

# АПЕРТУРА ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ПРИ НЕКОЛЛИНЕАРНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ СВЕРХКОРОТКИМИ ИМПУЛЬСАМИ СВЕТА

Г. В. Кривошеков, Н. Г. Никулин, Р. И. Соколовский  
и В. И. Строганов

Исследован вопрос об апертурных явлениях при измерениях длительности сверхкоротких импульсов с использованием «нелинейных» кристаллов.

## Введение

Возбуждение второй гармоники в нелинейном кристалле сверхкороткими импульсами света рассматривалось неоднократно [1-4]. При этом авторы ограничивались случаем, когда гармоника возбуждается одним импульсом накачки. Если в нелинейной среде распространяются два импульса накачки, то в области их перекрытия также возбуждается поле на двойной частоте, пространственное распределение которого несет информацию о структуре и длительности импульсов [5]. Существующие способы измерения длительности сверхкоротких импульсов света имеют ряд ограничений. Методика, использующая двухфотонную люминесценцию [6], дает ограниченный контраст изображения. При использовании второй гармоники в методе, предложенном в работе [7], контраст достаточно высок, но контур импульса может быть построен только по отдельным измерениям интенсивности второй гармоники при последовательном изменении длины оптической задержки.

Способ измерения длительности сверхкоротких импульсов, основанный на смещении световых волн в кристаллах [5], свободен от вышеуказанных ограничений. Однако вопрос об апертурных явлениях в этом случае не исследован и является предметом настоящего сообщения.

## Основные соотношения

Пусть на границу нелинейной недиссипативной среды под одинаковыми углами к нормали падают две амплитудно-модулированные волны (импульсы) с плоскими фазовыми фронтами.

Выберем систему координат следующим образом: ось  $Z$  направлена в кристалл, ось  $X$  вдоль границы в плоскости падения (см. рисунок). Индексами 1, 2 обозначаем параметры волн накачки, индексом 3 — параметры возбуждаемой волны второй гармоники. Предполагается выполненным условие синхронизма [1,8]

$$k_3 = k_1 + k_2, \quad (1)$$

и считается, что все три поля представлены в виде плоских волн с медленно меняющимися амплитудами [1]

$$E_j = e_j A_j(t, x, z) e^{i(\omega_j t - k_j r)} \quad (j = 1, 2, 3), \quad (2)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega, \quad \omega_3 = 2\omega.$$

Здесь  $e_j$   
динатами  
Амплитуды

где  $P^{NL}$   
 $= \frac{\partial \omega}{\partial k} \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)$   
Уравнение  
новых па  
ведливо,  
творят

где  $\tau$  — д  
преломле  
всегда м  
волновых  
кристалл  
ких сант  
10<sup>-13</sup> сек  
силу и э  
особо [2].

Решен  
в прибли  
случае а  
нению

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + tg \beta \right)$$

где  $\beta$  — у  
группова  
нелинейн

значения

в точке

где  $u_1 \simeq$   
в (5) и и

найдем,

$$A_3 =$$

где  $v = \frac{1}{u}$



Здесь  $\mathbf{e}_j$  — векторы поляризации волн,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки с координатами  $(x, z)$ .

Амплитуды  $A_j$  удовлетворяют следующим уравнениям [1]:

$$2i[\mathbf{e}_j \times (\mathbf{k}_j \times \mathbf{e}_j)] \left( \nabla A_j + \mathbf{S}_j \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c^2} \omega_j^2 \mathbf{e}_j \mathbf{P}^{NL}(\omega_j) e^{-i(\omega_j t - \mathbf{k}_j \mathbf{r})}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{P}^{NL}(\omega_j)$  — компонента нелинейной поляризации на частоте  $\omega_j$ ,  $\mathbf{S} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right)^{-2}$  — лучевой вектор волны.

Уравнение (3) справедливо, когда дисперсионным распылением волновых пакетов (2) можно пренебречь. Подобное предположение справедливо, если длина  $l$ , которую проходит волна в кристалле, удовлетворяет условию

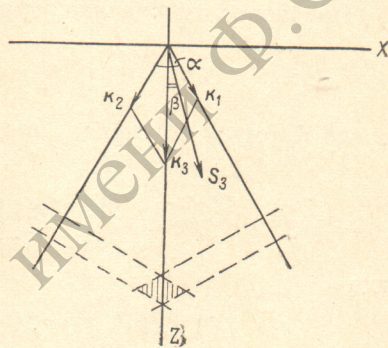
$$l \ll \frac{2\pi^2 c^2 \tau^2}{\lambda^2 \frac{dn}{d\lambda} n}, \quad (4)$$

где  $\tau$  — длительность импульса,  $\lambda$  — длина волны накачки,  $n$  — показатель преломления. Для импульсов, длительностью  $\tau \geq 10^{-13}$  сек., практически всегда можно пренебречь распылением волновых пакетов, так как используемые кристаллы имеют длину порядка нескольких сантиметров. Для импульсов короче  $10^{-13}$  сек. принятый здесь подход теряет силу и этот случай нужно рассматривать особо [2].

Решение уравнений (3) будем искать в приближении заданного поля [1, 8]. В этом случае амплитуда  $A_3$  удовлетворяет уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \operatorname{tg} \beta \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{u_3 \cos \beta} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_3 = i \gamma A_1 A_2, \quad (5)$$

где  $\beta$  — угол между лучевым вектором  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{k}_3$  (см. рисунок),  $u_3 = \partial \omega_3 / \partial k$  — групповая скорость импульса второй гармоники,  $\gamma = \frac{4\pi (2\omega)^2}{2c^2 k_3 \cos^2 \beta} \mathbf{e}_3 \chi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$  — нелинейная константа. Амплитуды волн накачки  $A_1$  и  $A_2$  связаны со своими



значениями  $A_{10}(t) = A_{20}(t) = A_0 \varphi(t)$   $\left( \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1 \right)$  на границе  $z=0$  в точке  $x=0$  соотношениями

$$\left. \begin{aligned} A_1(t, x, z) &= A_{10} \left( t - \frac{z \cos \alpha + x \sin \alpha}{u_1} \right), \\ A_2(t, x, z) &= A_{20} \left( t - \frac{z \cos \alpha - x \sin \alpha}{u_2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $u_1 \simeq u_2$  — групповые скорости импульсов накачки. Подставляя (6) в (5) и интегрируя полученное уравнение с учетом граничного условия

$$A_3|_{z=0} = 0,$$

найдем, что

$$\begin{aligned} (1) \quad A_3 &= -i\gamma \int_0^z dz' A_{10} \left( t - \frac{z}{u_3 \cos \beta} - \frac{x - z \operatorname{tg} \beta}{u_1} \sin \alpha + \left( v - \frac{\operatorname{tg} \beta}{u_1} \sin \alpha \right) z' \right) \times \\ &\quad \times A_{20} \left( t - \frac{z}{u_3 \cos \beta} + \frac{x - z \operatorname{tg} \beta}{u_2} \sin \alpha + \left( v + \frac{\operatorname{tg} \beta}{u_2} \sin \alpha \right) z' \right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$(2) \quad \text{где } v = \frac{1}{u_3 \cos \beta} - \frac{\cos \alpha}{u_1}.$$



Из формулы (7) видно, что импульс гармоники имеет ограниченную апертуру  $A_3(t, x, z)$ , несмотря на то что импульсы волн накачки имели бесконечный фронт. Это связано с тем, что размер области, в которой соответствующая компонента нелинейной поляризации отлична от нуля (ромбик, заштрихованный на рисунке), определяется длительностью  $\tau$  импульса накачки  $a \sim 2\tau u_1 / \sin \alpha$ . При  $x > a$  подынтегральная функция резко убывает и амплитуда второй гармоники стремится к нулю.

### Частные случаи. Примеры

Распределение энергии второй гармоники по оси  $X$  может быть измерено экспериментально. Соответствующая функция, очевидно, пропорциональна интегралу

$$W(x) = \frac{1}{\tau^2 A_0^4} \int_{-\infty}^{+\infty} dt |A_3(t, x, l)|^2 \quad (8)$$

и тесно связана с формой и длительностью импульса накачки. Проанализируем эту связь.

Предположим сначала, что параметр

$$\frac{l \operatorname{tg} \beta}{u_1} \sin \alpha \ll \tau, \quad (9)$$

тогда формулу (8) можно представить в виде

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left| \int_0^l dz' \rho(t + \nu z', x) \right|^2, \quad (10)$$

где

$$\rho(t, x) = \varphi(t - T) \varphi(t + T), \quad T = \frac{x \sin \alpha}{u_1}. \quad (11)$$

Переменные  $x$  и  $t$  в формуле (11) разделяются только для импульсов гауссовой формы  $\varphi(t) = (\sqrt{\pi\tau})^{-1} \exp\{-t^2/\tau^2\}$ ;

$$\rho(t, x) = (\sqrt{\pi\tau})^{-2} \exp\{-2T^2/\tau^2\} \exp\{-2t^2/\tau^2\}, \quad W(x) \sim \exp\{-4T^2/\tau^2\}.$$

Для всех остальных импульсов переменные  $x$  и  $t$  тесно связаны.

Интеграл под знаком модуля в формуле (10) можно рассматривать как свертку распределения (11) с щелевой аппаратной функцией  $\zeta(z) = \theta(z)\theta(l - z)$ , где

$$\theta(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

Разберем два предельных случая: 1)  $\nu l \ll \tau$  ( $l \ll l_k$ ,  $l_k$  — квазистатистическая длина [2]), 2)  $\nu l \gg \tau$ . В первом случае «размер щели» много меньше распределения (11) и

$$W(x) \simeq l^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^2(t, x) dt = l^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \varphi^2(t - T) \varphi^2(t + T). \quad (12)$$

Во втором случае ( $\nu l \gg \tau$ ) размер «щели» много больше размеров, характеризующих распределение  $\rho(t, x)$ . Как видно из (11),  $\rho(t, x)$  при фиксированном  $x$  имеет два максимума, расстояние между которыми порядка  $2T$ . Введем функцию

$$B(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t - T) \varphi(t + T) dt, \quad (13)$$



с помощью которой определим нормированное распределение

$$\rho_N(t, x) = \frac{1}{B(x)} \rho(t, x). \quad (14)$$

Подставляя (14) в формулу (10) и аппроксимируя  $\rho_N(t, x)$  суммой двух  $\delta$ -функций, сцентрированных на временах  $t = \pm T$ , соответственно получим, что

$$W(x) \simeq \frac{l}{v} B^2(x). \quad (15)$$

| $\varphi(t)$                                                                                                                                                 | $W_1(x)$                                                                                                                                                                      | $W_2(x)$                                                                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Гауссов импульс<br>( $\sqrt{\pi}\tau$ ) <sup>-1</sup> exp { - $\frac{t^2}{\tau^2}$ }                                                                         | $\frac{l^2}{2\pi^{3/2}\tau^3}$ exp { - $4\frac{T^2}{\tau^2}$ }                                                                                                                | $\frac{l}{2\pi v\tau^2}$ exp { - $4\frac{T^2}{\tau^2}$ }                                                                                              |
| Дисперсионный импульс<br>$\frac{1}{\pi\tau} \frac{1}{1 + \frac{t^2}{\tau^2}}$                                                                                | $\frac{\tau l^2}{16\pi^3} \frac{5\tau^2 + T^2}{(\tau^2 + T^2)^3}$                                                                                                             | $\frac{l}{4\pi^2 v\tau^2} \left( 1 + \left( \frac{T}{\tau} \right)^2 \right)^2$                                                                       |
| Треугольный импульс<br>$\frac{1}{\tau} \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right), -\tau < t < 0$<br>$\frac{1}{\tau} \left( 1 - \frac{t}{\tau} \right), 0 < t < \tau$ | $\frac{16}{15} \frac{l^2}{\tau^3} \left( 1 + \frac{T}{\tau} \right)^5, -\tau < T < 0$<br>$\frac{16}{15} \frac{l^2}{\tau^3} \left( 1 - \frac{T}{\tau} \right)^5, 0 < T < \tau$ | $\frac{16l}{9v\tau^2} \left( 1 + \frac{T}{\tau} \right)^3, -\tau < T < 0$<br>$\frac{16l}{9v\tau^2} \left( 1 - \frac{T}{\tau} \right)^3, 0 < T < \tau$ |
| Прямоугольный импульс<br>$\frac{1}{2\tau}, -\tau < t < \tau$<br>$0,  t  > \tau$                                                                              | $\frac{l^2}{8\tau^3} \left( 1 + \frac{T}{\tau} \right), -\tau < T < 0$<br>$\frac{l^2}{8\tau^3} \left( 1 - \frac{T}{\tau} \right), 0 < T < \tau$                               | $\frac{l}{4v\tau^2} \left( 1 + \frac{T}{\tau} \right)^2, -\tau < T < 0$<br>$\frac{l}{4v\tau^2} \left( 1 - \frac{T}{\tau} \right)^2, 0 < T < \tau$     |

В таблице приведены примеры функций  $W(x)$ , вычисленные по формулам (12) и (15) для импульсов различной формы. Индекс 1 относится к первому случаю, индекс 2 — ко второму.

Откажемся теперь от предположения (9) и проанализируем роль двулучепреломления. Рассмотрим два предельных случая: 1)  $v \gg \frac{\text{tg } \beta}{u_1} \sin \alpha$ , 2)  $v \ll \frac{\text{tg } \beta}{u_1} \sin \alpha \equiv \delta$ . В первом случае двулучепреломление приведет к сдвигу распределения  $W(x)$  на величину  $x_0 = l \text{tg } \beta$  без изменения его формы [см. формулу (7)]. Во втором случае  $W(x')$ , где  $x' = x - l \text{tg } \beta$ , можно представить в виде

$$W(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left| \frac{1}{\delta} \int_{T'}^{T'+\delta l} dt' \varphi(t-t') \varphi(t+t') \right|^2, \quad (16)$$

здесь  $T' = x'/u_1 \sin \alpha$ . Из  $T'$  формулы (16) видно, что явление двулучепреломления приводит к уширению распределения  $W(x')$ , которое при  $\delta l \gg \tau$  стремится к прямоугольнику, простирающему на область значений  $T$  примерно от нуля до  $-\delta l$ .

### Заключение

Из приведенных выше примеров видно, что по виду функции можно судить о форме, величине и длительности сверхкоротких световых импульсов.



Для таких измерений могут быть использованы «нелинейные» призмы из кристаллов типа KDP( $\text{KH}_2\text{PO}_4$ ),  $\text{LiNbO}_3$  и др. [5]. В этом случае при приближении преломляющего угла призмы к  $180^\circ$  «временная разрешающая способность» резко возрастает. Область измерения длительности импульсов ограничена со стороны малых  $\tau$  дисперсионным расщеплением импульса ( $\omega$ ) и двулучепреломлением. Влияние двулучепреломления может быть исключено при распространении излучения на двойной частоте в направлении, нормальном к оптической оси кристалла. Со стороны больших  $\tau$  область измерения ограничена шириной фронта импульсов в кристалле.

#### Литература

- [1] С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов. Проблемы нелинейной оптики. Изд. АН СССР, М., 1964.
- [2] С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, А. С. Чиркин. ЖЭТФ, 55, 1430, 1968.
- [3] W. H. Glenn. IEEE, QE-5, 6, 284, 1969.
- [4] J. Comly, E. Garmire. Appl. Phys. Lett., 12, 7, 1968.
- [5] Г. В. Кривошеков, В. И. Строганов. В сб. «Нелинейные процессы в оптике». Изд. «Наука», Новосибирск, 1970.
- [6] H. P. Weber. Phys. Lett., 27a, 321, 1968.
- [7] J. A. Armstrong. Appl. Phys. Lett., 10, 16, 1967.
- [8] Н. Бломберген. Нелинейная оптика. Изд. «Мир», М., 1966.

Поступило в Редакцию 29 июля 1970 г.