ПРОЕКТОРЫ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ $\mathfrak{N}_\pi$-РАЗЛОЖИМЫХ ГРУПП

Е.А. Рябченко

В 1958 году Виландт [1] ввел следующее понятие. Подгруппа H группы $G=AB$ называется факторизуемой в $G=AB$, если $H=(A\cap H)(B\cap H)$ и $A\cap B\subseteq H$.

В работе [2] Хайнекен исследовал факторизуемые $\mathfrak{F}$-проекторы в конечных группах $G=AB$, где A и B – нильпотентные подгруппы группы G для случая, когда $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. В 1994 году Амберг и Хёфлинг [3] распространили основной результат Хайнекена на классы Шунка конечных групп.

В настоящей работе исследуются факторизуемые $\mathfrak{X}$-проекторы конечных разрешимых ди-$\mathfrak{N}_\pi$-разложимых групп, т.е. групп вида $G=AB$, где A и B – $\mathfrak{N}_\pi$-разложимые подгруппы группы G. Напомним, что группа G называется $\mathfrak{N}_\pi$-разложимой, если $G = G_\pi \times G_{\pi'}$, где G_π – нильпотентная холлова π-подгруппа, а $G_{\pi'}$ – холлова π'-подгруппа группы G.

Рассматриваются только конечные разрешимые группы.

Т е о р е м а. *Пусть π – некоторое множество простых чисел, а $\mathfrak{X}$ – π-класс Шунка. Если $G=AB$ – ди-$\mathfrak{N}_\pi$-разложимая группа, причем $\pi(A)\cup\pi(B)\subseteq char\ \mathfrak{X}$, то в группе G имеется хотя бы один факторизуемый $\mathfrak{X}$-проектор.*

Так как всякая насыщенная формация является классом Шунка, то справедливо следующее:

С л е д с т в и е 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, причем $\mathfrak{F}=\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{F}$. Если $G=AB$ – ди-$\mathfrak{N}_\pi$-разложимая группа, причем $\pi(A)\cup\pi(B)\subseteq char\,\mathfrak{X}$, то в G имеется хотя бы один факторизуемый $\mathfrak{X}$-проектор.*

Напомним [4], что π-нильпотентная подгруппа S группы G называется π-картеровой подгруппой, если $S=N_G(S)$ и S содержит некоторую холлову π'-подгруппу группы G.

С л е д с т в и е 2. *Пусть $G=AB$ – ди-$\mathfrak{N}_\pi$-разложимая группа. Тогда в G имеется хотя бы одна π-картерова подгруппа факторизуемая в $G=AB$.*

Согласно [4], π-сверхразрешимая подгруппа S группы G называется π-гашюцевой подгруппой, если S содержит некоторую холлову π'-подгруппу группы G и для любых подгрупп N и M таких, что $S\subseteq N\subseteq M\subseteq G$ индекс $|M:N|$ есть составное число.

С л е д с т в и е 3. *Пусть $G=AB$ – ди-$\mathfrak{N}_\pi$-разложимая группа. Тогда в G имеется по крайне мере одна π-гашюцева подгруппа факторизуемая в $G=AB$.*

В статье используются обозначения и терминология из [5, 6].

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторый класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-проектором группы G, если выполнены следующие условия: 1) $H\in\mathfrak{F}$; 2) из $H\subseteq U\subseteq G$ и $U/U_0\in\mathfrak{F}$ всегда следует $HU_0=U$. Классом Шунка называется класс групп, который одновременно замкнут относительно взятия факторгрупп и является примитивно замкнутым классом. Если $\mathfrak{X}$ – класс Шунка, то в любой группе существуют $\mathfrak{X}$-проекторы и любые два из них сопряже ны [7]. Отметим следующий специальный случай. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Класс Шунка $\mathfrak{X}$ называется π-классом Шунка, если $\mathfrak{X}=\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{X}$.

Л е м м а 1 [4]. *Пусть $\mathfrak{X}$ – π-класс Шунка. Тогда любой $\mathfrak{X}$-проектор содержит некоторую холлову π'-подгруппу.*

Л е м м а 2 [8]. *Пусть $G=AB$ – ненильпотентная группа, где A и B – p-разложимые подгруппы группы G. Если G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, где $p\in\pi(N)$ и $\Phi(G)=1$, то $N\subseteq A\cup B$ и, если $N\subseteq A$, то A является силовской p-подгруппой, а B – холловой p'-подгруппой.*

Л е м м а 3 [3]. *Пусть $G=AB$, где A и B – ее подгруппы взаимно простых порядков. Тогда для каждой подгруппы S группы G найдется $g\in G$ такой, что S^g факторизуема в $G=AB$.*

Л е м м а 4 [4]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех π-нильпотентных групп. Для любой группы множество всех $\mathfrak{F}$-проекторов и π-картеровых подгрупп совпадает.*

Л е м м а 5 [4]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех π-сверхразрешимых групп. Для любой группы множество всех $\mathfrak{F}$-проекторов и π-гашюцевых подгрупп совпадает.*

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы . Предположим, что теорема не верна. Пусть $G=AB$ – ди-$\mathfrak{N}_\pi$-разложимая группа такая, что любой $\mathfrak{X}$-проектор группы G не факторизуется в $G=AB$. Ясно, что группа G не принадлежит $\mathfrak{X}$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда для факторгруппы $G/N=AN/N\cdot BN/N$ утверждение теоремы выполняется. Следовательно, существует L/N – $\mathfrak{X}$-проектор группы G/N, который факторизуется в $G/N=AN/N\cdot BN/N$, то есть
$N/N\cap BN/N\subseteq L/N$ и
$L/N=(AN/N\cap L/N)(BN/N\cap L/N)=(AN\cap L/N)(BN\cap L/N)$.
Отсюда следует, что $A\cap B\subseteq AN\cap BN\subseteq L$ и $L=(AN\cap L)(BN\cap L)$. По [7, A, 1.2] $L=ANL\cap BNL=AL\cap BL$. Откуда опять по [7, A, 1.2] $L=(A\cap L)(B\cap L)$, т.е. L факторизуется в $G=AB$.

Пусть H – некоторый $\mathfrak{X}$-проектор группы L. Тогда по лемме 15.1 из [6] H является $\mathfrak{X}$-проектором группы G и $HN=L$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $L\neq G$. Тогда $L=(A\cap L)(B\cap L)$ – ди $\mathfrak{N}_\pi$-разложимая группа и для L все условия теоремы выполняются. Поэтому най-

дется такой $x \in L$, что H^x – факторизуемый $\mathfrak{X}$-проектор группы L, т.е. $(A \cap L) \cap (B \cap L) = A \cap B \subseteq H^x$ и

$H^x = (H^x \cap A \cap L)(H^x \cap B \cap L) = (H^x \cap A)(H^x \cap B)$. Следовательно, H^x – факторизуемый $\mathfrak{X}$-проектор в $G=AB$.

2. Пусть $HN = G$ для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G и любого $\mathfrak{X}$-проектора H группы G. Так как $H \in \mathfrak{X}$, то $G/N \in \mathfrak{X}$.

Если G – не примитивная группа, то ее любая примитивная факторгруппа принадлежит $\mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{X}$ – класс Шунка, то $G \in \mathfrak{X}$ и G является своим $\mathfrak{X}$-проектором. Получили противоречие с выбором G.

Пусть G – примитивная группа. Тогда по теореме Бэра из [7] G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N такую, что N - p-группа, p – некоторое простое число, а $N = C_G(N) = F(G)$ и $G = [N]M$, где M - некоторая максимальная подгруппа группы G. Ясно, что $M \in \mathfrak{X}$ и M является $\mathfrak{X}$-проектором группы G.

Пусть $p \in \pi'$. Тогда из того, что $\mathfrak{X}$ –π-класс Шунка, следует $G \in \mathfrak{X}$. Противоречие с выбором G.

Остается принять, что $p \in \pi$. По лемме 2 можно считать, что A является силовской p-подгруппой, а B – холловой p'-подгруппой в G. Следовательно, $(|A|,|B|)=1$. По лемме 3 найдется $x \in G$, такой что M^x факторизуется в $G=AB$. Теорема доказана.

Следствия 2 и 3 вытекают из теоремы и лемм 4 и 5 соответственно.

1. Wielandt H. Uber Produkte von nilpotenten Gruppen // Ill J Math. – 1958. – Bd. 2. – № 4 B. – S. 611-618.

2. Heineken H. Products of finite nilpotent groups // Math. Ann. – 1990. – V. 287. – P. 643-652.

3. Amberg B., Hofling B. On finite products of nilpotent groups // Arch Math. – 1994. – V. 63. – P. 1-8.

4. Островская Т.И. О проекторах π-разрешимых групп // Вопросы алгебры. – 1985. – Вып. 1. – С. 57-62.

5. Amberg B., Franciosi S., de Giovanni F. Products of Groups. Clarendon. Oxford. 1992.

6. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. – М., 1978

7. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin-New York, 1992.

8. Васильев А.Ф. Новые свойства конечных динильпотентных групп // Весці НАН Беларуси. Весці НАН Беларусі. Сер.фіз.-мат. навук. – 2004. – № 2. С. 39-43.