\varepsilon'' = \varepsilon_0$). При этом, если падает обыкновенный луч, то на границе он не будет испытывать каких-либо изменений. В случаях а), б) плоскости поляризации всех трех волн компланарны [4]. Единственность отраженной волны достигается при всех углах падения.

II. Отраженная волна будет единственной также при углах падения, превышающих граничное значение угла возникновения неоднородной отраженной волны и меньших предельного угла падения [6]. На самом деле при этом в кристалле будут две отраженных волны, но одна из них будет неоднородной и поэтому непосредственно не наблюдается. Граничное значение угла возникновения неоднородной отраженной волны определяется только свойствами кристалла и его ориентацией по отношению к плоскости падения. Оно может отличаться от $\pi/2$ на несколько десятков градусов (до 30° в кристалле кальцита). Термин «полное преломление одной компоненты падающей волны» [4] не отражает суть данного явления, так как для обычных условий наблюдения (преломление на границе кристалла с воздухом) углы падения, при которых одна из отраженных волн неоднородна, всегда больше граничного угла полного отражения, т. е. в среднем вся энергия падающей волны отражается в кристалл.

III. Одна отраженная волна получается также:

а) при угле Брюстера для отраженной волны, не одноименной с падающей. Когда падающей волной является обыкновенная волна, угол Брюстера определяется выражением (16) при условии (17). При падении необыкновенной волны угол Брюстера реализуется, если $\mathbf{m}'' \perp \mathbf{c}$ [см. (11)]. Поскольку $\mathbf{m}''\mathbf{c} = \mathbf{bc} + \eta''\mathbf{qc}$, то в отличие от падения обыкновенной волны здесь γ_1 и γ_3 должны быть разных знаков, а угол падения, при котором это условие выполняется, определяется из соотношения

$$\varepsilon_0\varepsilon_e(1-\gamma_2^2)\sin^2\alpha - \varepsilon''\gamma_1^2[\varepsilon_0 + (\varepsilon_e - \varepsilon_0)(\gamma_1\cos\alpha + \gamma_3\sin\alpha)^2] = 0, \tag{18}$$

которое в общем случае не приводит к перпендикулярности векторов рефракции $\mathbf{m}_0'$ и $\mathbf{m}''$.

Наконец, если падающая волна рассматривается вдоль оптической оси, угол Брюстера (он же угол наклона оптической оси по отношению к нормали $\mathbf{q}$) существует для отраженной необыкновенной волны и находится из выражения

$$\sin^2\alpha = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon_0 + \varepsilon''}. \tag{19}$$

б) при нормальном падении. Здесь также векторы магнитного поля трех волн компланарны.

Может реализоваться и такой случай, когда при определенном угле падения отсутствует одноименная с падающей отраженная волна. Общие выражения для определения этого угла (получаются из равенства нулю соответствующего амплитудного множителя A_i') весьма громоздки и к частным случаям гораздо удобнее перейти от выражений (5), (11). Ниже мы рассмотрим два из них, когда отсутствуют обе отраженных волны. Очевидно, это должно иметь место, когда $\mathbf{c} \parallel \mathbf{a}$ или $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$ (третью возможность, связанную со специфичным случаем, когда $\varepsilon'' = \varepsilon_0$ мы опускаем). Тогда при $\mathbf{c} \parallel \mathbf{a}$, если падает обыкновенная волна, мы получаем для угла Брюстера выражение, совпадающее с выражением (20). Если ориентация кристалла такова, что $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, то мы не получим угол Брюстера, так как здесь вектор электрического поля падающей волны будет

2 Если при этом падающая волна распространяется вдоль оптической оси, то дополнительное условие налагается на ее поляризацию: волна должна быть поляризована в плоскости падения или перпендикулярно к ней. Одноименность падающей и отраженной волн в данном случае следует понимать именно в этом смысле.

перпендикулярен плоскости падения. Точно так же для падающей необыкновенной волны возможно существование угла Брюстера при **c** $\|$ **a**. Однако в обоих этих случаях, если добиться совпадения показателей преломления падающей и преломленной волн ($\varepsilon'' = \varepsilon_0$, если падает обыкновенная волна и $\varepsilon'' = n_e^2 = \varepsilon_e$, если падает необыкновенная волна), обе отраженных волны будут отсутствовать (при этом преломленная волна будет совпадать по направлению с падающей). Когда **c** $\perp$ **a**, угол Брюстера при падении необыкновенной волны определяется из выражения

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon'' \{\varepsilon_0 \gamma_3 \sin\alpha - (\gamma_3 \sin\alpha + \gamma_1 \cos\alpha)\, n_e^2 \sin^2\alpha\} + \\ &\quad + \varepsilon_0 n_e \gamma'' (\gamma_1 \sin\alpha - \gamma_3 \cos\alpha) \sin\alpha = 0, \\ &\gamma'' = \sqrt{\varepsilon'' - n_e^2 \sin^2\alpha}. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Для света, падающего вдоль оптической оси, обе отраженных волны отсутствуют при угле Брюстера, который дается выражением (20), если $A = 0$. Отметим, что только в этом случае и при падении обыкновенной волны, когда **c** $\|$ **a**, имеет место перпендикулярность векторов рефракции $\mathbf{m}_0'$ и $\mathbf{m}''$ (естественно, также и лучей), при этом, как и для границы двух изотропных сред, $\operatorname{tg}\alpha = n''/n_0$. Как известно [2], на границе изотропной среды с одноосным кристаллом также именно при этой ориентации (**c** $\|$ **a**) наблюдается полное соответствие с границей двух изотропных сред; при всех остальных ориентациях кристалла на обоих границах этого соответствия не наблюдается, более того, при некоторых из них угол Брюстера вообще не существует.

Литература

[1] Ф. И. Федоров. ДАН СССР, *84*, 1171, 1952.
[2] Ф. И. Федоров. Оптика анизотропных сред, Минск, 1958.
[3] Ф. И. Федоров, В. В. Филиппов. Ж. прикл. спектр., *9*, 1031, 1968.
[4] V. C. Varghese. J. Opt. Soc. Am., *57*, 683, 1967.
[5] Ф. И. Федоров. Теория упругих волн в кристаллах. Изд. «Наука», 1965.
[6] Ф. И. Федоров, В. В. Филиппов. Опт. и спектр., *29*, 56, 1970.

Поступило в Редакцию 12 марта 1970 г.