

О СИНХРОНИЗАЦИИ МОД ПРИ ПОМОЩИ ОДНОПОЛОСНОЙ МОДУЛЯЦИИ

Н. А. Бродович

Исследован случай синхронизации продольных мод при однополосной модуляции газового лазера.

Возможность синхронизации мод лазера с однородным уширением при однополосной модуляции рассмотрена в работе [1]. В настоящей работе исследуется случай синхронизации продольных мод при однополосной модуляции газового лазера с неоднородным уширением.

При теоретическом изучении резонансной модуляции обычно рассматриваются два предельных случая — слабой и сильной модуляции [2]. В первом случае влияние модуляции на распределение интенсивностей между модами настолько мало, что амплитуды всех мод по-прежнему определяются усилением активной среды. Модуляция приводит к синхронизации частот межмодовых биений, установлению в стационарном режиме определенных соотношений между относительными фазами мод. Наоборот, при сильной модуляции все характеристики лазерного излучения (амплитуды, частоты и относительные фазы мод) целиком определяются модулирующим воздействием. В настоящей работе каких-либо ограничений на силу модуляции не накладывается.

Будем считать, что модуляция увеличивает частоту (в противном случае в формулах следует заменить индекс n на $-n$). Тогда основное уравнение в случае однополосной модуляции имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 X_n}{dt^2} + \frac{\nu_n}{Q_n} \frac{dX_n}{dt} + \Omega_n^2 X_n = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{d^2 P_n}{dt^2} + \Omega_n^2 \cos \omega_m t \frac{1}{n-1} \frac{dX_{n-1}}{dt}, \quad (1)$$

где X_n — напряженность электрического поля n -й моды; Q_n — добротность n -й моды резонатора (в дальнейшем будем считать, что добротности всех мод равны, т. е. $Q_n \equiv Q$); P_n — пространственная Фурье-компонента поляризации среды $P(z, t)$; ϵ_0 — проницаемость вакуума; β — параметр, характеризующий силу модуляции; ν_n — частота генерации n -й моды; Ω_n — собственная частота n -й моды резонатора; ω_m — частота модуляции.

Как и при обычной резонансной модуляции, частота модуляции определяется следующим образом:

$$\omega_m = \Omega_n - \Omega_{n-1} - \delta, \quad (2)$$

где δ — расстройка частоты модуляции относительно частоты межмодовых биений. Введение δ необходимо для компенсации затягивания и отталкивания мод, т. е. для достижения их эквидистантности.

Рассмотрение ведется в «доплеровском приближении» [3]. При этом влиянием комбинационных тонов можно пренебречь. Случай одной моды над порогом в отсутствие модуляции аналогичен случаю однополосной модуляции при однородном уширении. В настоящей работе рассмотрен случай, когда в отсутствие модуляции над порогом имеются две моды, расположенные по разные стороны от центра доплеровского контура.

В дальнейшем будем называть две ближайшие к центру атомной линии моды центральными с индексами 1 и 2. Случай трех мод над порогом в отсутствие модуляции не вносит принципиальных усложнений. Известно, что взаимодействие между модами максимально при симметричной настройке. Поскольку однополосная модуляция приводит к возбуждению «холодных» мод¹ только с одной стороны от центра линии атомного перехода, взаимодействие этих мод с единственной модой, расположенной по другую сторону от центра линии атомного перехода, можно пренебречь. В силу этого решение задачи нахождения режима синхронизации распадается на два этапа: 1) нахождение устойчивых решений уравнения (1) для центральных мод (в этом случае в уравнении (1) в поляризации удерживаются члены, описывающие взаимодействие этих мод); 2) нахождение устойчивых решений уравнения (1) для мод с индексом $n \geq 3$. На втором этапе члены, ответственные за межмодовое взаимодействие, опускаются. Представим поле n -й моды в виде

$$X_n = E'_n(t) \sin [\nu_n t + \varphi_n(t)], \quad (3)$$

где $E'_n(t)$ и $\varphi_n(t)$ — медленно меняющиеся за период оптических колебаний амплитуда и фаза электрического поля n -й моды. После подстановки (3) в (1) и введения безразмерных амплитуд и интенсивностей электрического поля по формулам

$$\left. \begin{aligned} E_n &= \frac{E'_n p}{\sqrt{2\hbar^2 \gamma_a \gamma_b}}, \\ I_n &= E_n^2, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где p — матричный элемент электрического дипольного момента по состояниям a и b , γ_a и γ_b — постоянные распада верхнего и нижнего уровней, получаем следующую систему уравнений для определения амплитуд и фаз центральных мод:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_1}{dt} &= \alpha_1 E_1 - \beta_1 E_1^3 - \theta_{12} E_1 E_2^2, \\ \frac{dE_2}{dt} &= \alpha_2 E_2 - \beta_2 E_2^3 - \theta_{21} E_2 E_1^2 + \beta E_1 \cos \Phi_1, \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= -(\nu_1 - \Omega_1 - \sigma_1) + \rho_1 E_1^2 + \tau_{12} E_2^2, \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= -(\nu_2 - \Omega_2 - \sigma_2) + \rho_2 E_2^2 + \tau_{21} E_1^2 - \beta \frac{E_1}{E_2} \sin \Phi_1, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где α_n , β_n , σ_n , ρ_n , θ_{12} , θ_{21} , τ_{12} , τ_{21} — коэффициенты, определяемые соответственно по формулам (85), (86), (90), (91), (109), (113), (124), (126) работы [3], $\Phi_1 = \varphi_1 - \varphi_2$.

Подстановка

$$I_1 = \frac{\alpha_1 - \theta_{12} I_2}{\beta_1} \quad (6)$$

и

$$\left. \begin{aligned} p &= \alpha_1 \frac{\theta_{21}}{\beta_1} - \alpha_2, \quad \chi_1 = \rho_1 - \tau_{21}, \\ q &= \beta_2 - \frac{\theta_{12} \theta_{21}}{\beta_1}, \quad \chi_2 = \rho_2 - \tau_{12}, \\ s &= \sigma_1 - \sigma_2 - \delta + \frac{\alpha_1 \chi_1}{\beta_1}, \\ t &= -\chi_2 - \frac{\theta_{12} \chi_1}{\beta_1} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

¹ «Холодные» моды — моды лазера, ненасыщенный коэффициент усиления которых меньше потерь.

в интересующем нас стационарном режиме ($\frac{dE_n}{dt} = \frac{d\varphi_n}{dt} = 0$) приводит к следующему кубическому уравнению для I_2 :

$$(q^2 + t^2) I_2^3 + 2(pq + st) I_2^2 + (p^2 + s^2 + \beta^2 \frac{\theta_{12}}{\beta_1}) I_2 - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \beta^2 = 0 \quad (8)$$

[I_1 находится по формуле (6)]. Полученные решения E_1 и E_2 исследовались на устойчивость. Условия устойчивости для центральных мод очень громоздки и мы их приводить не будем.

Система амплитудных и фазовых уравнений для последующих мод имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_n}{dt} &= \alpha_n E_n - \beta_n E_n^3 + \beta E_{n-1} \cos \Phi_{n-1}, \\ \frac{d\varphi_n}{dt} &= -(\nu_n - \Omega_n - \sigma_n) + \rho_n E_n^2 - \beta \frac{E_{n-1}}{E_n} \sin \Phi_{n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где $\Phi_n = \varphi_{n-1} - \varphi_n$, $n \geq 3$.

Аналогично предыдущему получаем следующее кубическое уравнение для определения интенсивностей мод:

$$(\beta_n^2 + \rho_n^2) I_n^3 - 2(\alpha_n \beta_n + \rho_n y_n) I_n^2 + (\alpha_n^2 + y_n^2) I_n - \beta^2 I_{n-1} = 0, \quad (10)$$

где

$$y_n = \rho_1 I_1 + \tau_{12} I_2 + \sigma_1 - \sigma_n - (n-1)\delta, \quad n \geq 3. \quad (11)$$

Уравнение (10) является рекуррентным соотношением для определения интенсивностей всех мод с индексом $n \geq 3$. Критерием устойчивости режима синхронизации (при устойчивости центральных мод) является выполнение следующих неравенств:

$$2\beta_n I_n - \alpha_n > 0, \quad (12a)$$

$$(\alpha_n - \beta_n I_n)(\alpha_n - 3\beta_n I_n) + (\rho_n I_n - y_n)(3\rho_n I_n - y_n) > 0. \quad (12b)$$

Поскольку ненасыщенный коэффициент усиления «холодных» мод отрицателен ($\alpha_n < 0$, $n \geq 3$), условие (12a) выполняется автоматически ввиду положительности β_n и I_n . Поэтому практически область устойчивости определяется неравенством (12b). Представляет интерес нахождение индекса граничной моды ($n_{гр.}$), начиная с которой все последующие моды будут заведомо устойчивы (в предположении, что все моды от первой до граничной устойчивы). Так как точное выражение для индекса такой моды слишком громоздко, дадим приближенную оценку этого индекса, считая, что для выполнения (12) достаточно выполнения условий

$$\alpha_n \leq 0, \quad y_n \leq 0, \quad n \equiv n_{гр.} \quad (13)$$

Из (11) и (13) следует, что индекс граничной моды $n_{гр.}$ равен целой части следующего выражения:

$$\frac{\rho_1 I_1 + \tau_{12} I_2 + \sigma_1 - \sigma_{n_{гр.}} + \delta}{\delta}. \quad (14)$$

Поскольку при больших n зависимость σ_n от n очень слабая, критерий (13) является довольно строгим. При условии

$$\alpha_n \beta_n + \rho_n y_n > 0 \quad (15)$$

уравнение (10) имеет один или три положительных корня. Все положительные корни уравнения (10) исследовались на устойчивость. При $n \geq n_{гр.}$ уравнение (10) имеет один положительный корень (интенсивность n -й моды). С другой стороны, при $n \geq n_{гр.}$ положительный корень всегда устойчив. Поэтому формально получается, что в режиме синхронизации имеется бесконечное число мод с конечной интенсивностью. Однако расчеты показывают, что интенсивность мод резко падает с увеличением индекса моды. Типичные величины относительных интенсивностей ($I_n / I_{n \max}$,

Таблица 1

n	$I_n/I_{n\max}$
1	$1.50 \cdot 10^{-1}$
2	1
3	$6.09 \cdot 10^{-1}$
4	$4.88 \cdot 10^{-2}$
5	$8.59 \cdot 10^{-4}$
6	$5.30 \cdot 10^{-6}$
7	$1.49 \cdot 10^{-8}$
8	$2.27 \cdot 10^{-11}$
9	$2.08 \cdot 10^{-14}$
10	$1.33 \cdot 10^{-17}$

Таблица 2

n	$I_{n\max}$			
	$\eta = 1.01$	$\eta = 1.02$	$\eta = 1.03$	$\eta = 1.04$
1-2	$2.11 \cdot 10^{-2}$	$5.84 \cdot 10^{-2}$	$9.46 \cdot 10^{-2}$	$1.30 \cdot 10^{-1}$
3	$1.03 \cdot 10^{-2}$	$3.48 \cdot 10^{-2}$	$6.26 \cdot 10^{-2}$	$9.09 \cdot 10^{-2}$
4	$5.42 \cdot 10^{-4}$	$2.24 \cdot 10^{-3}$	$4.99 \cdot 10^{-3}$	$9.08 \cdot 10^{-3}$
5	$7.03 \cdot 10^{-6}$	$3.35 \cdot 10^{-5}$	$7.98 \cdot 10^{-5}$	$1.61 \cdot 10^{-4}$
6	$2.40 \cdot 10^{-7}$	$3.83 \cdot 10^{-7}$	$4.59 \cdot 10^{-7}$	$9.34 \cdot 10^{-7}$
7	$7.76 \cdot 10^{-11}$	$4.64 \cdot 10^{-10}$	$1.21 \cdot 10^{-9}$	$2.56 \cdot 10^{-9}$
8	$9.75 \cdot 10^{-14}$	$6.38 \cdot 10^{-13}$	$1.71 \cdot 10^{-12}$	$3.73 \cdot 10^{-12}$
9	$7.52 \cdot 10^{-17}$	$5.35 \cdot 10^{-16}$	$1.47 \cdot 10^{-15}$	$3.26 \cdot 10^{-15}$

Примечание. $\eta = 1.02$, $\varepsilon = -0.5$, $\delta = 150$ кгц, $\beta^2 = 5 \cdot 10^{-4}$.

где $I_{n\max}$ — интенсивность моды с максимальной интенсивностью при фиксированной расстройке δ приведены в табл. 1. Анализ уравнений (5) и (9) показывает, что распределение энергии между модами зависит от знака $\cos \Phi_n$. При $\cos \Phi_n > 0$ происходит перекачка энергии из моды с индексом n в моду с индексом $n+1$, при $\cos \Phi_n < 0$ — из моды с индексом n в моду с индексом $n-1$, при $\cos \Phi_n < 0$ — из моды с индексом n в моду с индексом $n-1$. Так как мы рассматриваем случай, когда в отсутствие модуляции над порогом имеются две моды, то $\alpha_n < 0$ при $n \geq 3$, откуда следует, что $\cos \Phi_n > 0$ при $n \geq 2$, т. е. энергия всегда

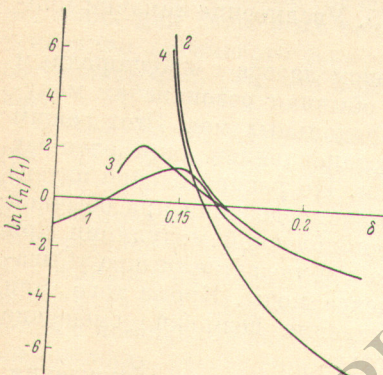


Рис. 1. Зависимость относительной интенсивности центральных мод и моды с индексом 3 от атомной расстройки ε и расстройки δ .

1 — $\varepsilon = -0.4$; 2 — $\varepsilon = -0.5$; 3 — $\varepsilon = -0.6$, $\eta = 1.02$, $\beta^2 = 5 \cdot 10^{-4}$; 4 — $\varepsilon = -0.5$, $\eta = 1.02$, $\beta^2 = 5 \cdot 10^{-6}$.

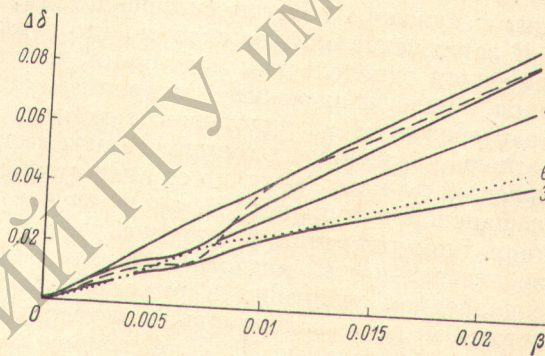


Рис. 2. Зависимость ширины области синхронизации от параметра модуляции β и атомной расстройки ε .

1 — $\varepsilon = -0.4$; 2 — $\varepsilon = -0.5$; 3 — $\varepsilon = -0.6$, $\eta = 1.02$; 4 — $\varepsilon = -0.4$; 5 — $\varepsilon = -0.5$; 6 — $\varepsilon = -0.6$, $\eta = 1.03$.

перекачивается из второй моды в моды с большим индексом. Сложнее обстоит дело с двумя центральными модами, ненасыщенный коэффициент усиления которых положителен. В этом случае знак $\cos \Phi_1$ определяется расстройкой δ . При $\cos \Phi_1 > 0$ происходит перекачка энергии из первой моды во вторую, а при $\cos \Phi_1 < 0$ — обратный процесс. При симметричной настройке относительная интенсивность центральных мод (I_2/I_1) целиком определяется модуляцией. При несимметричной настройке и сильной модуляции ($\beta^2 > 10^{-8}$) интенсивность центральных мод определяется как модуляцией, так и усилением активной среды. При слабой модуляции ($\beta^2 < 10^{-10}$) влияние модуляции на интенсивность центральных мод ничтожно мало и их интенсивность целиком определяется усилением активной среды. Зависимость относительной интенсивности центральных мод от расстройки δ и атомной расстройки ε ($\varepsilon = (\nu_1 - \omega)/\Delta\Omega$, где ω — частота линии атомного перехода, $\Delta\Omega$ — частота межмодовых

биений) представлена на рис. 1. Из рис. 1 видно, что однополосная модуляция может привести к смещению частоты моды с максимальной интенсивностью. Так, при $\epsilon=0.4$ (кривая 1) в отсутствие модуляции $I_2/I_1 < 1$, а при модуляции в некотором интервале расстройк $I_2/I_1 > 1$. Перераспределение энергии из-за модуляции может привести к превышению интенсивности «холодных» мод над интенсивностью одной из центральных мод. На рис. 1 приведена зависимость I_3/I_1 от расстройки δ при $\beta^2=5 \cdot 10^{-6}$ (кривая 4).

Поскольку интенсивности мод зависят от многих параметров (усиления активной среды, параметра модуляции β , расстройки δ , атомной расстройки ϵ и накачки η), выяснение зависимости интенсивностей мод от накачки представляет собой довольно сложную задачу. Представляется разумным сравнить максимальные в области синхронизации интенсивности мод при фиксированных параметрах и различных накачках. В табл. 2 приведены значения максимальных интенсивностей мод для четырех значений накачки. Очевидно, что интенсивности всех мод являются монотонно возрастающими функциями накачки.

Расчеты ширины области синхронизации показывают, что при больших значениях β ($\beta^2 > 10^{-6}$) наибольшая ширина области достигается при симметричной настройке. При слабой модуляции ($\beta^2 < 10^{-10}$) ширина области синхронизации максимальна при несимметричной настройке. Зависимость ширины области синхронизации от параметра модуляции β при трех различных атомных расстройках и двух значениях накачки представлена на рис. 2. При изменении β^2 от $5 \cdot 10^{-4}$ до 10^{-12} ширина области синхронизации сужается от десятков килогерц до нескольких герц. Расчеты показывают, что обычно $n_{гр.} \leq 5$. Увеличение накачки приводит к сужению области синхронизации.

В заключение следует сказать, что в газовом лазере с неоднородным уширением однополосная модуляция, как и обычная резонансная модуляция, приводит к режиму синхронизации продольных мод. Этот режим характеризуется эквидистантностью мод, установлением определенных соотношений между их амплитудами и фазами. Но распределение интенсивностей по модам отлично от аналогичного распределения при обычной резонансной модуляции. Как и в случае однополосной модуляции при однородном уширении, в данном случае также наблюдается резкое убывание интенсивностей мод с возрастанием индекса моды. Кроме того, при неоднородном уширении в режиме синхронизации возможно смещение частоты моды с максимальной интенсивностью.

Автор благодарен Н. Н. Розанову за многочисленные обсуждения.

Литература

- [1] Н. Н. Розанов. Опт. и спектр., 29, 5, 1970.
- [2] Л. Н. Магдич. ЖЭТФ, 51, 19, 1966.
- [3] W. E. Lamb. Phys. Rev., 134, A1429, 1964.

Поступило в Редакцию 16 октября 1970 г.