Ю. А. Курочкин, Н. Д. Шайковская
Институт физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси,
Минск, Беларусь

МЕТОД ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКЕ СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ: СПЕЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА

Введение

На связь теории относительности с геометрией пространства Лобачевского обращали внимание такие выдающиеся ученые как В. Паули, А. Зоммерфельдь, В. А. Фок. [1–3] В работах Н. А. Черникова и Я. А. Смородинского процессам столкновений и распадов частиц ставились в соответствие геометрические фигуры (многогранники), являющиеся инвариантными образами описываемых процессов, содержащие информацию об их кинематике [4–5].

В Институте физики имени Б. И. Степанова развит новый метод релятивистской кинематики, основанный на связи бикватернионного исчисления с векторной параметризацией и геометрией Лобачевского [6–10].

В данном подходе сторонам и диагоналям геометрических образов процесса рассеяния ставятся в соответствие комплексные векторы проективного пространства $\vec{q}$, сопоставляемые парам упорядоченных точек трехмерного пространства Лобачевского. В основу теории положен закон сложения векторов Федорова. Векторы $\vec{q}$ связаны с комплексными относительными скоростями. Квадрат $\vec{q}^{\,2}$ есть величина вещественная и дает квадрат относительной скорости двух частиц. Углы между пересекающимися векторами являются реальными углами между направлениями движения релятивистских частиц. В качестве кинематических переменных, характеризующих процесс рассеяния, в таком подходе выступают длины ребер и диагоналей многогранника (быстроты) и углы между векторами $\vec{q}$. Эти величины являются лоренцевскими инвариантами. [7–10].

Нами был использован данный метод при решении задачи о специальной системе отсчета, связанной с этим процессом.

1. Специальная система отсчета

Геометрическим образом процесса бинарного упругого рассеяния является четырехугольник 1234 (рисунок 1). Специальным системам отсчета отвечают точки, лежащие на геодезических пространства Лобачевского, образующих геометрический образ процесса рассеяния, либо точки их пересечения. Примерами таких систем отсчета являются: система отсчета, связанная с центром масс частиц (ей отвечает точка пересечения диагоналей геометрического образа), система отсчета Брейта, в которой $\vec{p}_1 = -\vec{p}_3$, лабораторная система отсчета, в которой одна из частиц до столкновения покоится. Мы рассмотрели новую специальную систему отсчета, которой отвечает точка пересечения геодезических линий, заданных векторами $\vec{q}_{14}$ и $\vec{q}_{32}$.

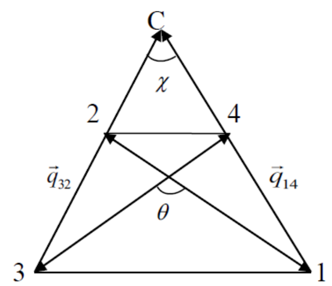

Рисунок 1 – Точка C, отвечающая специальной системе отсчета

Данная специальная система отсчета обладает той особенностью, что в ней частицы в результате столкновения обмениваются направлениями своего движения.

Методом, основанным на геометрии Лобачевского, с использованием закона сложения векторов Федорова был найден угол рассеяния χ частиц в специальной системе отсчета

$$\cos\chi = \frac{\left(V_1^2 + V_2^2\right)\cos\theta + 2V_1V_2 + V_1^2V_2^2\sin^2\theta}{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\theta - V_1^2V_2^2\sin^2\theta}. \quad (1)$$

а также ее скорость относительно центра масс сталкивающихся частиц

$$V_{0C} = \frac{2V_1\,V_2\,\cos\dfrac{\theta}{2}}{V_1 - V_2}, \quad (2)$$

где θ – угол рассеяния частиц в системе центра масс, V_1 и V_2 – скорости первой и второй частиц в этой системе отсчета соответственно до столкновения.

2. Анализ формулы для угла рассеяния

Было получено выражение для угла рассеяния частиц в специальной системе отсчета через кинематические инварианты Мандельстама *s* и *t*.

В первом канале (s-канале) величина s есть квадрат полной энергии сталкивающихся частиц $s = \left(E_1 + E_2\right)^2$. А величина $-t$ есть квадрат переданного одной из частиц в результате столкновения импульса, $t = -2\vec{p}_1^{\,2}(1-\cos\theta)$.

$$\cos\theta = \frac{(s-t)[ts + A] + t\left(m_1^2 - m_2^2\right)^2}{(s+t)[ts + A] - t\left(m_1^2 - m_2^2\right)^2}, \quad (3)$$

где $A = \left(s - (m_1 - m_2)^2\right)\left(s - (m_1 + m_2)^2\right)$

Специальная система отчета существует, если $-1 \le \cos\theta \le 1$, что при фиксированном значении полной энергии системы приводит к условию

$$t \in \left[-\frac{A}{s}, -\frac{A}{s} + \frac{1}{s}\left(m_1^2 - m_2^2\right)^2 \right], \tag{4}$$

что означает ограничение на угол рассеяния в ц-системе

$$\cos\theta \in \left[-1, -1 + \frac{\left(V_1 - V_2\right)^2}{2V_1^{\ 2}V_2^{\ 2}} \right]. \tag{5}$$

При $t = -\frac{A}{s} + \frac{1}{s}\left(m_1^2 - m_2^2\right)^2$ (то есть $\cos\theta = -1 + \frac{\left(V_1 - V_2\right)^2}{2V_1^{\ 2}V_2^{\ 2}}$) рассматриваемые геодезические пересекаются на абсолюте, $\cos\chi = 1$ и скорость специальной системы отсчета равна скорости света $V_{0C} = 1$.

При невыполнении условия (4), рассматриваемые геодезические становятся расходящимися, и специальная система отсчета не существует.

3. Расходящиеся прямые

Аналогично был найден угол между векторами $\vec{q}_{24}$ и $\vec{q}_{31}$. Оказывается, что для данных прямых пространства Лобачевского

$$\cos\chi = \frac{2 + V_1V_2(1+\cos\theta)}{\sqrt{2 - V_1^2(1+\cos\theta)}\sqrt{2 - V_2^2(1+\cos\theta)}} > 1, \tag{6}$$

то есть сам угол χ – мнимый. Таким образом, данные геодезические не пересекаются, и являются расходящимися. Было найдено расстояние между ними, определяемое как длина отрезка геодезической, перпендикулярной каждой их рассматриваемых прямых, заключенного между ними. Вычисление дало следующую связь между длиной перпендикулярного расходящимся прямым отрезка и косинусом угла между ними

$$ch\rho = \cos\chi\,. \qquad (7)$$

В случае равных масс мы получили, что обе пары геодезических линий являются расходящимися и угол между ними

$$\cos\chi = \frac{s-t}{s+t} > 1\,, \qquad (8)$$

и также справедливо соотношение (7).

Заключение

Таким образом, продемонстрировано использование метода геометрии Лобачевского для решения задачи о нахождении скорости специальной системы отсчета, которой отвечает точка пересечения продолжений сторон четырехугольника процесса упругого рассеяния двух частиц. Найден модуль ее скорости – выражение (2).

При рассмотрении столкновения из данной специальной системы отсчета обе частицы рассеиваются на одинаковый угол, косинус которого дается выражением (1) и обмениваются направлениями своего движения. Условия существования данной специальной системы отсчеты при фиксированной полной энергии сталкивающихся частиц определяются интервалом (4).

Показано, что в случае расходящихся прямых косинус угла между ними и расстояние между ними связаны как $ch\rho = \cos\chi$.

Литература

1. Паули, В. Теория относительности / В. Паули. – М.: Наука, 1983. – 336 с.

2. Зоммерфельд, А. Электродинамика / А. Зоммерфельд. – М. Иностранная литература, 1958. – 501 с.

3. Фок, В. А. Теория пространства, времени и тяготения / В. А. Фок. – М.: Физматгиз, 1961. – 569 с.

4. Черников, Н. А. Геометрии Лобачевского и релятивистская кинематика / Н. А. Черников // ЭЧАЯ. – 1973. – Т. 4, вып. 3. – С. 773–810.

5. Смородинский, Я. А. Геометрия Лобачевского и кинематика Эйнштейна. Эйнштейновский сборник / Я. А. Смородинский. – М.: Наука, 1972. – С. 272–301.

6. Березин, А. В. Кватернионы в релятивистской физике / А. В. Березин, Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев. – Мн., 1989. – 202 с.

7. Богуш, А. А. Бикватернионы в кинематике реакции γ + A→ γ' +B +C в 3-пространстве Лобачевского / А. А. Богуш, И. Л. Бородкина, Ю. А. Курочкин, М. И. Левчук. – Мн., 1989 (Препринт/Институт физики АН БССР: 567).

8. Курочкин, Ю. А. Вектор-параметры Ф. И. Федорова и аксиоматическое описание геометрии пространств постоянной кривизны / Ю. А. Курочкин, А. А. Богуш // Весці АНБ, Сер. Фіз.-мат. навук. – 1995. – № 4. – С. 10–75.

9. Курочкин, Ю. А. Специальная теория относительности и геометрия Лобачевского / Ю. А. Курочкин // Наука и инновации. – 2016. – № 3 (157). – С. 51–56.

10. Богуш, А. А. Кинематические модели трехмерных пространств постоянной кривизны / А. А. Богуш, Ю. А. Курочкин // Гравитация и электромагнетизм. – 1998. – С. 20–26.