Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины. — 1999. — №1(15) Вопросы алгебры. — С. 137–139

УДК 512.542

А. Ф. Аль-Дабабсех, А. Н. Скиба

ДВА ЗАМЕЧАНИЯ О τ-ЗАМКНУТЫХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ n-АРНЫХ ГРУПП

Следуя Л.А.Шеметкову [1], мы будем называть класс n-арных групп [2] $\mathfrak{F}$ формацией, если выполняются следующие условия:

1) каждая фактор-группа любой n-арной группы G из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) из $H/\pi \in \mathfrak{F}$, $H/\varphi \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H/\pi \cap \varphi \in \mathfrak{F}$.

Напомним, что подгрупповой функтор [3] τ сопоставляет каждой n-арной группе G такую систему подгрупп $\tau(G)$, что выполняются следующие условия:

1) для любой n-арной группы G имеет место $G \in \tau(G)$;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ и для любых подгрупп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Класс n-арных групп $\mathfrak{F}$ назовем τ-замкнтутым, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой n-арной группы $G \in \mathfrak{F}$. Значение этого понятия в теории формаций n-арных групп связано со следующими наблюдениями.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная непустая формация n-арных групп. Тогда для любого подгруппового функтора τ наибольший τ-замкнутый подкласс формации $\mathfrak{F}$ сам является формацией.*

Дадим короткое доказательство теоремы 1. Пусть $G \in \mathfrak{F}^{\tau}$, где $\mathfrak{F}^{\tau}$ — наибольший τ-замкнутый подкласс формации $\mathfrak{F}$, π — конгруэнция на G и $H/\pi \in \tau(G/\pi)$. Пусть $\varphi : G \mapsto G/\pi$ — канонический эпиморфизм n-арной группы G на G/π. Тогда $(H/\pi)^{\varphi^{-1}} = H$. Следовательно, по определению подгрупповых функторов $H \in \tau(G)$. Значит, $H \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то $H/\pi \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $\tau(G/\pi) \subseteq \mathfrak{F}$, т.е. $G/\pi \in \mathfrak{F}^{\tau}$.

Пусть теперь π_1, π_2 — такие конгруэнции на G, что $G/\pi_i \in \mathfrak{F}^{\tau}$, $i = 1, 2$. Покажем, что $G/\pi_1 \cap \pi_2 \in \mathfrak{F}^{\tau}$. Так как $G/\pi_1 \in \mathfrak{F}^{\tau}$ и $G/\pi_2 \in \mathfrak{F}^{\tau}$, то $G/\pi_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/\pi_2 \in \mathfrak{F}$. Значит, $G/\pi_1 \cap \pi_1 \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $\tau(G/\pi_1 \cap \pi_2) \subseteq \mathfrak{F}$. Действительно, пусть $\overline{H} \in \tau(G/\pi_i \cap \pi_2)$. Так как $G/\pi_1 \in \mathfrak{F}^{\tau}$ и

$$G/\pi_i \cong (G/(\pi_1 \cap \pi_2))/(\pi_i/(\pi_1 \cap \pi_2)),$$

то

$$(G/(\pi_1 \cap \pi_2))/(\pi_i/(\pi_1 \cap \pi_2)) \in \mathfrak{F}^{\tau}.$$

Значит,

$$\overline{H}/((\overline{H})^2 \cap (\pi_i/(\pi_1 \cap \pi_2))) \cong (\pi_i/(\pi_1 \cap \pi_2))\overline{H}/(\pi_i/(\pi_1 \cap \pi_2)) \in$$

$$\in \tau((G/(\pi_1 \cap \pi_2))/(\pi_i/(\pi_1 \cap \pi_2))) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Итак,

$$\overline{H}/((\overline{H})^2 \cap (\pi_1/(\pi_1 \cap \pi_2))) \in \mathfrak{F}$$

и

$$\overline{H}/((\overline{H})^2 \cap (\pi_2/(\pi_1 \cap \pi_2))) \in \mathfrak{F}.$$

Легко видеть, что

$$(\pi_1/(\pi_1 \cap \pi_2)) \cap (\pi_2/(\pi_1 \cap \pi_2)) = \pi_1 \cap \pi_2/\pi_1 \cap \pi_2.$$

Поэтому

$$\overline{H}/((\overline{H})^2 \cap (\pi_1/(\pi_1 \cap \pi_2))) \cap ((\overline{H})^2 \cap (\pi_2/(\pi_1 \cap \pi_2))) =$$

$$\overline{H}/((\overline{H})^2 \cap (\pi_1 \cap \pi_2)/(\pi_1 \cap \pi_2)) = \overline{H}/\Delta_{G/(\pi_1 \cap \pi_2)} \cong \overline{H} \in \mathfrak{F}.$$

Значит, $G/\pi_1 \cap \pi_2 \in \mathfrak{F}^\tau$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная непустая формация n-арных групп. Тогда наибольший наследственный подкласс формации $\mathfrak{F}$ сам является формацией.*

Класс n-арных групп $\mathfrak{F}$ назовем инвариантно наследственным, если ему принадлежат все инвариантные подгруппы [2] всех n-арных групп из $\mathfrak{F}$.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная непустая формация n-арных групп. Тогда наибольший инвариантно наследственный подкласс формации $\mathfrak{F}$ сам является формацией.*

Теорема 2. *Для любого подгруппового функтора τ решетка всех τ-замкнутых формаций конечных n-арных групп алгебраична, модулярна, но не дистрибутивна.*

Следствие 3 [5]. *Решетка всех формаций конечных n-арных групп алгебраична, модулярна, но не дистрибутивна.*

Следствие 4. *Решетка всех наследственных формаций конечных n-арных групп алгебраична, модулярна, но не дистрибутивна.*

Следствие 5. *Решетка всех инвариантно наследственных формаций конечных n-арных групп алгебраична, модулярна, но не дистрибутивна.*

Summary

Al-Dababseh Awni Faez. Two remarks on τ-closed formations of finite n-ary groups // Proc. Gomel State Univ. — 1999. — №1(15) Problems in Algebra. — P. 137–139

It is proved that for every subgroup functor τ the largest τ-closed subclass of a non-empty formation of n-ary group is a formation

Литература

1. *Шеметков Л.А.* О произведении формаций алгебраических систем. - Алгебра и логика. — 1984. — Т.23, 26. — С.711-729.

2. *Русаков С.А.* Алгебраические n-арные системы. — Мн.: Навука і тэхніка, 1992.

3. *Скиба А.Н.* Алгебра формаций. - Мн.: 1997.

4. *Шеметков Л.А., Скиба А.Н.* Формации алгебраических систем. - М.: Наука, 1989.

5. *Аль-Дабабсех А.Ф., Скиба А.Н.* О решетке формаций конечных n-арных групп // Вторая междунар. алгебр. конф. в Украине, посвященная памяти Л.А.Калужнина: Тез. докл. Киев, 1999. С.52.

Белорусский государственный
университет транспорта

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
e-mail: skiba@gsu.unibel.by

Поступило 15.09.99