ЧЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

В.В. Мироненко

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$x' = P(t)x^2 + Q(t)x + R(\qquad (1)$$

Будем рассматривать его всевозможные четные по t дробно-линейные преобразования вида

$$S(t,x) = \frac{m(t)x + n(}{r(t)x + s(} \qquad (2)$$

Известно, что они переводят уравнение Риккати в уравнение Риккати.

Лемма. Пусть существует четная дробно-линейная замена (2) такая, что уравнение (1) сводится к стационарному уравнению. Тогда существует и четная дробно-линейная замена $S_1(t,$, такая, что $S_1(0,x)$, сводящая (1) к стационарному уравнению.

Для любой функции f(t) положим по определению

$$f_ч(t) = \frac{f(t) + f(}{2} \quad f_н(t) = \frac{f(t) + f(}{2}.$$

Теорема. Пусть существует четная дробно-линейная замена (2), сводящая (1) к стационарному уравнению, такая, что $S(0,x)$.

Тогда это стационарное уравнение имеет вид

$$y' = P(0)y^2 + Q(0)y + R(0 \ , \qquad (3)$$

причем

$$S_x(t,x)(P_ч(t)x^2 + Q_ч(t)x + R_ч(t)) = P_0S^2 + Q_0S$$

$$S_t(t,x) + S_x(t,x)(P_н(t)x^2 + Q_н(t)x + R_н(t)) = 0.$$

Лемма. Пусть существует четная дробно-линейная замена (2), сводящая (1) к (3). Тогда существует и четная дробно-линейная замена $S_1(t,x) = \frac{m_1(t)x + n_1(}{r_1(t)x + s_1(}$, такая, что $m_1s_1 - r_1n_1$, также сводящая уравнение (1) к (3).

Лемма. Чтобы некоторой четной дробно-линейной заменой (2), такой, что $S(0,x$ и $ms - rn$, дифференциальное уравнение (1) сводилось к

(3), необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты m и r являлись решениями системы дифференциальных уравнений

$$2z_1' = z_1 Q_н - 2z_2$$

$$2z_2' = 2z_1 R_н - z_2$$

с начальными условиями

$$z_1(0) = 1, z_1(0) \quad \text{и} \quad z_1(0) = 0, z_2(0)$$

соответственно, и выполнялись соотношения

$$P_ч = P_0 m^2 + Q_0 mr + R_0 r^2,$$

$$Q_ч = 2P_0 nm + Q_0(nr + ms) + 2R_0 r$$

$$R_ч = P_0 n^2 + Q_0 ns + R_0 s^2.$$

Теорема. Чтобы некоторой четной дробно-линейной заменой (2), такой, что $S(0, x$ и $ms - rn$, дифференциальное уравнение (1) сводилось к (3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$P_ч' = P_ч Q_н - Q_ч P_н$$

$$Q_ч' = 2R_н P_ч - 2P_н$$

$$R_ч' = R_н Q_ч - Q_н R_ч$$