

ТЕОРИЯ ИНТЕРФЕРОМЕТРА ФАБРИ—ПЕРО С ЗЕРКАЛАМИ В ВИДЕ ПЛОСКИХ РЕШЕТОК ДЛЯ НАКЛОННО ПАДАЮЩЕЙ ВОЛНЫ

В. Б. Казанский, Л. Н. Литвиненко и С. Л. Пресвириш

На основе строгого решения задачи дифракции проведено теоретическое исследование интерферометров Фабри—Перо с зеркалами из периодически расположенных металлических лент при наклонном падении плоской электромагнитной волны. Обнаружены весьма узкие интерференционные максимумы прохождения волны при изменении угла падения. Зависимости, определяющие положение резонансов, коэффициент прозрачности, разрешающую способность системы как функции параметров интерферометра, представлены в виде удобных для анализа и инженерных расчетов аналитических формул.

Интерферометры Фабри—Перо с зеркалами в виде плоских ленточных решеток находят широкое применение в физических исследованиях. Теория таких приборов для нормально падающей волны в случае, когда расстояние между зеркалами велико, разработана [1] и находится в хорошем согласии с экспериментом [2].

Мы рассмотрим здесь свойства интерферометра при наклонном падении плоской электромагнитной волны двух поляризаций (с векторами E или H , параллельными лентам решеток), основываясь на строгом решении соответствующей дифракционной задачи. Строгое решение дает возможность определить область применимости и оценить погрешность приближенных формул. Анализ решения, проведенный для одноволнового случая (когда высшие дифракционные гармоники полей у решеток экспоненциально затухают по мере удаления от плоскости зеркала), позволил обнаружить весьма узкие интерференционные максимумы прохождения волны при изменении угла падения. Это важное свойство может быть успешно использовано в метрологической практике.

Постановка задачи. Решение

Исследуемая структура состоит из двух идентичных безграничных плоских металлических решеток, расположенных в плоскостях $z=0$ и $z=-a$ таким образом, что идеально проводящие и бесконечно тонкие металлические ленты решеток находятся строго одна под другой. Металлические ленты параллельны оси Ox и расположены с периодом l в направлении оси Oy . Начало координат выбрано посередине одной из щелей на верхней решетке (ширина щелей равна d).

Плоская электромагнитная волна единичной амплитуды из полупространства $z > 0$ падает на решетку под углом α , отсчитываемым от оси Oz . Будем рассматривать два вида поляризации волн: волну, у которой вектор E параллелен краю ленты, назовем E -поляризованной, а волну, у которой вектор H параллелен краю ленты, — H -поляризованной (зависимость от времени всюду подразумевается в виде $e^{-i\omega t}$).

Учитывая периодичность структуры вдоль оси Oy , дифрагированные поля для случаев E - и H -поляризаций можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} E^{(1)} \\ H^{(1)} \end{array} \right\} &= e^{i(-\gamma_0 z + h_0 y)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} A_n \\ a_n \end{array} \right\} e^{i(\gamma_n z + h_n y)}, & z > 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} E^{(2)} \\ H^{(2)} \end{array} \right\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left\{ \begin{array}{l} B_n \\ b_n \end{array} \right\} e^{-i\gamma_n z} + \left\{ \begin{array}{l} C_n \\ c_n \end{array} \right\} e^{i\gamma_n(z+a)} \right] e^{i h_n y}, & -a < z < 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} E^{(3)} \\ H^{(3)} \end{array} \right\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} D_n \\ d_n \end{array} \right\} e^{-i\gamma_n(z+a) + i h_n y}, & z < -a, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - h_n^2}, \quad h_n = k \sin \alpha + \frac{2\pi n}{l}. \quad (2)$$

Под значением \sqrt{A} в (2) подразумевается ветвь корня, у которой $\text{Im} \sqrt{A} > 0$, если $\text{Im} \sqrt{A} = 0$, то $\text{Re} \sqrt{A} > 0$.

Неизвестные коэффициенты Фурье в выражениях полей (1) находятся из соответствующих граничных условий. Непрерывность тангенциальных составляющих электрического поля в плоскостях $z=0$ и $z=-a$ позволяет получить следующие соотношения между амплитудами волн пространственного спектра:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{0n} + A_n &= B_n + C_n e^{i\gamma_n a}, & D_n &= B_n e^{i\gamma_n a} + C_n, \\ -\delta_{0n} + a_n &= -b_n + c_n e^{i\gamma_n a}, & d_n &= b_n e^{i\gamma_n a} - c_n. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Как показано в [3-5], определение искомых амплитуд поля для данной задачи может быть сведено к решению следующих бесконечных систем линейных неоднородных алгебраических уравнений для E -поляризации:

$$\left. \begin{aligned} iz \cos \alpha \tilde{W}_\sigma^0 &= x_0 \frac{\tilde{R}_\sigma}{R_0} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \varepsilon_n \frac{|\nu+n|}{\nu+n} \tilde{W}_\sigma^n - 2 \sum_{n=1}^{-j} x_n \tilde{W}_\sigma^n, \\ iz \cos \alpha W_m^0 &= x_0 \frac{R_m}{R_0} - x_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \varepsilon_n \frac{|\nu+n|}{\nu+n} W_m^n - 2 \sum_{n=1}^{-j} x_n W_m^n, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} iz \cos \alpha \tilde{W}_\sigma^0 &= y_0 \frac{\tilde{R}_\sigma}{R_0} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \delta_n \frac{|\nu+n|}{\nu+n} \tilde{W}_\sigma^n - 2 \sum_{n=1}^{-j} y_n \tilde{W}_\sigma^n, \\ iz \cos \alpha W_m^0 &= y_0 \frac{R_m}{R_0} - y_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \delta_n \frac{|\nu+n|}{\nu+n} W_m^n - 2 \sum_{n=1}^{-j} y_n W_m^n, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

($m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$);

для H -поляризации:

$$\left. \begin{aligned} -iz \sin \alpha F_0 \tilde{W}_\sigma^0 &= x'_0 \frac{\tilde{R}_\sigma}{R_0} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x'_n \varepsilon'_n \frac{|\nu+n|}{\nu+n} \tilde{W}_\sigma^n - 2 \sum_{n=1}^{-j} x'_n \tilde{W}_\sigma^n, \\ -iz \sin \alpha F_0 W_m^0 &= x'_0 \frac{R_m}{R_0} - x'_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x'_n \varepsilon'_n \frac{|\nu+n|}{\nu+n} W_m^n - 2 \sum_{n=1}^{-j} x'_n W_m^n, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} -iz \sin \alpha f_0 \tilde{W}_\sigma^0 &= y'_0 \frac{\tilde{R}_\sigma}{R_0} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} y'_n \delta'_n \frac{|\nu+n|}{\nu+n} \tilde{W}_\sigma^n - 2 \sum_{n=1}^{-j} y'_n \tilde{W}_\sigma^n, \\ -iz \sin \alpha f_0 W_m^0 &= y'_0 \frac{R_m}{R_0} - y'_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} y'_n \delta'_n \frac{|\nu+n|}{\nu+n} W_m^n - 2 \sum_{n=1}^{-j} y'_n W_m^n, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

($m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$).

$\tilde{W}_\sigma^n = \tilde{V}_\sigma^n - V_0^n \frac{\tilde{R}_\sigma}{R_0}$, $W_m^n = V_m^n - V_0^n \frac{R_m}{R_0}$ — функции, выраженные в [3, 6] через полиномы и функции Лежандра, аргументом которых служит коэффициент заполнения решетки $u = \cos \frac{\pi d}{l}$ в случае E -поляризации и $(-u)$ в случае H -поляризации; j — целая часть величины $\nu = \kappa \sin \alpha$, $\kappa = kl/2\pi$;

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_n &= 1 + i \frac{\sqrt{\frac{\kappa^2}{(\nu+n)^2} - 1}}{1 + e^{i\gamma n \alpha}}, & \delta_n &= 1 + i \frac{\sqrt{\frac{\kappa^2}{(\nu+n)^2} - 1}}{1 - e^{i\gamma n \alpha}}, \\ F_n &= (1 - e^{i\gamma n \alpha}) \sqrt{\frac{\kappa^2}{(\nu+n)^2} - 1}, & f_n &= (1 + e^{i\gamma n \alpha}) \sqrt{\frac{\kappa^2}{(\nu+n)^2} - 1}, \\ \varepsilon'_n &= 1 + iF_n, & \delta'_n &= 1 + if_n. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Амплитуды волн дифрагированного поля связаны с неизвестными x_n , y_n , x'_n , y'_n следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} B_n &= \frac{1}{2(\nu+n)} \left(\frac{x_n}{1 + e^{i\gamma n \alpha}} + \frac{y_n}{1 - e^{i\gamma n \alpha}} \right), \\ C_n &= \frac{1}{2(\nu+n)} \left(\frac{x_n}{1 + e^{i\gamma n \alpha}} - \frac{y_n}{1 - e^{i\gamma n \alpha}} \right), \\ b_n &= \frac{1}{2(\nu+n)} (x'_n + y'_n) + \delta_{0n}, & c_n &= \frac{1}{2(\nu+n)} (x'_n - y'_n). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Как показано в [7], системы (4)–(7) имеют нормальный определитель и для их численного решения может быть использован метод редукции, позволяющий получить значения амплитуд дифракционных гармоник поля с любой необходимой степенью точности. Однако интерферометр Фабри—Перо является одномодовым устройством, работающим лишь в режиме, когда все высшие гармоники поля затухают по мере удаления от плоскостей решеток. Таким образом, интерес представляет исследование его свойств в частотном диапазоне $\kappa < 1/(1 + \sin \alpha)$, в котором распространяется лишь основная волна (нулевая гармоника дифракционного спектра). При таких значениях частотного параметра (одноволновая область) оказывается возможным с помощью метода последовательных приближений получить приближенное аналитическое решение бесконечных систем уравнений с оценкой погрешности.

Определим область значений параметров задачи, при которых сходится процесс последовательных приближений. С этой целью оценим m -нормы вторых уравнений в (4)–(5); считая x_0 и y_0 известными

$$N_\varepsilon = \max_m \sum_{n \neq 0} |\varepsilon_n W_m^n|, \quad N_\delta = \max_m \sum_{n \neq 0} |\delta_n W_m^n|.$$

Поскольку указанные системы уравнений должны решаться при одинаковых допущениях относительно размеров структуры, достаточно получить оценку наибольшей из величин N_ε и N_δ .

Для определенности будем в дальнейшем считать, что $N_\varepsilon > N_\delta$, т. е. $|\varepsilon_n| > |\delta_n|$. Если выполняется обратное неравенство, оценки следует провести для N_δ . Используя оценки и рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра [8], нетрудно получить следующую оценку для нормы N_ε :

$$\begin{aligned} N_\varepsilon &< \frac{1}{2} (1 - u + \sqrt{1 - u^2}) \varepsilon_{-1} + \sqrt{1 - u^2} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n [\ln(n+1) + 1] + \\ &+ \sqrt{1 - u^2} \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_{-n} [\ln(n-1) + 1]. \end{aligned} \quad (10)$$

Процесс последовательных приближений сходится, когда норма соответствующей системы уравнений меньше единицы. Это условие дает с оценкой бесконечных сумм в (10) ограничение на параметры структуры

$$\frac{1}{2}(1-u+\sqrt{1-u^2})\varepsilon_{-1} + +2\sqrt{1-u^2}\left[-\frac{\operatorname{ch}(1-\nu)q}{q}\operatorname{Ei}(-q)+\frac{1}{e^q-1}+1.85\kappa^2\right]<1, \quad (11)$$

$q = \frac{2\pi a}{l}\sqrt{1-0.445\kappa^2}$, $\operatorname{Ei}(x)$ — интегральная показательная функция.

Оценки, подобные (11), можно получить и для норм систем уравнений, описывающих дифракцию H -поляризованной волны.

Характерно, что в рассмотренном случае левая часть неравенства состоит из двух слагаемых, одно из которых пропорционально $(1-u)$, а второе $\sqrt{1-u^2}$. Это значит, что метод последовательных приближений применим для структуры с любым расстоянием между решетками в диапазоне частот от 0 до $\kappa = \frac{1}{(1+\sin\alpha)}$, но при узких щелях для E -поляризованной волны.

Считая теперь, что параметры задачи выбраны такими, при которых нормы подсистем уравнений из (4)–(7) меньше единицы, применим к ним метод итераций. По определенным x_n, y_n, x'_n, y'_n из (3) и (9) получаем далее коэффициент прохождения структуры в первом приближении для E -поляризации

$$D_0^{(1)} = \frac{i \operatorname{ctg} \alpha}{2} \left[\frac{\tilde{W}_\sigma^0 + A_1}{\tilde{R}_\sigma + \varepsilon_0(\tilde{W}_\sigma^0 + A_1) + A_2} - \frac{\tilde{W}_\sigma^0 + B_1}{\tilde{R}_\sigma + \delta_0(\tilde{W}_\sigma^0 + B_1) + B_2} \right], \quad (12)$$

для H -поляризации

$$d_0^{(1)} = e^{i\gamma_0 a} + \frac{i \operatorname{ctg} \alpha}{2} \left[\frac{(\tilde{W}_\sigma^0 + A'_1)(1 - e^{i\gamma_0 a})^2}{\tilde{R}_\sigma + \varepsilon'_0(\tilde{W}_\sigma^0 + A'_1) + A'_2} - \frac{(\tilde{W}_\sigma^0 + B'_1)(1 + e^{i\gamma_0 a})^2}{\tilde{R}_\sigma + \delta'_0(\tilde{W}_\sigma^0 + B'_1) + B'_2} \right] \quad (13)$$

с ошибкой, в обоих случаях пропорциональной $\frac{N}{(1-N)}$, где N — нормы соответствующих систем уравнений.

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \sum_{n \neq 0} \varepsilon_n W_n^0 \tilde{W}_\sigma^0 \frac{|\nu+n|}{\nu+n}, & A_2 &= \sum_{n \neq 0} \varepsilon_n \frac{R_n}{R_0} W_\sigma^0 \frac{|\nu+n|}{\nu+n}, \\ B_1 &= \sum_{n \neq 0} \delta_n W_n^0 \tilde{W}_\sigma^0 \frac{|\nu+n|}{\nu+n}, & B_2 &= \sum_{n \neq 0} \delta_n \frac{R_n}{R_0} W_\sigma^0 \frac{|\nu+n|}{\nu+n}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Суммы, обозначенные A'_1, A'_2, B'_1, B'_2 , отличаются от выписанных тем, что ε_n, δ_n заменены на $\varepsilon'_n, \delta'_n$ соответственно. С точностью, необходимой для приближений, при расчете коэффициентов прохождения бесконечные суммы (14) могут быть заменены двумя слагаемыми с $n = \pm 1$, поскольку последующие члены в суммах убывают как $1/(n+\nu)^3$. Максимальные же значения, например A_1 и A_2 , удовлетворяют условию

$$|A_1| < \frac{1}{4} \nu (1-u)^2 \varepsilon_{-1} + \nu \sqrt{1-u} \left(\sqrt{1-u} + \nu \sqrt{1+u} \left| \ln \frac{1+u}{2} \right| \right) [-2 \operatorname{Ei}(-q) + 1.7\kappa^2], \quad (15)$$

$$|A_2| < \frac{1}{2} \nu (1-u) \varepsilon_{-1} + \nu \left(\sqrt{1-u} + \nu \sqrt{1+u} \left| \ln \frac{1+u}{2} \right| \right) [-2 \operatorname{Ei}(-q) + 1.7\kappa^2]. \quad (16)$$

Для удобства анализа электродинамических свойств двухслойных структур по формулам (12) и (13) мы будем пренебрегать значениями A_i и B_i , имея в виду возможность оценки совершаемой при этом погрешности [с учетом (15) и (16)] при точном количественном определении не-

обходимых параметров. Эта погрешность будет тем меньше, чем больше длина волны и расстояние между слоями и чем меньше параметр возмущения (для E -поляризации — узкие щели, для H -поляризации — узкие ленты). Физически это означает, что в этом приближении не учтено влияние полей, связанных с затухающими гармониками и сконцентрированных в весьма узком слое, прилегающем к дискретным границам.

Анализ решения

Определим коэффициенты прохождения при E - и H -поляризации через параметры структуры

$$D_0 = \frac{\left(iz \cos \alpha \ln \frac{1+u}{2} \right)^2 e^{ikac \cos \alpha}}{\left(1 + e^{ikac \cos \alpha} + iz \cos \alpha \ln \frac{1+u}{2} \right) \left(1 - e^{ikac \cos \alpha} + iz \cos \alpha \ln \frac{1+u}{2} \right)}, \quad (17)$$

$$d_0 = \frac{e^{ikac \cos \alpha}}{\left[1 + iz \cos \alpha \ln \frac{1-u}{2} (1 - e^{ikac \cos \alpha}) \right] \left[1 + iz \cos \alpha \ln \frac{1-u}{2} (1 + e^{ikac \cos \alpha}) \right]} \quad (18)$$

Здесь использовано асимптотическое представление функций Лежандра для малого индекса ($z \sin \alpha$). Нетрудно видеть, что при малых частотах (z) модуль коэффициента прохождения для E -поляризованной волны близок к нулю, а для H -поляризованной волны — к единице. На рис. 1 представлены дисперсионные зависимости модуля коэффициента прохождения, рассчитанные по формуле (12) при разных значениях параметра заполнения и расстояния между решетками. Монотонно возрастающая частотная зависимость модуля коэффициента прохождения модулируется осцил-

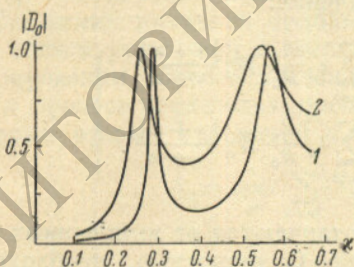


Рис. 1. Дисперсионная зависимость коэффициента прохождения E -поляризованной волны.

1 — $u = -0.5$, 2 — $u = -0.9$; угол падения $\alpha = 10^\circ$; расстояние $a/t = 1.5$.

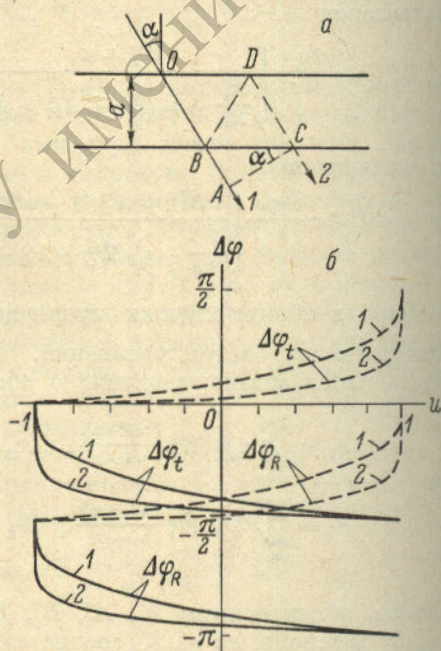


Рис. 2. К определению фазы прошедших волн через двухслойную структуру.

a — интерференционная картина, b — скачок фазы основной волны при отражении (R) и прохождении (t) на изолированной решетке для двух ортогонально поляризованных волн для угла падения $\alpha = 45^\circ$ и частотах: 1 — $z = 0.5$, 2 — $z = 0.25$. Сплошные линии соответствуют E -поляризации, штрихованные — H -поляризации.

ляциями, количество которых определяется расстоянием между решетками и направлением распространения волны. К общим закономерностям следует отнести более быстрый рост коэффициента прохождения при уменьшении ширины металлических лент на периоде, а также уширение резонансов с увеличением частоты.

Экстремумы в дисперсионной зависимости коэффициентов поля естественно объяснить интерференционными явлениями. Определим разность фаз прошедших двух основных волн (рис. 2, а), одна (1) из которых проходит две решетки без отражений, а вторая (2) — после двух отражений. В плоскости волновой поверхности AC для волны 1 набег фазы (у верхней решетки считаем фазу равной нулю) составит

$$\Delta\varphi_t + \Delta\varphi_{OB} + \Delta\varphi_t + \Delta\varphi_{BA},$$

для волны 2

$$\Delta\varphi_t + \Delta\varphi_{OB} + \Delta\varphi_R + \Delta\varphi_{BD} + \Delta\varphi_R + \Delta\varphi_{DC} + \Delta\varphi_t,$$

где $\Delta\varphi_t$ и $\Delta\varphi_R$ — скачок фазы основной волны соответственно при прохождении и отражении от идентичных решеток. Максимальное значение поля под решетками будет наблюдаться при разности фаз $2\pi m$, а минимальное — при $\pi(2m+1)$, где m принимает значения 0, 1, 2, 3, ... Сопоставляя фазы первой (1) и второй (2) волн в плоскости AC , получаем условие для максимального значения коэффициента прохождения

$$2\Delta\varphi_R + 2\Delta\varphi_{OB} - \Delta\varphi_{BA} = 2\pi m,$$

откуда резонансное значение расстояния между решетками определяется в виде

$$\left(\frac{a}{l}\right)_m = \frac{m}{2\kappa \cos \alpha} - \frac{\Delta\varphi_R}{2\pi\kappa \cos \alpha}. \quad (19)$$

Скачок фазы основной волны на изолированной решетке при прохождении $\Delta\varphi_t$ и отражении $\Delta\varphi_R$ для E - и H -поляризации как функция параметра u при двух значениях κ и $\alpha=45^\circ$ приведены на рис. 2, б. При узких металлических лентах скачки фаз близки к $(-\pi/2)$, и первое резонансное значение $a_0 \cos \alpha \approx \lambda/4$. С увеличением ширины металлических лент это резонансное значение расстояния между решетками для E -поляризации увеличивается, стремясь к $a_0 \cos \alpha \approx \lambda/2$, а для H -поляризации — уменьшается, стремясь к нулю.

Для аналитического изучения резонансного поведения коэффициентов прохождения исследуем знаменатель в формулах (17) и (18) как функцию расстояния между решетками. Условие минимума знаменателя, определяющее максимальное значение модуля коэффициента прохождения, определяется следующими дисперсионными соотношениями для E -поляризации:

$$\operatorname{tg}(ka \cos \alpha) = \kappa \cos \alpha \ln \frac{1+u}{2}, \quad (20)$$

для H -поляризации:

$$\operatorname{ctg}(ka \cos \alpha) = -\kappa \cos \alpha \ln \frac{1-u}{2}, \quad (21)$$

что соответствует резонансным расстояниям между решетками для E -поляризации

$$\left(\frac{a}{l}\right)_m = \frac{m}{2\kappa \cos \alpha} + \frac{\operatorname{arc tg}\left(\kappa \cos \alpha \ln \frac{1+u}{2}\right)}{2\pi\kappa \cos \alpha}, \quad (22)$$

для H -поляризации

$$\left(\frac{a}{l}\right)_m = \frac{m}{2\kappa \cos \alpha} - \frac{\operatorname{arc ctg}\left(\kappa \cos \alpha \ln \frac{1-u}{2}\right)}{2\pi\kappa \cos \alpha}. \quad (23)$$

Коэффициент прохождения для E - и H -поляризаций в резонансе равен $e^{-ik a \cos \alpha}$. Как и следовало ожидать, резонансные расстояния между зеркалами, полученные по формулам (22) и (23), совпадают с их значениями, полученными из интерференционной картины. Зависимость коэффициента прохождения от расстояния a/l иллюстрируется рис. 3.

Одним из важных параметров, характеризующих свойства интерферометров Фабри—Перо, является ширина резонансной кривой $\Delta \frac{a}{l}$ коэффициента прохождения, определяемая на уровне 0.707. Пусть η — величина a/l , соответствующая резонансному прохождению, и $\varphi(a/l)$ — квадрат модуля знаменателя (17). Тогда для определения $\Delta \frac{a}{l}$ решаем уравнение

$$\left(\kappa \cos \alpha \ln \frac{1+u}{2} \right)^4 - \varphi'(\eta) \left(\frac{a}{l} - \eta \right) - \frac{1}{2!} \varphi''(\eta) \left(\frac{a}{l} - \eta \right)^2 - \dots = 0.$$

Можно показать, что

$$\varphi^{(n)}(\eta) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}+1} 2^{2n+1} (\pi \kappa \cos \alpha)^n \left[1 + \left(\kappa \cos \alpha \ln \frac{1+u}{2} \right)^2 \right], & n = 2m, \\ 0, & n = 2m - 1, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

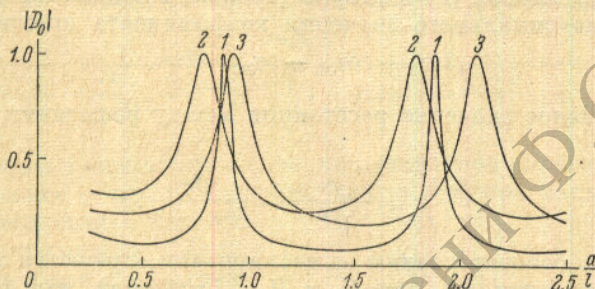


Рис. 3. Зависимость коэффициента прохождения E -поляризованной волны при $\kappa=0.5$.

1 — $u=0$, $\alpha=5^\circ$; 2 — $u=-0.5$, $\alpha=5^\circ$; 3 — $u=-0.5$, $\alpha=30^\circ$.

Пренебрегая величинами $\left(\frac{a}{l} - \eta \right)^2$, найдем для E -поляризации

$$\Delta \frac{a}{l} = \frac{\kappa \cos \alpha \left(\ln \frac{1+u}{2} \right)^2}{2\pi \sqrt{1 + \left(\kappa \cos \alpha \ln \frac{1+u}{2} \right)^2}}. \quad (24)$$

Аналогичные вычисления для H -поляризации приводят к выражению

$$\Delta \frac{a}{l} = \frac{1}{2\pi \kappa^2 \cos^2 \alpha \left| \ln \frac{1-u}{2} \right| \sqrt{1 + \left(\kappa \cos \alpha \ln \frac{1-u}{2} \right)^2}}. \quad (25)$$

В правых частях формул (24) и (25) стоят резонансные значения параметров структуры. Следует заметить, что определенная таким образом ширина резонансной кривой имеет смысл только для решеток с достаточно узкими щелями. На рис. 4 приведены резонансные кривые первого интерференционного максимума как функции расстройки при разных значениях κ , u и α . Общим свойством этих зависимостей является уменьшение ширины резонансной кривой при уменьшении ширины щелей как для E -, так и для H -поляризации. Зная ширину резонансных кривых, нетрудно определить резкость интерференционных максимумов как отношение расстояния между соседними максимумами, равного

$$a_m - a_{m-1} = \frac{\lambda}{2 \cos \alpha}$$

к полуширине резонансной кривой [9].

В случае наклонного падения электромагнитной волны положение резонансов определяется не только расстоянием между зеркалами, но и

углом падения α . Для определения резонансной длины волны при заданных α и a/l необходимо привести формулы (20) и (21) к виду:

для E -поляризации

$$\frac{\operatorname{tg}(ka \cos \alpha)}{ka \cos \alpha} = \frac{l}{2\pi a} \ln \frac{1+u}{2}, \quad (20a)$$

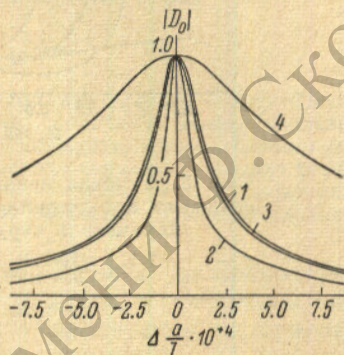
и для H -поляризации

$$\frac{\operatorname{ctg}(ka \cos \alpha)}{ka \cos \alpha} = -\frac{l}{2\pi a} \ln \frac{1-u}{2}, \quad (21a)$$

легко разрешимому с использованием стандартных таблиц $\operatorname{tg} x/x$ и $\operatorname{ctg} x/x$. Зная линейные характеристики интерферометра (l , a , u) и определенный из эксперимента угол, который составляет нормаль зеркала с волновым вектором, легко вычислить по формулам (20a) и (21a) длину волны. Зависимость модуля коэффициента прохождения от угла падения приведена на рис. 5.

Рис. 4. Зависимость ширины резонансной кривой коэффициента прохождения для первого максимума для разных параметров структуры.

1 — $u=0.9$, $\kappa=0.5$, $\alpha=10^\circ$; 2 — $u=0.9$, $\kappa=0.25$, $\alpha=10^\circ$; 3 — $u=0.9$, $\kappa=0.5$, $\alpha=30^\circ$; 4 — $u=0.8$, $\kappa=0.5$, $\alpha=10^\circ$. На оси абсцисс показано отклонение a/l от его значения при резонансе.



Метод селекции волн по угловым измерениям, не требующий перестройки зеркал и связанной с ней юстировки, обладает существенным преимуществом при технической эксплуатации прибора. Ширина резонансной кривой в угловом масштабе может быть вычислена таким же методом, как и в линейном. Характер ее зависимости от размеров структуры иллюстрируется рис. 6.

Определим разрешающую способность исследуемого интерферометра, исходя из критерия Рэлея [10]

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0},$$

где $\lambda_0 \pm \frac{1}{2} \Delta\lambda_0$ — длины двух волн равной интенсивности, максимумы коэффициентов прохождения которых отстоят друг от друга на ширину резонансной кривой $\Delta a/l$. Как видно из рис. 2, б, скачок фазы основной волны в режиме отражения весьма слабо зависит от частоты, а тем более для близких частот $\Delta\kappa = \kappa \Delta\lambda_0/\lambda_0$ этой зависимостью можно пренебречь. Последнее обстоятельство дает право рассматривать вторые слагаемые в формулах (22) и (23), как ответственные за скачок фазы основной волны, постоянной величиной для длин волн, отличающихся на величину $\Delta\lambda_0$. Тогда

$$\left(\frac{a}{l}\right)_{m, (\lambda_0 + \Delta\lambda_0)} - \left(\frac{a}{l}\right)_{m, \lambda_0} = \frac{m}{2 \cos \alpha} \frac{\Delta\lambda_0}{l} = \Delta \frac{a}{l}.$$

Отсюда разрешающая способность определяется следующими выражениями:

для E -поляризации

$$\mathcal{R}_E = \frac{\pi m \sqrt{1 + \left(\kappa \cos \alpha \ln \frac{1+u}{2}\right)^2}}{\left(\kappa \cos \alpha \ln \frac{1+u}{2}\right)^2}, \quad (26)$$

для H -поляризации

$$\mathcal{R}_H = \pi t x \cos \alpha \left| \ln \frac{1-u}{2} \right| \sqrt{1 + \left(x \cos \alpha \ln \frac{1-u}{2} \right)^2}. \quad (27)$$

Здесь использованы выражения (24) и (25) для ширины резонансной кривой. Таким образом, разрешающая способность прибора тем выше,

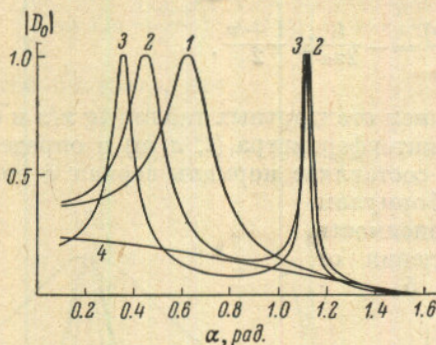


Рис. 5. Угловая зависимость коэффициента прохождения при разных параметрах структуры.

1 — $u = -0.5$, $a/l = 1.0$, $x = 0.5$; 2 — $u = -0.5$, $a/l = 2.0$, $x = 0.5$; 3 — $u = 0$, $a/l = 2.0$, $x = 0.5$; 4 — $u = -0.9$, $a/l = 0.5$, $x = 0.25$.

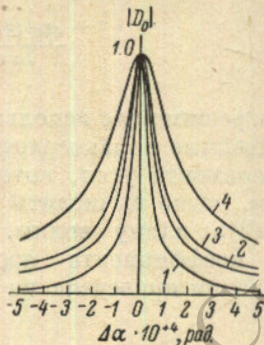


Рис. 6. Зависимость ширины резонансной кривой коэффициента прохождения для первого максимума для разных параметров структуры.

1 — $u = 0.9$, $x = 0.5$, $a/l = 2.0$;
2 — $u = 0.9$, $x = 0.3$, $a/l = 2.0$;
3 — $u = 0.9$, $x = 0.5$, $a/l = 1.5$;
4 — $u = 0.8$, $x = 0.5$, $a/l = 2.0$.

На оси абсцисс показано изменение направления распространения волны относительно ее направления при резонансе.

чем большее значение имеет порядок интерференции (что находится в полном согласии с хорошо известным результатом). Полученная явная зависимость разрешающей силы от параметров структуры позволяет конструировать интерферометры Фабри—Перо на основе двух решеток с необходимыми для приложений характеристиками.

Литература

- [1] В. Я. Балаханов. ДАН СССР, 163, 1124, 1965.
- [2] Ф. А. Королев, В. И. Гриднев. Опт. и спектр., 16, 335, 1964.
- [3] З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 32, 381, 1962.
- [4] В. Б. Казанский. Радиотехника, Респ. межвед. научно-техн. сб., вып. 13, 1970.
- [5] О. А. Третьяков. Опт. и спектр., 15, 709, 1963.
- [6] А. И. Адонина, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 33, 641, 1963.
- [7] Л. Н. Литвиненко, В. П. Шестопалов. Числен. методы решения задач мат. физики, сб. статей. Изд. «Наука», 1966.
- [8] Г. Сеге. Ортогональные многочлены. Физматгиз, М., 1962.
- [9] М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики, гл. 7. Изд. «Наука», М., 1970.
- [10] J. W. Rayleigh. Phil. Mag., 8, 261, 1879.

Поступило в Редакцию 22 февраля 1971 г.