

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ЕГО ИНВАРИАНТНОСТЬ ДЛЯ МОДЕЛИ ОТКРЫТОЙ СЕТИ С ТРЕМЯ УЗЛАМИ

И.В. Гарбуза

В теории сетей массового обслуживания одним из главных предметов обсуждения является нахождение моделей с легко поддающимися обработке стационарными распределениями. К таким

моделям относятся марковская и полумарковская, которые рассмотрены в данном исследовании. Цель, которого является исследование стационарного распределения, представление стационарного распределения рассматриваемых сетей в виде произведения, установление достаточных условий эргодичности, доказательство инвариантности стационарного распределения сетей.

В работе рассматриваются три типа открытых сетей массового обслуживания с тремя узлами, изображенные на рисунке 1.

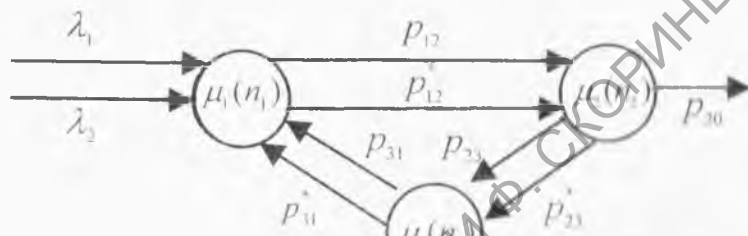


Рисунок 1.

Здесь λ_1, λ_2 – входящие простейшие потоки заявок с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно, $\mu_i(n_i)$, $i = 1, 2, 3$ – времена обслуживания заявок в i -ом узле, p_{ij} – вероятности перехода из узла i в j , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$.

Для марковской модели

$$\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = p_{12} = p_{23} = p_{31} = 0, p_{12} = p_{31} = 1, p_{20} = p_{32} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Времена обслуживания заявок в различных узлах независимы и имеют показательное распределение с параметром $\mu_i(n_i)$ для i -ого узла, где n_i – число заявок в i -ой системе, $i = 1, 2, 3$.

Дисциплины обслуживания заявок в системах сети FCFS.

Для полумарковской модели выполняется (1). $\mu_i(n_i) = \mu_i$ – заданы функцией распределения времени обслуживания i -ым прибором одной заявки $B_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, при этом налагается следующее требование $\mu_i^{-1} = \int_0^{\infty} t dB_i(t)$. Дисциплины обслуживания

LCFS PR.

Для марковской модели с разнотипными заявками $\lambda_1 = \lambda^+$, $\lambda_2 = \lambda^-$, $p_{12} = \frac{2}{3}$, $p_{12}^* = \frac{1}{3}$, $p_{20} = \frac{1}{2}$, $p_{21} = p_{21}^* = \frac{1}{4}$, $p_{32} = p_{32}^* = \frac{1}{2}$. Времена обслуживания заявок в различных узлах независимы и имеют показательное распределение с параметрами $\mu_i(n_i) = \mu_i$ для i -ого узла, μ_i - константа ($i = 1, 2, 3$). Заявки поступают двух типов: положительные и отрицательные.

Методика проведения исследования следующая:

1) Для марковской модели составляем уравнения глобального равновесия. Для отыскания стационарных вероятностей составляем линейные уравнения трафика, которые имеют единственное положительное решение. Рассматриваем изолированный узел и находим стационарное распределение для такого изолированного процесса. По теореме Джексона из [1], стационарное распределение представимо в форме произведения множителей характеризующих узлы; каждый множитель есть стационарное распределение узла. Условия эргодичности устанавливаем на основании теоремы Фостера [2].

2) Для полумарковской модели составляем дифференциально-разностные уравнения Колмогорова. Поиск решения данных уравнений аналитически сложен. Опытным путём находим решение и проверяем найденное решение непосредственной подстановкой в дифференциально-разностные уравнения Колмогорова. В результате данное решение удовлетворяет уравнениям. Согласно результату Севастьянова [3], стационарное распределение сохраняет форму произведения (инвариантно) и при введенных допущениях.

3) Для марковской модели с разнотипными заявками составляем уравнения равновесия. Уравнения трафика для такой модели нелинейные и имеют вид квадратного уравнения, которое имеет одно положительное решение. Находим стационарное распределение для изолированного узла. Предполагаем, что стационарное распределение сети представимо в форме произведения. Проверяем наше предположение путём подстановки стационарного распределения в уравнения равновесия. В результате убеждаемся, что стационарное распределение представимо в форме произведения. Достаточное условие эргодичности следует из уравнений трафика.

Результаты исследования: для всех рассмотренных моделей стационарное распределение представимо в форме произведения множителей характеризующих узлы. Установлены достаточные условия эргодичности и доказана инвариантность.

1. Малинковский Ю.В. Теория массового обслуживания. – Гомель: БелГУТ. 1998. – 100 с.

2. Буриков А.Д., Малинковский Ю.В., Матальцкий М.А. Теория массового обслуживания. – Гродно: ГрГУ. 1984. – 108 с.

3. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука. 1966. – 431 с.