Ю. А. Гришечкин, В. Н. Капшай
УО «Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

РЕШЕНИЯ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ БИИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Введение

В данной работе рассмотрено распространение плоских монохроматических электромагнитных волн в движущейся биизотропной среде. Получено дисперсионное уравнение и найдены его точные решения.

Пусть биизотропная среда движется в инерциальной системе отсчёта K с постоянной скоростью $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор, определяющий направление движения среды. Заданные в системе покоя среды K' векторные величины будем обозначать штрихами, а в лабораторной системе отсчёта K будем записывать без штрихов. В системе отсчёта K' материальные уравнения биизотропной среды в системе единиц Хевисайда-Лоренца имеют вид [1]

$$\boldsymbol{D}' = \varepsilon \boldsymbol{E}' + \xi \boldsymbol{H}'; \quad \boldsymbol{B}' = \xi^* \boldsymbol{E}' + \mu \boldsymbol{H}'; \quad \xi = \chi + i\alpha, \tag{1}$$

где ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемость среды соответственно, χ – параметр Теллегена, α – киральный параметр, символом «*» обозначена операция комплексного сопряжения.

1. Дисперсионное уравнение для движущейся биизотропной среды

Выразим из уравнений (1) векторы электрической индукции $\boldsymbol{D}'$ и магнитной напряжённости $\boldsymbol{H}'$ через векторы электрической напряжённости $\boldsymbol{E}'$ и магнитной индукции $\boldsymbol{B}'$ и представим полученные равенства в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}' \\ \boldsymbol{H}' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon - |\xi|^2/\mu & \xi/\mu \\ -\xi^*/\mu & 1/\mu \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}' \\ \boldsymbol{B}' \end{bmatrix}. \tag{2}$$

При переходе из лабораторной системы отсчёта в систему покоя законы преобразования векторов электромагнитного поля имеют вид [2]

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}' \\ \boldsymbol{H}' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & \beta\gamma\,\boldsymbol{\tau}^{\times} \\ -\beta\gamma\,\boldsymbol{\tau}^{\times} & \Lambda \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}' \\ \boldsymbol{B}' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & \beta\gamma\,\boldsymbol{\tau}^{\times} \\ -\beta\gamma\,\boldsymbol{\tau}^{\times} & \Lambda \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

В выражениях (3) использованы следующие обозначения: $\beta = V/c$, c – скорость электромагнитной волны в вакууме, $\gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$, $\Lambda = \gamma + (1-\gamma)(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\tau})$ – матрица размера 3×3, символом «$\circ$» обозначена операция тензорного произведения, $\boldsymbol{\tau}^{\times}$ – дуальный вектору $\boldsymbol{\tau}$ тензор, компоненты которого определяются по формуле $(\boldsymbol{\tau}^{\times})_{nm} = \varepsilon_{nkm}\tau_k$, где ε_{nkm} – компоненты псевдотензора Леви-Чивиты. Из уравнений (2) с учётом преобразований (3) получим материальные уравнения для движущейся в инерциальной системе отсчёта K биизотропной среды

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P & L \\ M & Q \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered} P = \mu^{-1}\gamma^2\left[\varepsilon\mu - |\xi|^2 - \beta^2 - \beta^2\left(\varepsilon\mu - |\xi|^2 - 1\right)(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\tau}) - 2i\alpha\beta\,\boldsymbol{\tau}^{\times}\right]; \\ L = \mu^{-1}\gamma^2\left[\xi - \beta^2\xi^* - 2i\alpha\beta^2(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\tau}) + \left(\varepsilon\mu - |\xi|^2 - 1\right)\beta\boldsymbol{\tau}^{\times}\right]; \qquad (5) \\ M = \mu^{-1}\gamma^2\left[\beta^2\xi - \xi^* - 2i\alpha\beta^2(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\tau}) + \left(\varepsilon\mu - |\xi|^2 - 1\right)\beta\boldsymbol{\tau}^{\times}\right]; \\ Q = \mu^{-1}\gamma^2\left[1 - \beta^2\left(\varepsilon\mu - |\xi|^2\right) + \left(\varepsilon\mu - |\xi|^2 - 1\right)\beta^2(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\tau}) + 2i\alpha\beta\boldsymbol{\tau}^{\times}\right]. \end{gathered}$$

Материальные уравнения (4) содержат шестимерные векторы и матрицу размера 6×6, состоящую из блоков – матриц P, L, M, Q размера 3×3. Выражения (5) были получены с учётом свойств матриц Λ и $\boldsymbol{\tau}^{\times}$:

$$\boldsymbol{\tau}^{\times}\Lambda = \Lambda\boldsymbol{\tau}^{\times} = \gamma\,\boldsymbol{\tau}^{\times}; \qquad \boldsymbol{\tau}^{\times}\boldsymbol{\tau}^{\times} = \boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\tau} - 1; \qquad \Lambda^2 = \gamma^2\left(1 - \beta^2(\boldsymbol{\tau}\circ\boldsymbol{\tau})\right). \quad (6)$$

Нетрудно убедится, что матрицы P, L, M, Q удовлетворяют условиям

$$P^+ = P; \qquad Q^+ = Q; \; (iL)^+ = iM, \quad (7)$$

где символом «+» обозначена операция эрмитова сопряжения.

Рассмотрим распространение в движущейся биизотропной среде плоских монохроматических волн

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_0 \\ \boldsymbol{H}_0 \end{bmatrix} \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t); \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_0 \\ \boldsymbol{B}_0 \end{bmatrix} \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t). \quad (8)$$

Подставляя выражения (8) в уравнения Максвелла без источников, получим алгебраические уравнения

$$n_0(i\,\boldsymbol{n})^{\times}\boldsymbol{H} = -i\boldsymbol{D}; \qquad n_0(i\,\boldsymbol{n})^{\times}\boldsymbol{E} = i\boldsymbol{B}, \quad (9)$$

в которых единичный вектор $\boldsymbol{n}$ связан с волновым вектором $\boldsymbol{k}$ согласно выражению $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{n}\,\omega n_0 / c$ и введено обозначение для показателя преломления n_0. Используя (9), исключим векторы $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ из системы уравнений (4). Исключая затем и вектор $\boldsymbol{H}$, получим следующее алгебраическое уравнение для вектора $\boldsymbol{E}$:

$$\left[P - iL(i\boldsymbol{n}^{\times})n_0 - (i\boldsymbol{n}^{\times})(iL)^{+} n_0 - (i\boldsymbol{n}^{\times})Q(i\boldsymbol{n}^{\times})n_0^2 \right]\boldsymbol{E} = 0. \quad (10)$$

При записи уравнения (10) мы также учли третье из равенств (7). Из (10) следует, что дисперсионное уравнение для величины n_0 имеет форму

$$\det\left[P - iL(i\boldsymbol{n}^{\times})n_0 - (i\boldsymbol{n}^{\times})(iL)^{+} n_0 - (i\boldsymbol{n}^{\times})Q(i\boldsymbol{n}^{\times})n_0^2 \right] = 0. \quad (11)$$

В случае произвольного направления распространения волны относительно направления движения среды вычисление определителя в (11) и решение полученного в результате алгебраического уравнения четвёртой степени относительно величины n_0 – весьма громоздкая задача. В следующем разделе с целью упрощения её решения мы преобразуем матрицу, входящую в уравнения (10) и (11).

2. Решение дисперсионного уравнения

Преобразуем уравнение (10) к следующей форме:

$$\mu^{-1}\gamma^2\left[B_{-1}+(\boldsymbol{in}^{\times})A_{-1}n_0\right]\left[B_{+1}-A_{+1}(\boldsymbol{in}^{\times})n_0\right]\boldsymbol{E}=0, \tag{12}$$

где введены обозначения

$$A_{+1}=1-\beta+\beta n_{+1}(i\boldsymbol{\tau}^{\times})+\beta(i\boldsymbol{\tau}^{\times})^2;\ A_{-1}=1+\beta-\beta n_{-1}(i\boldsymbol{\tau}^{\times})-\beta(i\boldsymbol{\tau}^{\times})^2, \tag{13}$$
$$B_{+1}=n_{+1}(1-\beta)+\beta(i\boldsymbol{\tau}^{\times})+\beta n_{+1}(i\boldsymbol{\tau}^{\times})^2;$$
$$B_{-1}=n_{-1}(1+\beta)-\beta(i\boldsymbol{\tau}^{\times})-\beta n_{-1}(i\boldsymbol{\tau}^{\times})^2.$$

Величины $n_{\pm1}$ в выражениях (13) определены по формулам [3]

$$n_{+1}=\sqrt{\varepsilon\mu-\chi^2}+\alpha;\ n_{-1}=\sqrt{\varepsilon\mu-\chi^2}-\alpha \tag{14}$$

и являются показателями преломления для неподвижной биизотропной среды, в которой распространяется плоская монохроматическая волна – правоциркулярно поляризованная и левоциркулярно поляризованная соответственно. Таким образом, дисперсионное уравнение (11) расщепляется на два уравнения:

$$\det\left[B_{-1}+(\boldsymbol{in}^{\times})A_{-1}n_0\right]=0;\quad \det\left[B_{+1}-A_{+1}(\boldsymbol{in}^{\times})n_0\right]=0. \tag{15}$$

С целью упрощения нахождения определителей воспользуемся следующей формулой [4]:

$$\det(a+b)=\det(a)+\det(b)+\mathrm{tr}(\bar{a}b)+\mathrm{tr}(a\bar{b}), \tag{16}$$

в которой a и b – некоторые матрицы одинакового размера, символом «tr(...)» обозначена операция нахождения следа матрицы, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – взаимные матрицы, определяемые по формуле [4]

$$\bar{a}_{ck}=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\varepsilon_{dfk}a_{da}a_{fb}. \tag{17}$$

Применение формулы (16) к первому из уравнений (15) приводит к следующему равенству:

$$\det(B_{-1})+\det(\boldsymbol{in}^{\times})\det(A_{-1}n_0)+\mathrm{tr}\left((\overline{B_{-1}})(\boldsymbol{in}^{\times})A_{-1}n_0\right)+\mathrm{tr}\left(B_{-1}(\overline{(\boldsymbol{in}^{\times})A_{-1}n_0})\right)=0. \tag{18}$$

Учитывая, что $\det\left(i\boldsymbol{n}^{\times}\right)=0$, а также свойство следа матрицы $\mathrm{tr}(\alpha M)=\alpha\cdot\mathrm{tr}(M)$ [4], где α – константа, упростим уравнение (18) и представим его в форме

$$\det\left(B_{-1}\right)+\mathrm{tr}\left((\overline{B_{-1}})(i\boldsymbol{n}^{\times})A_{-1}\right)n_0+\mathrm{tr}\left(B_{-1}(\overline{(i\boldsymbol{n}^{\times})A_{-1}})\right)n_0^2=0. \qquad (19)$$

Входящие в уравнение (19) величины имеют вид

$$\mathrm{tr}\left(B_{-1}(\overline{(i\boldsymbol{n}^{\times})A_{-1}})\right)=-(1+\beta)n_{-1}\left[1-\beta^2-\beta^2\left(n_{-1}^2-1\right)(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n})^2\right]; \qquad (20)$$
$$\mathrm{tr}\left((\overline{B_{-1}})(i\boldsymbol{n}^{\times})A_{-1}\right)=-2\beta n_{-1}(1+\beta)\left(n_{-1}^2-1\right)(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n});$$
$$\det\left(B_{-1}\right)=n_{-1}(1+\beta)\left(n_{-1}^2-\beta^2\right).$$

При получении выражений (20) были использованы формулы (16) и (17). С учётом (20) представим уравнение (19) в виде

$$\left[1-\beta^2-\beta^2\left(n_{-1}^2-1\right)(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n})^2\right]n_0^2+2\beta\left(n_{-1}^2-1\right)(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n})n_0-\left(n_{-1}^2-\beta^2\right)=0. \quad (21)$$

Аналогичным образом может быть преобразовано второе из уравнений (15). Результат имеет форму

$$\left[1-\beta^2-\beta^2\left(n_{+1}^2-1\right)(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n})^2\right]n_0^2+2\beta\left(n_{+1}^2-1\right)(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n})n_0-\left(n_{+1}^2-\beta^2\right)=0. \quad (22)$$

Решения уравнений (21) и (22) представим в следующем виде:

$$n_{0(\nu)}=\frac{-\beta\left(n_\nu^2-1\right)(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n})\pm\left[\left(1-\beta^2\right)\left(n_\nu^2-\beta^2-\beta^2\left(n_\nu^2-1\right)(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n})^2\right)\right]^{1/2}}{1-\beta^2-\beta^2\left(n_\nu^2-1\right)(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n})^2}, \qquad (23)$$

где значение индекса $\nu=-1$ соответствует решениям уравнения (21), а значение индекса $\nu=+1$ – решениям уравнения (22).

Заключение

Таким образом, в данной работе получено дисперсионное уравнение в случае распространения плоской монохроматической волны в движущейся биизотропной среде в произвольном направлении относительно направления движения среды. Найдены точные решения этого уравнения.

Литература

1. Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media / I. V. Lindell [et al.]. – Boston and London: Artech House, 1994. – 500 pp.

2. Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 4-е изд. – Москва: Физматлит, 2005. – Т. 8: Электродинамика сплошных сред. – 656 с.

3. Капшай, В. Н. Рассеяние электромагнитных волн на биизотропном шаре в биизотропной среде / В. Н. Капшай, В. В. Кондратюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 7–21.

4. Фёдоров, Ф. И. Теория гиротропии / Ф. И. Фёдоров. – Минск: Наука и техника, 1976. – 456 с.