УДК 535.42

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ТРЕХМЕРНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ

О. С. Мергелян

В приближении теории возмущений решена задача о дифракции плоской электромагнитной волны, падающей из вакуума на среду, диэлектрическая проницаемость которой является периодической функцией от координат.

Задачи о распространении электромагнитных волн и излучения в периодических структурах привлекают внимание в связи с рядом возможных приложений [1-3].

Представляет интерес рассмотреть поведение электромагнитной волны на границе с не только отражающей, но и преломляющей решеткой, диэлектрическая проницаемость которой конечна.

Пусть плоская электромагнитная волна

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\omega)\, e^{i(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega t)}, \tag{1}$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \; k_{0x} = \frac{\omega}{c}\sin\theta_0\cos\varphi_0, \; k_{0y} = \frac{\omega}{c}\sin\theta_0\sin\varphi_0, \; k_{0z} = \frac{\omega}{c}\cos\theta_0,$$

падает из вакуума на границу $z=0$ среды, диэлектрическая проницаемость которой периодически зависит от координат x, y, z. Предположим для простоты, что $\varepsilon(x, y, z)$ является четной функцией координат.

Тогда $\varepsilon(x, y, z)$ допускает разложение в ряд Фурье [4]

$$\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_0 + \sum_{n, m, p=1}^{\infty} a_{n, m, p}\cos(\alpha n x + \gamma m y + \xi p z), \tag{2}$$

что можно записать еще в виде

$$\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_0 + \varepsilon'(x, y, z) = \varepsilon_0 + \frac{1}{2}\sum_{n, m, p\neq 0} a_{n, m, p}\, e^{i(\alpha n x + \gamma m y + \xi p z)}. \tag{2a}$$

В формулах (2) и (2a)

$$\alpha = \frac{2\pi}{l_x}, \; \gamma = \frac{2\pi}{l_y}, \; \xi = \frac{2\pi}{l_z}. \tag{3}$$

Если выполняется условие

$$\varepsilon' \ll \varepsilon_0, \tag{4}$$

то задачу можно решать в приближении теории возмущений [5].

В качестве нулевого приближения берутся поля, даваемые обычными формулами Френеля [6].

Обозначим отраженное поле в нулевом приближении через $\mathbf{E}_{10}$, а преломленное через $\mathbf{E}_{20}$.

Поле в вакууме, обязанное своим появлением периодической структуре, должно удовлетворять волновому уравнению

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\mathbf{E}_1' = 0. \tag{5}$$

В периодической структуре поправка к нулевому преломленному полю, которую мы обозначим через

$$\widetilde{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}, t) = \widetilde{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t}, \tag{6}$$

должна удовлетворять в приближении теории возмущений уравнению

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0\right)\widetilde{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}) - \nabla\,(\nabla\widetilde{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r})) = -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}). \tag{6a}$$

Решением этого уравнения является сумма полей

$$\widetilde{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_2' + \mathbf{E}_2'', \tag{7}$$

из которых первое является частным решением уравнения (6), а второе есть общее решение соответствующего волнового уравнения.

Обозначим через τ вектор обратной решетки структуры

$$\tau = \mathbf{n}_x \frac{2\pi}{l_x} n + \mathbf{n}_y \frac{2\pi}{l_y} m + \mathbf{n}_z \frac{2\pi}{l_z} p. \tag{8}$$

Для $\mathbf{E}_2'(\mathbf{r})$ из (6) получается выражение

$$\mathbf{E}_2'(\mathbf{r}) = \sum_{\tau\neq 0} \mathbf{A}_\tau \frac{e^{i(\mathbf{k}_2+\tau)\mathbf{r}}}{\tau(\tau + 2\mathbf{k}_2)} \frac{a_\tau}{2\varepsilon_0}, \tag{9}$$

$$\mathbf{A}_\tau = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0\mathbf{E}_{20}(\omega) - (\tau\mathbf{E}_{20}(\omega))\,(\tau + \mathbf{k}_2),$$

$$\mathbf{k}_2\,(k_x,\ k_y,\ k_{2z}),\quad k_{2z} = \sqrt{\varepsilon_0 - \sin^2\theta_0}\,\frac{\omega}{c}.$$

Поле $\mathbf{E}_2''(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\mathbf{E}_2''(\mathbf{r}) = \sum_{\tau\neq 0} \mathbf{B}_\tau e^{i\left[\left(k_x + \frac{2\pi n}{l_x}\right)x + \left(k_y + \frac{2\pi m}{l_y}\right)y + k_{2z}^\tau z\right]}, \tag{10}$$

$$k_{2z}^\tau = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0 - \left(k_x + \frac{2\pi n}{l_x}\right)^2 - \left(k_y + \frac{2\pi m}{l_y}\right)^2}.$$

Ввиду того что тангенциальные компоненты волновых векторов полей не меняются при переходе через границу раздела, поле $\mathbf{E}_1'(\mathbf{r})$ должно записываться в виде

$$\mathbf{E}_1' = \sum_{\tau\neq 0} \mathbf{C}_\tau e^{i\left[\left(k_x + \frac{2\pi n}{l_x}\right)x + \left(k_y + \frac{2\pi m}{l_y}\right)y - k_{1z}^\tau z\right]}, \tag{11}$$

что дает для k_{1z}^τ выражение

$$k_{1z}^\tau = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(k_x + \frac{2\pi n}{l_x}\right)^2 - \left(k_y + \frac{2\pi m}{l_y}\right)^2}. \tag{12}$$

Для определения неизвестных коэффициентов $\mathbf{B}_\tau$ и $\mathbf{C}_\tau$ мы имеем систему линейных уравнений, получающуюся из граничных условий и условий поперечности полей $\mathbf{E}_1'$ и $\mathbf{E}_2''$ (поле $\mathbf{E}_2'$ не является поперечным)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{a_\tau}{2\varepsilon_0}\frac{\mathbf{A}_\tau\rho}{\tau(\tau + 2\mathbf{k}_2)} = (\mathbf{C}_\tau - \mathbf{B}_\tau)\,\rho, \quad \rho\,(x,\ y),\\
&\frac{a_\tau}{2}\,\mathbf{n}_z\frac{\mathbf{A}_\tau}{\tau(\tau + 2\mathbf{k}_2)} = \mathbf{n}_z\,(\mathbf{C}_\tau - \varepsilon_0\mathbf{B}_\tau),\\
&\left[\left(k_x + \frac{2\pi}{l_x}n\right)\mathbf{n}_x + \left(k_y + \frac{2\pi}{l_y}m\right)\mathbf{n}_y + k_{2z}^\tau\mathbf{n}_z\right]\mathbf{B}_\tau = 0,\\
&\left[\left(k_x + \frac{2\pi}{l_x}n\right)\mathbf{n}_x + \left(k_y + \frac{2\pi}{l_y}m\right)\mathbf{n}_y - k_{1z}^\tau\mathbf{n}_z\right]\mathbf{C}_\tau = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Система (13) дает возможность определить все компоненты коэффициентов $\mathbf{B}_\tau$ и $\mathbf{C}_\tau$.

Закон отражения имеет вид

$$\sin\theta_{1\tau} = \sqrt{\left[\sin\theta_0\cos\varphi_0 + \frac{2\pi c}{\omega l_x}n\right]^2 + \left[\sin\theta_0\sin\varphi_0 + \frac{2\pi c}{\omega l_y}m\right]^2}, \qquad (14)$$

а закон преломления для полей $\mathbf{E}_2'$ и $\mathbf{E}_2''$ (2) записывается по-разному.

Волна $\mathbf{E}_2'(\mathbf{r})\,e^{-i\omega t}$ преломляется под углами $\theta_{2,\tau}'$, определяемыми из

$$\sin\theta_{2\tau}' = \sin\theta_{1\tau}\left\{\varepsilon_0 + \frac{4\pi c}{\omega}\left[\frac{\sin\theta_0\cos\varphi_0}{l_x}n + \frac{\sin\theta_0\sin\varphi_0}{l_y}m + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{p\sqrt{\varepsilon_0 - \sin^2\theta_0}}{l_z}\right]^2 + \frac{4\pi^2c^2}{\omega^2}\left[\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2} + \frac{p^2}{l_z^2}\right]\right\}^{-1/2}. \qquad (15)$$

Фаза этой преломленной волны чувствует структуру по всем направлениям. Угол преломления для волны $\mathbf{E}_2''(\mathbf{r}, t)$ зависит только от свойств среды вдоль направлений x и y

$$\sin\theta_{2\tau}'' = \frac{\sin\theta_{1\tau}}{\sqrt{\varepsilon_0}}. \qquad (16)$$

Плоскости поляризации высших гармоник отраженного и преломленного полей поворачивается.

Ввиду применения теории возмущений выпадают из рассмотрения частоты, лежащие в полосе непрозрачности [1] и определяемые равенством

$$\mathbf{k}_{2,0} = \frac{1}{2}\tau. \qquad (17)$$

Кроме того, мы ограничились первым приближением теории возмущений. Вклад в гармонику с номером n дает n-й член ряда (2а), величина которого порядка a_1/n, и первый член этого ряда в n-м приближении решения уравнения (6). Величина этого члена $\sim a_1^n$. Так как $a_1 \ll 1$, то $a_1/n \gg a_1^n$, поэтому можно не учитывать вклад n-го приближения и ограничиться первым.

Автор благодарен Б. М. Болотовскому и Г. М. Гарибяну за полезные советы и обсуждения.

Литература

[1] Л. Бриллюэн, М. Пароди. Распространение волн в периодических структурах. ИЛ, М., 1959.
[2] Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский. Усп. физ. наук, *88*, 209, 1966.
[3] Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский. Усп. физ. наук, *94*, 377, 1968.
[4] Д. Д. Джексон. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. ИЛ, М., 1948.
[5] О. С. Мергелян. Изв. вузов, радиофизика, *13*, 1412, 1970.
[6] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., 1959.

Поступило в Редакцию 8 января 1970 г.