ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ПРИ УЧЕТЕ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Бабич К.С.

В инженерной практике часто возникают задачи, связанные с расчетом напряженно-деформированного состояния конструкции с учетом наличия трещин и других повреждений. Для решения линейных и нелинейных задач о трещинах широко используют численные методы, в частности, метод конечных элементов (МКЭ), важным методическим приёмом которого является мысленное разделение исследуемого тела на небольшие области, или конечные элементы (КЭ). Связь между силами, действующими на узлы, и перемещениями отдельных точек системы может быть установлена посредством так называемой матрицы жесткости. Авторы большинства работ, выполненных с применением МКЭ к задачам о трещинах, рекомендуют вводить специальный КЭ, содержащий устье трещины [1]. При таком подходе возникает проблема учета этого КЭ в общей расчетной схеме. Цель настоящей работы состоит в построении матрицы жесткости конечного элемента (КЭ), поле деформаций которого описывается лагранжевым тензором конечных деформаций (l_{ij}), без предварительного выбора функции перемещения на конечном элементе.

В основе предлагаемого здесь алгоритма построения матрицы жесткости лежит предположение, что, делая априорные суждения о деформированном состоянии конечного элемента и выполняя разумные операции усреднения, можно получить удобные матрицы жесткости, содержащие минимальное число кинематических и статических параметров и позволяющие моделировать и решать с приемлемой точностью разнообразные задачи механики конструкций.

Представляя тензор (l_{ij}) через тензор малых деформаций (ε_{ij}) и тензор больших поворотов конечного элемента как жесткого целого (ω_{ij}), после перехода к главным осям запишем главные компоненты тензора:

$$l_{ii} = \varepsilon_{ii} + \frac{1}{2}\omega_{ki}\omega_{ki}. \tag{1}$$

Матричный алгоритм вычисления тензора деформаций (ε_{r}) по заданным перемещениям узлов хорошо известен [2]. В настоящей работе в рамках модели конечных поворотов твердого тела вектор перемещения $(\overline{\rho\rho'})$ определён через вектор жесткого поворота θ [3]:

$$\overline{\rho'\rho} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}\theta^2}\bar{\theta}\times\left(\bar{\rho} + \frac{1}{2}\bar{\theta}\times\bar{\rho}\right), \tag{2}$$

где вектор $\bar{\theta}$ выражен в параметрах Родрига λ_s следующим образом:

$$\bar{\theta} = \frac{2}{\lambda_0}\lambda_s\bar{e}_s \quad (s = 1, 2, 3), \tag{3}$$

здесь $\bar{e}_s$ - базисные векторы.

Выполнив типовые преобразования, можно получить разрешающие матрицы в обычном виде. Так, и в рамках предположения о малости тензора деформаций, и в модели, использующей тензор конечных деформаций, типовая матрица имеет вид:

$$(M) = \frac{1}{6V}\left(\begin{pmatrix} M_1^1 & 0 & 0 & M_2^1 & 0 & M_3^1 \\ 0 & M_2^1 & 0 & M_1^1 & M_3^1 & 0 \\ 0 & 0 & M_3^1 & 0 & M_2^1 & M_1^1 \end{pmatrix}^T, \ \ldots\right), \tag{4}$$

где V – объем тетраэдра. Однако при сохранении структуры матрицы во второй из названных моделей каждый элемент матрицы (M) дополняется членами, учитывающими конечность поворотов КЭ, причем вычисляются эти дополнительные слагаемые довольно регулярным образом через те же миноры M_i^j, представляющие собой миноры определителей, известных в теории симплексных КЭ. В работе построены матрицы жесткости для конечных элементов всех размерностей. В силу громоздкости матрицы (4) в общем случае мы ее не приводим (см. [4]). В первом приближении выражения для компонентов тензора малых деформаций совпадают с известными соотношениями МКЭ.

Практическая реализуемость такой схемы расчета с применением МКЭ обеспечена возможностями современной вычислительной техники.

Результаты данной работы имеют методическую и практическую ценность и могут быть использованы при выполнении прочностных расчетов механических конструкций различного назначения. Так, в [4] предложенная здесь методика использована при моделировании развития трещины в двухконсольно нагруженном образце. Кроме того, планируется расчет напряженно-деформированного состояния поврежденного нефтеналивного резервуара ОАО "Беларуснефть".

Литература:

1. Морозов Е. М., Никишков Г. П. Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука, 1980.

2. Безухов Н. И., Лужин О. В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. – М.: Высшая школа, 1974.

3. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961.

4. Бабич К. С. Моделирование развития трещины в условиях плоской задачи теории упругости методом конечных элементов: Дипломная работа.- ГГУ им. Ф. Скорины, 2003.