

**В. И. Лашкевич, О. П. Соловцова**  
УО «Гомельский государственный технический университет  
имени П. О. Сухого», Гомель, Беларусь

## **ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ИНТЕГРАЛОВ МЕЛЛИНА – БАРНСА В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ**

### **Введение**

Интегралы Меллина – Барнса (МБ) [1] – семейство интегралов в комплексной плоскости, подынтегральное выражение которых определяется произведением гамма-функций – широко используются в физике и технике (см., например, работу [2]) и достигнут значительный прогресс в эффективных численных методах оценки этих интегралов [3, 4]. В настоящее время в математической физике и экспериментальной математике востребована очень высокая точность вычислений интегралов МБ, до  $10^{-12}$  и выше. На первый взгляд, наибольшая эффективность при численной оценке интегралов МБ может быть достигнута при использовании контура стационарной фазы, где осцилляции подынтегральной функции отсутствуют. Однако решение соответствующего дифференциального уравнения для нахождения контура стационарной фазы и его последующее применение при численном интегрировании может потребовать больших компьютерных затрат, а

может вообще быть невыполнимо (см. нижеприведённый пример 2). В связи с этим возникла необходимость в построении эффективных аппроксимаций точного контура стационарной фазы. Первая попытка такого построения в квантовой физике была сделана Косовером [5] применительно к нахождению партонных функций распределений нуклона на основе их меллиновских моментов – соответствующий контур далее обозначается как  $C_K$ .

В настоящей работе представлено новое приближение для контура стационарной фазы  $C_{as}$ , которое позволяет эффективно и с высокой точностью вычислять интегралы МБ в случае ограниченного асимптотического поведения контура стационарной фазы на бесконечности, что, в частности, реализуется и для отмеченных выше функций распределений. Соответствующий контур называется асимптотическим и обозначается как  $C_{as}$ . Наше рассмотрение начинается с точно решаемого для контура стационарной фазы примера, на котором демонстрируется идея построения  $C_{as}$ .

### 1. Теоретические основы

Пусть функция имеет вид  $F(s) = s^a$  для любых действительных значений константы  $a$  и аргументе  $0 < s < 1$ . Если выразить эту функцию через её меллиновские моменты

$$M(z) = \int_0^1 ds s^{z-1} F(s) = \frac{\Gamma(a+z)}{\Gamma(a+1+z)}, \quad (1)$$

то с помощью обратного преобразования Меллина в комплексной  $z$ -плоскости получаем представление

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dz s^{-z} M(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} dz \frac{e^{uz}}{z+a}, \quad u \equiv -\ln(s), \quad (2)$$

где контур интегрирования обычно выбирается параллельно мнимой оси  $\delta > -a$ . Точный контур стационарной фазы определяется выражением

$$x_{st}(y) = -a + y \operatorname{ctg}(uy), \quad y \neq 0, \quad (3)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} x_{st}(y) = -a + \frac{1}{u} \equiv c_0, \quad y = 0,$$

из которого легко находится асимптотическое поведение контура стационарной фазы на бесконечности.

На рисунке 1 сплошной линией изображен точный контур стационарной фазы (3), горизонтальные штрихпунктирные линии показывают его асимптотическое поведение, точки соответствуют контуру Косовера  $C_K$ , а пунктирная линия – асимптотический контур, однако без сдвижки в седловую точку  $c_0$ . После сдвижки в  $c_0$  асимптотический контур  $C_{as}$  в точности совпадает с контуром стационарной фазы  $C_{st}$ .

Следующий пример демонстрирует, что на практике могут встречаться интегралы МБ, для которых структура контуров стационарной фазы может оказаться чрезвычайно сложной, затрудняющей интегрирование по точным контурам, а контур Косовера  $C_K$  может не определять нужного направления.

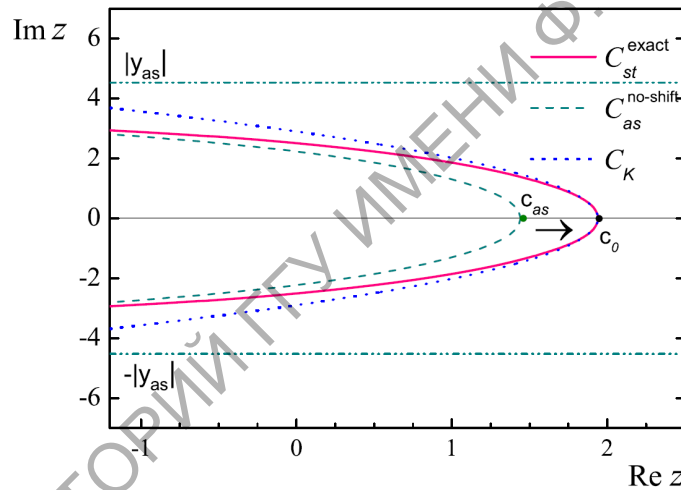


Рисунок 1 – Эффективные контура для интеграла (2): сплошная линия – контур стационарной фазы, пунктирная линия – асимптотический контур без сдвижки, линия из точек – контур Косовера, штрихпунктирные горизонтальные прямые – асимптотический предел контура стационарной фазы на бесконечности

Это имеет место для одного из интегралов МБ, возникающих в массивных диаграммах Фейнмана в квантовой теории поля

$$I_{II}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} dz (-s)^z \frac{\Gamma^4(-z)\Gamma(1+2z)}{\Gamma^2(-2z)\Gamma^2(1+z)}. \quad (4)$$

Структура контуров стационарной фазы для интеграла  $I_{II}(s)$  как в области  $0 < -s < 4^3$ , так и в области  $-s > 4^3$  показана на рисунке 2, на ко-

тором асимптотики контура стационарной фазы изображены в виде горизонтальных прямых.

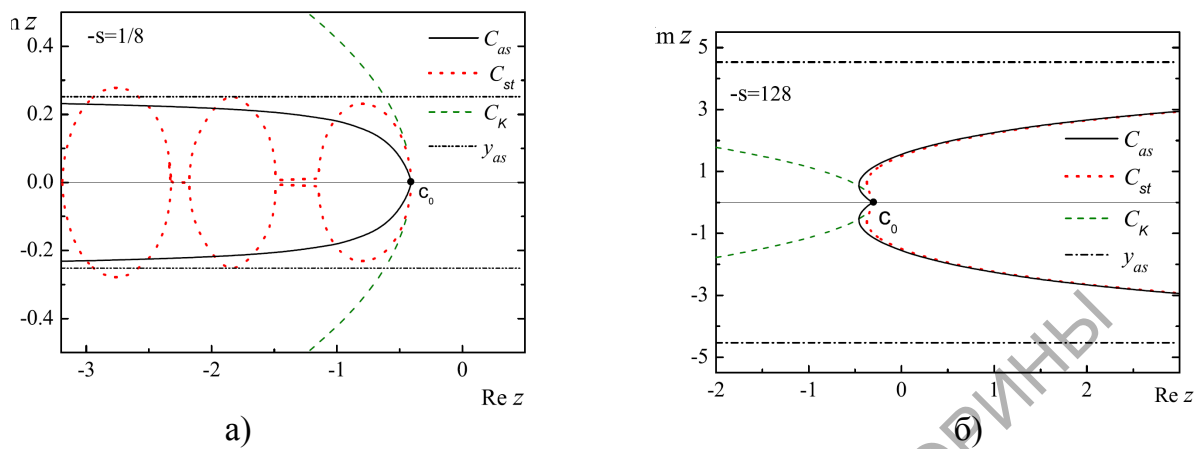


Рисунок 2 – Эффективные контура для интеграла (4):  
 $a$  – в области  $0 < -s < 4^3$ ;  $b$  – в области  $-s > 4^3$ .

Сплошной линии соответствует асимптотический контур, пунктирной линии контур Косовера, точками обозначен контур стационарной фазы, горизонтальные прямые – асимптотический предел контура стационарной фазы на бесконечности

Как видно из рисунка 2, контур  $C_K$  не воспроизводит асимптотическое поведение контура стационарной фазы, а в случае  $-s > 4^3$  контур  $C_K$  направлен в сторону противоположную направлению контура стационарной фазы  $C_{st}$ , что не позволит провести интегрирование по контуру  $C_K$  с высокой точностью.

## 2. Обсуждение результатов

Асимптотический контур стационарной фазы может быть применен при вычислении широкого класса интегралов МБ. Важно отметить, что восстановление с помощью обратного преобразования Меллина структурной функции  $F_3$  полностью аналогично рассмотренному выше простейшему примеру (2). Численные оценки при восстановлении структурной функции  $F_3$ , включая с учетом  $Q^2$ -эволюции меллиновских моментов, приведены в работе [4]. Несомненно, что применение асимптотического контура  $C_{as}$  при проведении интенсивных вычислений, связанных с обработкой экспериментальных данных, например, при нахождении параметров формы структурных функций, функций фрагментаций и распределений кварков и глюонов в нуклоне, окажется намного эффективнее, чем использование обычных прямолинейных контуров интегрирования.

## Заключение

В данной работе представлен новый метод построения эффективного контура интегрирования при проведении расчетов одномерных интегралов Меллина-Барнса. Новый контур строится как приближение контура стационарной фазы в случае его ограниченного асимптотического поведения в пределе  $\text{Re}(z)$  стремящемся к бесконечности. Построение асимптотического контура намного проще, чем построение других эффективных контуров, в частности, не требуется вычислять производные высших порядков, как например, это происходит для контура Косовера, кроме того, для достижения высокой точности достаточно небольшого числа полиномов в квадратурной формуле. Процентная точность достигается при числе полиномов  $< 10$ . Показано, что асимптотический контур позволяет эффективно вычислять интегралы МБ даже при сложной форме контуров стационарной фазы.

## Литература

1. Bateman, H. Higher transcendental functions / H. Bateman, A. Erdelyi // New York: McGraw-Hill, 1953. – Vol. 1. – 345 pp.
2. Fikiori, G. Integral evaluation using the Mellin transform and generalized hypergeometric functions: Tutorial and applications to antenna problems / G. Fikiori // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2006. – Vol. 54. – P. 3895–3907.
3. Gluza, J. Efficient evaluation of massive Mellin-Barnes integrals / J. Gluza, T. Jelinski, D. A. Kosower // Phys. Rev. D. – 2017. – Vol. 95. – Article ID: 076016.
4. Sidorov, A. V. Asymptotics of the contour of the stationary phase and efficient evaluation of the Mellin-Barnes integral for the  $F_3$  structure function/ A. V. Sidorov, V. I. Lashkevich, O. P. Solovtsova // Phys. Rev. D. – 2018. – Vol. 97. – Article ID: 076009.
5. Kosower, D. A. Evolution of parton distributions / Kosower D. A. // Nucl. Phys. B. – 1997. – Vol. 506.– P. 439–467.