О ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ОТРАЖАЮЩЕЙ МАТРИЦЕЙ ОПРЕДЕЛЕННОГО ВИДА

Э.В. Мусафиров

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = P(t)x, \tag{1}$$

где $P(t) := \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ непрерывно дифференцируемая на R.

Лемма 1: Пусть отражающая матрица системы (1) для которой $b(0) \neq 0$, имеет вид

$$F(t) \equiv e^{A\alpha(t)} e^{B\beta(t)}, \tag{2}$$

где $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ l & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & q \\ n & p \end{pmatrix}$ и $k, l, m, n, p, q \in R$; $\alpha(t), \beta(t)$ - нечетные функции и $\dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = 1$. Тогда эта отражающая матрица имеет вид:

$$F(t) \equiv e^{-2a(0)\alpha(t)} e^{-2\beta(t)\begin{pmatrix} 0 & b(0) \\ c(0) & d(0)-a(0) \end{pmatrix}} \equiv e^{-2\begin{pmatrix} a(0)\alpha(t) & b(0)\beta(t) \\ c(0)\beta(t) & a(0)\alpha(t)+(d(0)-a(0))\beta(t) \end{pmatrix}} \tag{3}$$

Лемма 2: Пусть отражающая матрица системы (1) имеет вид (2), где $q \neq 0$, тогда она имеет вид (3).

Лемма 3: Пусть отражающая матрица системы (1), для которой $b(0) \neq 0$, имеет вид (3). Тогда нормальная жорданова форма матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2b(0) \\ -2c(0) & -2(d(0)-a(0)) \end{pmatrix} \tag{4}$$

не может иметь вид $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Запишем характеристическое уравнение для матрицы B вида (4): $\lambda^2 + 2\lambda(d(0) - a(0)) - 4b(0)c(0) = 0$.

$$\begin{cases} \lambda_1 = (a(0) - d(0)) - \sqrt{(d(0) - a(0))^2 + 4b(0)c(0)}, \\ \lambda_2 = (a(0) - d(0)) + \sqrt{(d(0) - a(0))^2 + 4b(0)c(0)}. \end{cases} \text{, причем}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 = -4b(0)c(0), \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -2(d(0) - a(0)). \end{cases}$$

Пусть $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ - нормальная жорданова форма матрицы B вида (4), тогда по лемме 3 $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Теорема 1: Пусть $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ - нормальная жорданова форма матрицы B вида (4), где $a(0) \neq 0, b(0) \neq 0; \lambda_1 \lambda_2$ - действительные числа. Тогда отражающая матрица системы (1) имеет вид (3), где

$$\alpha(t) \equiv \frac{1}{a(0)} \int_0^t a_ч(\tau)d\tau, \quad \beta(t) \equiv \frac{1}{b(0)} \int_0^t b_ч(\tau)d\tau \qquad \textbf{(5)}$$

если и только, если $b(0)c(t) \equiv c(0)b(t)$, $(d(0) - a(0))b(t) \equiv b(0)(d(t) - a(t))$.

<u>Теорема 2:</u> Пусть 1) $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ - нормальная жорданова форма матрицы B вида (4), где $a(0) \neq 0$, $b(0) \neq 0$; $\lambda_1 \lambda_2$ - действительные числа; 2) система (1) 2ω - периодическая и имеет отражающую матрицу (3); 3) $\beta(t) \equiv \beta_0 t + \beta_1(t)$, где постоянная $\beta_0 \neq 0$, а функция $\beta_1(t)$ - 2ω - периодическая; $\dot{\alpha}(t)$ - 2ω - периодическая. Тогда верны тождества (5) и

$$\begin{cases} b(0)c_ч(t) \equiv c(0)b_ч(t), \\ (d(0) - a(0))b_ч(t) \equiv b(0)(d_ч(t) - a_ч(t)). \end{cases}$$

<u>Теорема 3:</u> Пусть 1) $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ - нормальная жорданова форма матрицы B вида (4), где $a(0) \neq 0, b(0) \neq 0; \lambda_1 \lambda_2$ - действительные числа, $d(0) \neq a(0)$ (или $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$); 2) система (1) имеет отражающую матрицу (3), где $\beta(t)$ - периодическая, периода соизмеримого с периодом *P(t)*. Тогда

$$\beta(t) \equiv \int_0^t \frac{(a(0) - d(0))(a_ч(\tau) - d_ч(\tau)) + 2(b(0)c_ч(\tau) + c(0)b_ч(\tau))}{(a(0) - d(0))^2 + 4b(0)c(0)} d\tau,$$

$$\alpha(t) \equiv \int_0^t \frac{a_ч(\tau) + d_ч(\tau)}{2a(0)} d\tau - \frac{d(0) - a(0)}{2a(0)} \times$$

$$\times \int_0^t \frac{(a(0) - d(0))(a_ч(\tau) - d_ч(\tau)) + 2(b(0)c_ч(\tau) + c(0)b_ч(\tau))}{(a(0) - d(0))^2 + 4b(0)c(0)} d\tau;$$

$$\left(b(0)\dot{\beta}(t) - b_ч(t)\right)\left(1 - \lambda_2^2\right) \equiv 0,$$

$$\left(1 + 2(d(0) - a(0))\right)\left(b(0)\dot{\beta}(t) - b_ч(t)\right) - 4b^2(0)\left(a(0)\dot{\beta}(t) + c_ч(t)\right) + 4b(0)\left(b(0)c_ч(t) + c(0)b_ч(t)\right) \equiv 0$$

<u>Теорема 4:</u> Пусть 1) $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ - нормальная жорданова форма матрицы B вида (4), где $a(0) \neq 0, b(0) \neq 0; \lambda$ - действительное число; 2) система (1) имеет отражающую матрицу (3), где $\beta(t)$ - периодическая, периода соизмеримого с периодом *P(t)*. Тогда

$$\beta(t) \equiv \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{c_ч(\tau)}{c(0)} + \frac{b_ч(\tau)}{b(0)} \right) d\tau, \quad \alpha(t) \equiv \frac{1}{2a(0)} \int_0^t \left(a_ч(\tau) + d_ч(\tau)\right) d\tau.$$

Литература:

1. Мироненко В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Минск, Университетское, 1986. 2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва, Гос. изд-во технико-теор. литературы, 1954.