ЗАМЕТКА О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Бородич Р.В.

Началу исследований пересечений максимальных подгрупп конечных групп восходит к работе Фраттини [1] 1885 года. Полученные им результаты в дальнейшем развивались многими авторами в различных направлениях (см. монографию М.В.Селькина [2]).

Цель настоящей заметки — доказать следующий результат.

Теорема. *Пусть G — конечная разрешимая группа. Тогда пересечение всех максимальных подгрупп за исключением максимальных подгрупп из одного класса сопряжённости метанильпотентно.*

Рассматриваются только конечные разрешимые группы. В обозначениях и определениях мы следуем монографиям [1,2].

Напомним, что собственная подгруппа H группы G называется максимальной подгруппой группы G, если всякая подгруппа группы G, содержащая H, либо совпадает с H, либо с G. Согласно [3], добавлением к нормальной подгруппе K группы G называется такая подгруппа H из G, что $HK = G$, но $H_1K \neq G$ для любой собственной подгруппы H_1 из H. Отметим, что подгруппа H тогда и только тогда является добавлением к нормальной подгруппе K группы G, когда $HK = G$ и $H \cap K \subseteq \Phi(G)$. Группа называется метанильпотентной, если она является расширением нильпотентной группы с помощью нильпотентной.

Доказательство теоремы. Пусть группа G имеет по крайней мере два различных класса сопряженных максимальных подгрупп. Зафиксируем один из классов сопряженности, и обозначим его через J. Пусть D обозначает пересечение всех максимальных подгрупп группы G, за исключением максимальных подгрупп из класса сопряжённости J. Рассмотрим факторгруппу $D/\Phi(G)$. Если $D/\Phi(G) = 1$, то нечего доказывать. Будем считать, что $D/\Phi(G)$ — неединичная группа. Так как $D/\Phi(G)$ разрешима, то в $D/\Phi(G)$ существует неединичная характеристическая q-подгруппа $Q/\Phi(G)$, для некоторого простого числа $q \in \pi(D/\Phi(G))$. Если предположить, что $Q/\Phi(G)$ содержится во всех максимальных подгруппах из J, то $Q/\Phi(G) \subseteq \Phi(G)/\Phi(G)$. Получили противоречие с выбором $Q/\Phi(G)$. Значит, найдётся максимальная подгруппа $M/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$ такая, что $M/\Phi(G) \cdot Q/\Phi(G) = G/\Phi(G)$. Отсюда получаем, что $G = MQ$. Если предположить, что M не входит в класс сопряженности J, то $Q \subseteq M$ и $M = G$. Противоречие. Будем считать, что M лежит в классе сопряженности J. Далее $Q = Q_1\Phi(G)$, где Q_1 — силовская q-подгруппа в Q.

По лемме Фраттини $G = QN_G(Q_1) = Q_1\Phi(G)N_G(Q_1) = \Phi(G)N_G(Q_1) = N_G(Q_1)$.

Следовательно, Q_1 — нормальная q-подгруппа группы G. Отсюда получаем, что $G = Q_1M$, где M — максимальная подгруппа из J, а Q_1 — нормальная q-подгруппа группы G, содержащаяся в D.

Пусть M_0 добавление к Q_1 в G. Тогда $Q_1 \cap M_0 \subseteq \Phi(M_0)$. По тождеству Дедекинда $D = D \cap Q_1M_0 = Q_1(D \cap M_0)$. Если $T = D \cap M_0$ не содержится в $\Phi(M_0)$, то найдется максимальная подгруппа H в M_0 такая, что $M_0 = TH$. Покажем, что Q_1H является максимальной подгруппой группы G. Если предположить обратное, то найдется максимальная подгруппа S в G такая, что $Q_1H \subset S \subset G$. Согласно тождеству Дедекинда, получаем, что $S = Q_1M_0 \cap S = Q_1(M_0 \cap S)$. Так как $H \subseteq M_0 \cap S$ и H — максимальная подгруппа группы M_0, то $M_0 \cap S = H$ или $M_0 \cap S = M_0$. В первом случае $S = Q_1H$, во втором $S = G$. Получили противоречие. Следовательно, Q_1H — максимальная подгруппа группы G. Так как нормальная подгруппа Q_1 не входит в подгруппу M, то по теореме Оре подгруппы Q_1H и M несопряжены. Это означает что $T \subseteq D \subseteq Q_1H$.

Следовательно, $G = Q_1M_0 = Q_1TH = Q_1H$. Получили противоречие. Значит, $T \subseteq \Phi(M_0)$ и T нильпотентна. Теорема доказана.

Литература:

1. Frattini G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni // Atti Acad. Dei Lincei 1885. V.1. P. 281-285.

2. Селькин М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп — Мн., 1997. 144 с.

3. Шеметков Л.А. Формации конечных групп — М.: Наука, 1978. 278 с.