КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 535.33 : 539.124

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ВАВИЛОВА—ЧЕРЕНКОВА ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАРЯДОМ В ОДНООСНОМ ГИРОТРОПНОМ КРИСТАЛЛЕ

А. Б. Куканов и *Б. Д. Ориса*

Исследование излучения Вавилова—Черенкова в одноосном гиротропном кристалле имеет не только самостоятельный интерес, но также важно с точки зрения возможных приложений в физике плазмы [1].

Этой проблеме посвящен целый ряд работ [2–10]. Следует отметить, что в отличие от случая излучения Вавилова—Черенкова при движении заряженной частицы вдоль оптической оси [2–8] в случае, когда частица движется под некоторым к ней углом, интегрирование по углам выражения для интенсивности излучения до сих пор не проведено до конца в аналитическом виде [9]. Настоящая работа посвящена изложению некоторых результатов такого интегрирования в случае, когда заряженная частица движется перпендикулярно оптической оси одноосного гиротропного кристалла.

Выражение для интенсивности излучения Вавилова—Черенкова заряженной частицей, движущейся в плоскости Ox_1x_3 под некоторым углом к оптической оси кристалла (совпадающей с осью x_3), на единице пути имеет вид [10]

$$W=\sum_j W_j^{\text{В.-Ч.}},\quad W_j^{\text{В.-Ч.}}=\frac{e^2}{4\pi v c^2}\sum_S\int\omega d\omega\times$$

$$\times\operatorname{Re}\int\limits_{n_j(\cos 0)}^{-n_j(\cos\pi)}\frac{\mu_3(\mu_1^2-\mu_2^2)\left[M_{11}^j v_1^2+(M_{13}^j+M_{31}^j)v_1v_3+M_{33}^j v_3^2\right]dt_j}{j\sqrt{\alpha_1^2t_j^4+2\alpha_2t_j^2+\alpha_3^2}\sqrt{v_1^2(n_j^2-t_j^2)-(c-v_3t_j)^2}}. \tag{1}$$

Здесь M_{11}^j, M_{13}^j, M_{31}^j, M_{33}^j — алгебраические дополнения элементов тензора T_{ik}, детерминант которого является уравнением Френеля для рассматриваемой среды, v_1 и v_2 — компоненты постоянного вектора скорости $\mathbf{v}(v_1, 0, v_3)$ частицы, под знаком радикала в знаменателе подынтегрального выражения

$$n_j^2=\frac{(\gamma-\tilde{\beta}t_j^2)+j\sqrt{\alpha_1^2t_j^4+2\alpha_2t_j^2+\alpha_3^2}}{2\chi},\ j=+1,\ -1. \tag{2}$$

$$\tilde{\beta}=\varepsilon_1(\mu_3-\mu_1)+\mu_1(\varepsilon_3-\varepsilon_1);\ \gamma=\varepsilon_1\varepsilon_3(\mu_1^2-\mu_2^2)+\mu_1\mu_3(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2), \tag{3}$$

$$\alpha_1^2=[\varepsilon_1(\mu_3-\mu_1)-\mu_1(\varepsilon_3-\varepsilon_1)]^2;\ \alpha_3^2=[\varepsilon_1\varepsilon_3(\mu_1^2-\mu_2^2)-\mu_1\mu_3(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)]^2, \tag{4}$$

$$2\alpha_2=-2\left[(\varepsilon_1\mu_3+\mu_1\varepsilon_3)\gamma-4\varepsilon_1\mu_1\varepsilon_3\mu_3(\varepsilon_1\mu_1+\varepsilon_2\mu_2)\right];\ \chi=\varepsilon_1\mu_1. \tag{5}$$

Тензоры электрической и магнитной проницаемости имеют вид

$$\varepsilon_{ik}(\omega)=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & -i\varepsilon_2 & 0\\ i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{pmatrix},\quad \mu_{ik}(\omega)=\begin{pmatrix}\mu_1 & -i\mu_2 & 0\\ i\mu_2 & \mu_1 & 0\\ 0 & 0 & \mu_3\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Суммирование по s в (1) производится по двум простым корням φ_1 и φ_2 ($0\leqslant\varphi_s<2\pi$) уравнения [11]

$$v_1\sin\Theta\cos\varphi+v_3\cos\Theta-\frac{c}{n_j(\cos\Theta)}=0, \tag{7}$$

$n_j(\cos\Theta)$ — показатель преломления для волны типа j ($j=+1,\ -1$) [6], Θ — угол между оптической осью кристалла и направлением волнового вектора $\mathbf{k}$. Требование действительности выражения для $W_j^{\text{В.-Ч.}}$ приводит к тому, что интегрирование по переменной $t_j = n_j(\cos\Theta)\cos\Theta$, предполагаемой вещественной, должно быть проведено в области значений $\{t_j\}$, в которой произведение двух сомножителей под знаком радикала в знаменателе подынтегрального выражения в (1) остается положительным. Поэтому фактическая область интегрирования по переменной t_j может оказаться у́же области, ограниченной верхним и нижним пределами интеграла (1). Рассмотрим формулу (1) в случае, когда $v_3 = 0$, $v_1 = v$. Вводим замену переменных

$$j\sqrt{\alpha_1^2 t_j^4 + 2\alpha_2 t_j^2 + \alpha_3^2} = |\alpha_1|\, t_j^2 + u_j \quad (j = +1,\ -1). \tag{8}$$

Отсюда и из вещественности t_j следует, что $t_j^2 = \dfrac{u_j^2 - \alpha_3^2}{2(\alpha_2 - |\alpha_1|\, u_j)} \geqslant 0$. Рассматривая случай $u_j^2 - \alpha_3^2 \geqslant 0$, $\alpha_2 - |\alpha_1|\, u_j \geqslant 0$, получаем

$$W_j^{\text{В.–Ч.}} = \frac{e^2}{\pi c^2}\int_0^{\omega_{\max}} \omega\, d\omega \times$$

$$\times \operatorname{Re}\int_{j|\alpha_3|}^{u_j^{\text{пред.}}} \frac{\mu_3\sqrt{2\chi}\,(u_j \pm |\alpha_3|)\left\{1 - (\beta^2\varepsilon_1\mu_3)^{-1}\dfrac{\alpha_2 \mp |\alpha_1|\,|\alpha_3|}{\alpha_2 - |\alpha_1|\, u_j}\right\} du_j}{\sqrt{(u_j^2 - \alpha_3^2)(r u_j^2 + 2 q u_j + p)}} \tag{9}$$

при условиях

$$\text{А)}\ |\alpha_1| = \mu_3\varepsilon_1 - \mu_1\varepsilon_3 \geqslant 0 \tag{10}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\text{а)}\ |\alpha_3| = \mu_1\mu_3(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) - \varepsilon_1\varepsilon_3(\mu_1^2 - \mu_2^2) \geqslant 0 \ \text{(верхние знаки)},\\ &\text{б)}\ |\alpha_3| = \varepsilon_1\varepsilon_3(\mu_1^2 - \mu_2^2) - \mu_1\mu_3(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \geqslant 0 \ \text{(нижние знаки)}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$W_j^{\text{В.–Ч.}} = \frac{e^2}{\pi c^2}\int_0^{\omega_{\max}} \omega\, d\omega \times$$

$$\times \operatorname{Re}\int_{j|\alpha_3|}^{u_j^{\text{пред.}}} \frac{\mu_3\sqrt{2\chi}\,(u_j \pm |\alpha_3|)\left\{-(\beta^2\varepsilon_1\mu_3)^{-1} + \dfrac{\alpha_2 \mp |\alpha_1|\,|\alpha_3|}{\alpha_2 - |\alpha_1|\, u_j}\right\} du_j}{\sqrt{(u_j^2 - \alpha_3^2)(r u_j^2 + 2 q u_j + p)}} \tag{12}$$

при условиях

$$\text{Б)}\ |\alpha_1| = \mu_1\varepsilon_3 - \mu_3\varepsilon_1 \geqslant 0 \ \text{и (11)}. \tag{13}$$

Здесь

$$r = -\tilde{\beta} - |\alpha_1| - 2\chi;\ \ 2q = -2\gamma\,|\alpha_1| + 2\alpha_2 + 4\chi\,|\alpha_1|\,\beta^{-2}, \tag{14}$$

$$p = 2\alpha_2(\gamma - 2\chi\beta^{-2}) + \alpha_3^2(\tilde{\beta} - |\alpha_1| + 2\chi). \tag{15}$$

Из (9) и (12) ясно, что результаты интегрирования по u_j могут быть выражены с помощью эллиптических интегралов [12]. Пусть, например: $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon$, $\mu_1 = \mu_3 = \mu$ $(\varepsilon\mu > 0)$, $|\varepsilon_2\mu - \varepsilon\mu_2| \leqslant |\varepsilon_2\mu + \varepsilon\mu_2|$. Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} &l_j = (|\varepsilon_2\mu + \varepsilon\mu_2|^{-1})\, u_j,\\ &a = |\varepsilon_2\mu + \varepsilon\mu_2| + \sqrt{4\varepsilon\mu(\varepsilon\mu - \beta^{-2})},\quad b = |\varepsilon_2\mu - \varepsilon\mu_2|,\\ &\tilde{c} = |\varepsilon_2\mu + \varepsilon\mu_2| - \sqrt{4\varepsilon\mu(\varepsilon\mu - \beta^{-2})},\quad d = -|\varepsilon_2\mu - \varepsilon\mu_2| \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

и учтем, что должно быть $\varepsilon\mu - \beta^{-2} > 0$ $\left(\beta = \dfrac{v}{c},\ c \text{ — скорость света в вакууме}\right)$.

Рассмотрим следующие возможные случаи.

При $j = +1$, $l_1^{\text{пред.}} > a > l_1 \geqslant b > \tilde{c} > d$

$$\operatorname{Re}\int_{|\alpha_3|}^{u_1^{\text{пред.}}} \ldots du_1 = \frac{\mu g\,[1 - (\beta^2\varepsilon\mu)^{-1}]}{|\varepsilon_2\mu + \varepsilon\mu_2|}\{v_0(\varepsilon^2\mu_2^2 - \mu^2\varepsilon_2^2) + |\varepsilon\mu_2 + \mu\varepsilon_2| \times$$

$$\times [(a - d)\, v_1 + d v_0]\}. \tag{17}$$

При $j=-1,\ a>b>\tilde{c}>d\geqslant l_{-1}>l_{-1}^{\text{пред.}}$

$$\operatorname{Re}\int\limits_{-|\alpha_3|}^{u_{-1}^{\text{пред.}}}\dots du_{-1}=0. \tag{18}$$

В формуле (17) $v_0=F\left(\frac{\pi}{2},\ k\right)$, $v_1=\prod\left(\frac{\pi}{2},\ \alpha^2,\ k\right)$ — полные эллиптические интегралы соответственно 1-го и 3-го рода [12],

$$g=\frac{2}{\sqrt{(a-\tilde{c})\,(b-d)}},\quad \alpha^2=\frac{b-a}{b-d},\quad k^2=\frac{(a-b)\,(\tilde{c}-d)}{(a-\tilde{c})\,(b-d)}. \tag{19}$$

При $j=+1,\ l_1^{\text{пред.}}>a>l_1\geqslant b>d>\tilde{c}$ имеем формулу, получаемую из (17) путем замены $\tilde{c}\to d,\ d\to\tilde{c}$. При $j=-1,\ a>b>d\geqslant l_{-1}>\tilde{c}>l_{-1}^{\text{пред.}}$ имеем

$$\operatorname{Re}\int\limits_{-|\alpha_3|}^{u_{-1}^{\text{пред.}}}\dots du_{-1}=-\frac{\mu g\,[1-(\beta^2\varepsilon\mu)^{-1}]}{|\varepsilon_2\mu+\varepsilon\mu_2|}\{v_0\,(\varepsilon^2\mu_2^2-\mu^2\varepsilon_2^2)+$$
$$+|\varepsilon\mu_2+\mu\varepsilon_2|\,[(\tilde{c}-a)\,v_1+av_0]\}, \tag{20}$$

где

$$g=\frac{2}{\sqrt{(a-d)\,(b-\tilde{c})}},\quad \alpha^2=\frac{\tilde{c}-d}{a-d},\quad k^2=\frac{(a-b)\,(d-\tilde{c})}{(a-d)\,(b-\tilde{c})}. \tag{21}$$

Переход к случаю изотропной среды можно осуществить, если в двух последних результатах (при $j=+1$ и $j=-1$) $\varepsilon_2\to 0,\ \mu_2\to 0$. Суммируя при этом $W_{+1}^{\text{в.-ч.}}$ и $W_{-1}^{\text{в.-ч.}}$, мы получим классический результат Франка и Тамма [13].

Литература

[1] В. И. Векслер. CERN Symposium, Geneva, *1*, 80, 1956.
[2] А. А. Коломенский. ЖЭТФ, *24*, 167, 1953.
[3] А. Г. Ситенко, А. А. Коломенский. ЖЭТФ, *30*, 511, 1956.
[4] А. А. Коломенский. ДАН СССР, *106*, 982, 1956.
[5] В. Я. Эйдман. ЖЭТФ, *34*, 134, 1958.
[6] Г. А. Бегиашвили, Э. В. Гедалин. ЖЭТФ, *35*, 1533, 1958.
[7] В. Г. Барьяхтар, М. И. Каганов. ЖЭТФ, *35*, 766, 1958.
[8] В. Н. Курдюмов. ЖТФ, *35*, 1771, 1965; *38*, 260, 1968.
[9] В. Н. Курдюмов. ЖТФ, *38*, 250, 1968.
[10] А. Б. Куканов. Изв. вузов, физика, № 1, 1970.
[11] А. Б. Куканов. Опт. и спектр., *14*, 121, 1963.
[12] P. F. Byrd, M. D. Friedman. Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Berlin, 1954.
[13] И. М. Франк, И. Е. Тамм. ДАН СССР, *14*, 107, 1937.

Поступило в Редакцию 15 октября 1969 г.

УДК 621.373 : 535

ИМПУЛЬСНАЯ МОДУЛЯЦИЯ ДОБРОТНОСТИ РЕЗОНАТОРА НЕПРЕРЫВНОГО ЛАЗЕРА

Л. Н. Магдич

В лазерах с малым усилением активного вещества обычно используются зеркала с коэффициентом отражения, близким к единице. В этом случае через зеркало излучается лишь небольшая часть световой энергии, запасенной в резонаторе.

Целью настоящей работы является исследование импульсного вывода излучения из резонатора лазера. Подобные исследования, как правило, проводились с импульсными твердотельными лазерами [1, 2]. Импульсный вывод излучения, заключенного в резонаторе непрерывного лазера, исследован в меньшей степени [3].

В работе использовался лазер ЛГ-36А с расстоянием между зеркалами 180 см и с длиной волны излучения 0.63 мкм. Плоское зеркало лазера было заменено зер-