# ОТКРЫТАЯ СЕТЬ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ, ОПИСЫВАЕМАЯ ПРОЦЕССОМ «ЗАХВАТОВ И КАТАСТРОФ»

**Черноус Ж.А.**

В теории сетей массового обслуживания значительное место занимает класс мультипликативных сетей. С проблемой мультипликативности стационарного распределения тесно связано понятие квазиобратимости. Это понятие лежит в основе большинства результатов по данной проблеме. Келли доказал возможность мультипликативного представления стационарного распределения сети с квазиобратимыми узлами [1].

Таким образом, *цель данного исследования* □ установить квазиобратимость узлов рассматриваемой сети для представления ее стационарного распределения в мультипликативной форме. Существует множество различных способов, с помощью которых можно доказать квазиобратимость цепи Маркова. В настоящей работе использован *метод разложения интенсивности перехода на составляющие*, который представлен в [2]. Данный метод основан на том, что интенсивность перехода из некоторого состояния $x$ цепи Маркова с непрерывным временем, имеющей счетное пространство состояний $S$, в некоторое состояние $y$ этой же цепи разбивается на следующие слагаемые: $q^A(x, y)$ и $q^D(x, y)$ □ интенсивности перехода из состояния $x$ в состояние $y$ за счет поступления и ухода заявки соответственно, $q^{AD}(x, y)$ □ интенсивность перехода из состояния $x$ в состояние $y$ за счет поступления заявки, которое одновременно является уходом заявки, $q^I(x, y)$ □ интенсивность внутреннего перехода из состояния $x$ в состояние $y$. Следует отметить то, что при таком подходе физическая интерпретация интенсивностей $q^I$, $q^A$, $q^D$ и $q^{AD}$ не имеет существенного значения. Далее, используя введенное разбиение интенсивностей переходов, для всех $x \in S$ определяют

$$\alpha(x) = \sum_{y \in S} \left( q^A(x,y) + q^{AD}(x,y) \right) \qquad (1)$$

и

$$\beta(x) = \sum_{y \in S} \frac{p(y)}{p(x)} \left( q^D(y,x) + q^{AD}(y,x) \right), \qquad (2)$$

где $\{p(x), x \in S\}$ □ стационарное распределение рассматриваемой цепи. Выражения в правых частях (1) и (2) дают интенсивности поступлений в прямом и обращенном времени соответственно.

*Определение.* Цепь со структурой определённой выше, квазиобратима, если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ не зависят от $x$.

Такую цепь называют также квазиобратимым узлом.

Рассмотрим цепь Маркова с пространством состояний $Z_+ = \{0, 1, 2, \ldots$ и интенсивностями переходов

$q(n, n+1) = a, \quad n > 0,$

$q(0,1) = c,$

$q(n,0) = b, \qquad n > 0,$

$q(n,m) = 0$ в остальных случаях.

Стационарное распределение $\{p(n), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ для данной цепи находится по формуле:

$$p(n) = \frac{c}{a+b} \left( \frac{a}{a+b} \right)^{n-1} p(0), \qquad (3)$$

где $p(0) = \dfrac{b}{b+c}$, а условие $\dfrac{a}{a+b} < 1$ является условием эргодичности цепи.

Докажем, что рассматриваемая цепь квазиобратима. Для этого разобьем интенсивности переходов следующим образом:

$$q^A(0,1) = c, \qquad (4)$$

$$q^I(n, n+1) = a, \qquad n > 0, \qquad (5)$$

$$q^D(n,0) = b, \qquad n > 0. \qquad (6)$$

$$q^{AD}(n,n) = c, \qquad n > 0. \qquad (7)$$

Описанная таким образом цепь представляет собой модель блуждающих заявок, пытающихся захватить узел. Они могут захватить пустой узел, но должны двигаться дальше, если он уже занят. В пределах узла состояние цепи Маркова увеличивается за счёт внутренних изменений, происходящих с интенсивностью $a$ (возможно моделирование рождения других заявок), до тех пор, пока не произойдёт катастрофа (интенсивность $b$). Согласно формулам (1) и (2) найдем интенсивности $\alpha(n)$ и $\beta(n)$. Произведя необходимые подстановки ((4) и (5) в (1); (3), (5) и (7) в (2)), получим, что $\alpha(n) = c$ $(n \geq 0)$ и $\beta(n) = c$ $(n \geq 0)$. Таким образом, квазиобратимость цепи установлена. Рассмотрим сеть, склеенную из узлов, описываемых данной цепью Маркова. Согласно теореме Келли [1], стационарное распределение такой сети представляется в форме произведения сомножителей, характеризующих отдельные узлы.

Литература:

1. Kelly F.P. Networks of Quasireversible Nodes // Adv. Appl. Probab. – Comp. Sci.: Proc. of the ORSA-TIMS BRS. – Boston. – 1981.

2. Chao X., Miyazawa M. A Probabilistic Decomposition Approach to Quasi-Reversibility and its Application in Coupling of Queues // Preprint: New Jercy Inst. of Technology, Science Univercity of Tokyo. – 1996. – P.1–18.